

## Введение

В горных породах всегда есть остаточные напряжения. Обработка камня, строительство шахт, глубоких тоннелей и т.д. в горном массиве практически всегда сопряжены с развитием старых и образованием новых разрывов (трещин), со стреляниями, горными ударами, оползнями и т.д. Все эти события являются проявлениями перераспределения остаточных напряжений. Рассматриваемые процессы очень сложны и с трудом поддаются математическому описанию. Теория остаточных напряжений на протяжении многих лет остается одной из главных проблем механики деформируемого твердого тела. К сожалению, мы почти ничего не знаем о механизмах образования остаточных напряжений в горной породе и законах их изменения (сброса) под влиянием тех или иных внешних факторов [Мороз, 2004; Тажибаев, 2016]. Как правило, у нас есть лишь небольшая возможность судить об этом по их проявлениям, в частности, по геометрии трещин, образующихся при полном или частичном сбросе остаточных напряжений, по деформации контура области в результате образования трещин и т.д. Если речь идет о горной породе, то дело осложняется еще и тем, что остаточные напряжения, будучи всегда самоуравновешенными, имеют еще и ярко выраженный быстро-колебательный характер. Это проявляется, например, в том, что трещинообразование в двух блоках горной породы, выпиленных из горного массива в непосредственной близости друг от друга (рис. 1), может быть абсолютно различным [Айтматов, 2006]. Поэтому экспериментально установить характер распределения остаточных напряжений в горной породе крайне сложно. В этой связи важно иметь набор математических моделей остаточных напряжений, на основе которых можно было бы составить некоторое представление о законах распределения (и перераспределения) остаточных напряжений.

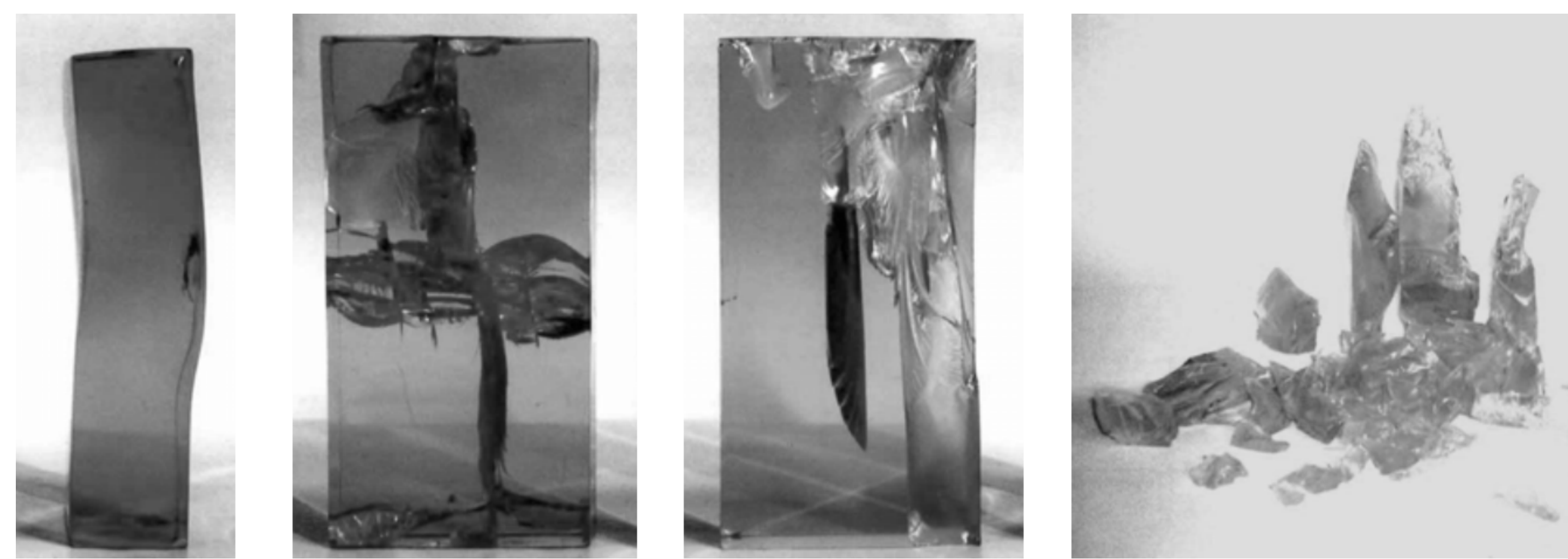


Рис. 1. Образец без остаточных напряжений (а) и образцы с остаточными напряжениями (б, в, г) после испытаний на одноосное сжатие.

## Постановка задачи

Рассматривается плита, в которой имеется четносимметричное относительно центральных координатных осей  $(x, y, z)$  поле остаточных напряжений. Предполагается, что напряженно-деформированное состояние плиты близко к плоской деформации. Также предполагается, что изменение граничных условий на сторонах плиты привело к тому, что нормальные и касательные напряжения в плоскостях  $(\pm d, y, z)$  стали близкими к нулю, что вызвало образование достаточно длинного разрыва, расположенного в плоскости  $(O, y, z)$  (рис. 2). Форма разрыва не зависит от координаты  $z$  и может быть любой, например, он может выходить (не выходить) на дневную поверхность плиты, его длина вдоль оси  $y$  может быть различной, а сам разрыв может располагаться на большей или меньшей глубине и т.д. Все эти факторы принципиально могут быть учтены в математической модели, что, конечно, приведет к ее усложнению.

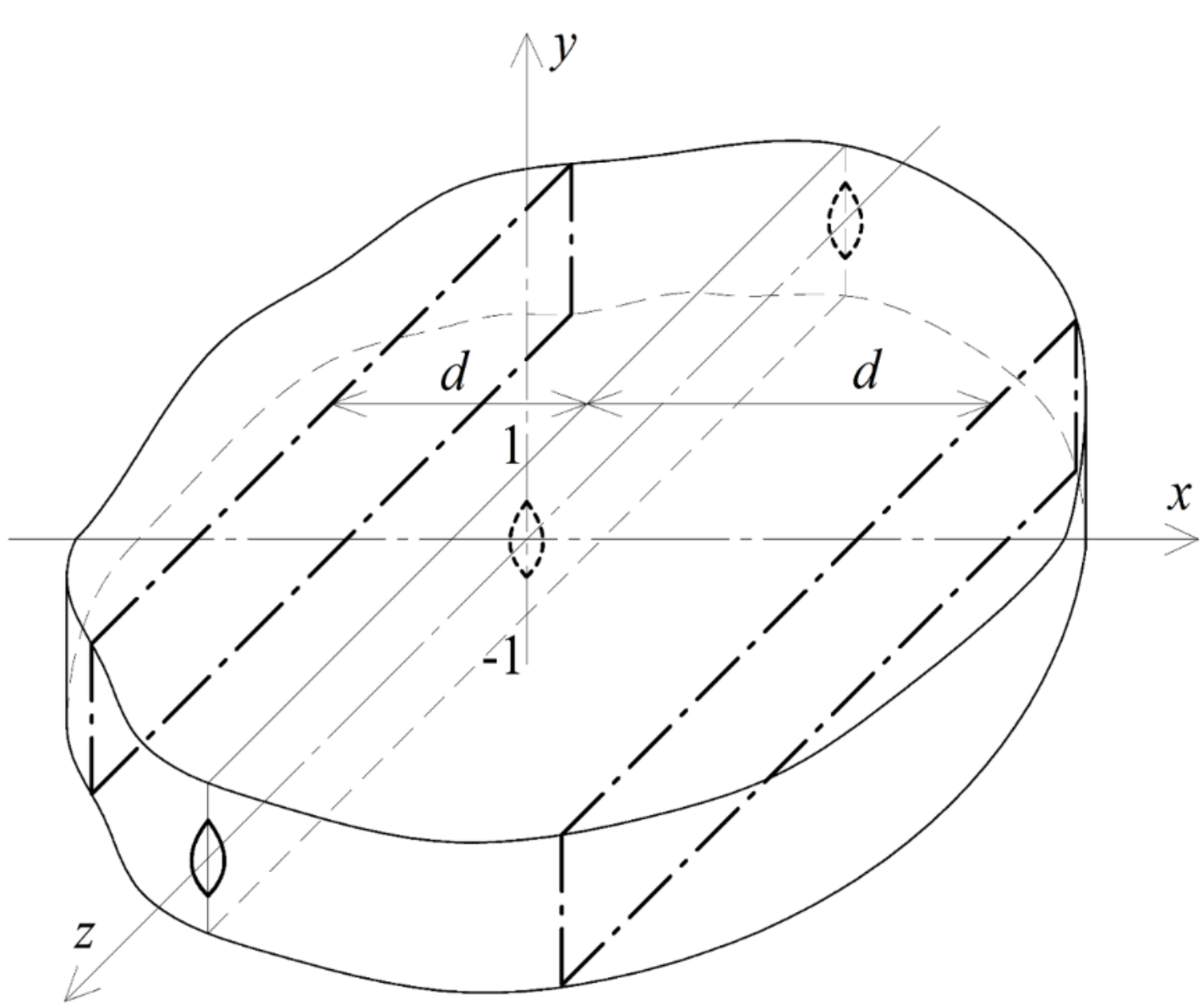


Рис. 2. Плита, в которой поле остаточных напряжений сбрасывается с образованием разрыва в плоскости  $(O, y, z)$ .

## Метод решения

Вместо плоской деформации рассматривается плоское напряженное состояние, что практически не скажется на точности решения. Берутся две горизонтальные деформированные полуполосы: правая  $\{\Pi^+ : |y| \leq 1, x \geq 0\}$  и левая  $\{\Pi^- : |y| \leq 1, x \leq 0\}$  с симметрично искривленными длинными сторонами и торцами, форма которых (т.е. торцов) известна и равна  $\pm u(y)$  при  $x = \pm 0$  соответственно. Левая полуполоса является зеркальным отображением правой (рис. 3). К ним прикладываются некоторые массовые нагрузки такие, что деформированные полуполосы станут полуполосами с прямолинейными сторонами. Затем полуполосы непрерывно склеиваются по торцам. В результате получается бесконечная полоса  $\Pi$  с остаточными напряжениями. Далее из полосы  $\Pi = \Pi^+ + \Pi^-$  с остаточными напряжениями вырезается прямоугольник  $\{P : |y| \leq 1, |x| \leq d\}$  (рис. 4). К торцам прямоугольника  $P$  прикладываются напряжения  $-\sigma_x(\pm d, y)$  и  $-\tau_{xy}(\pm d, y)$  [Коваленко, 2020]. Суперпозиция решений для полосы и прямоугольника дает решение для свободного прямоугольника с остаточными напряжениями. Остаточные напряжения (перемещения) в полосе  $\Pi$  и прямоугольнике  $P$  представляются в виде рядов по собственным функциям Папковича-Фадля [Kovalenko, 2020].

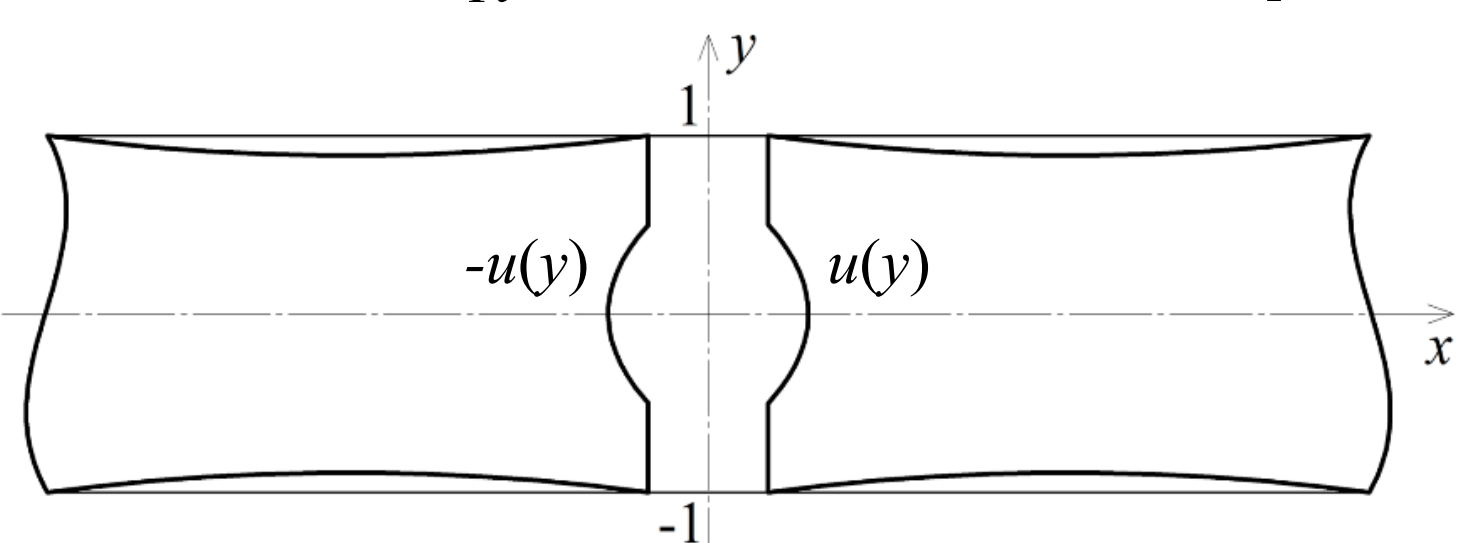


Рис. 3. Модель создания остаточных напряжений в бесконечной полосе.

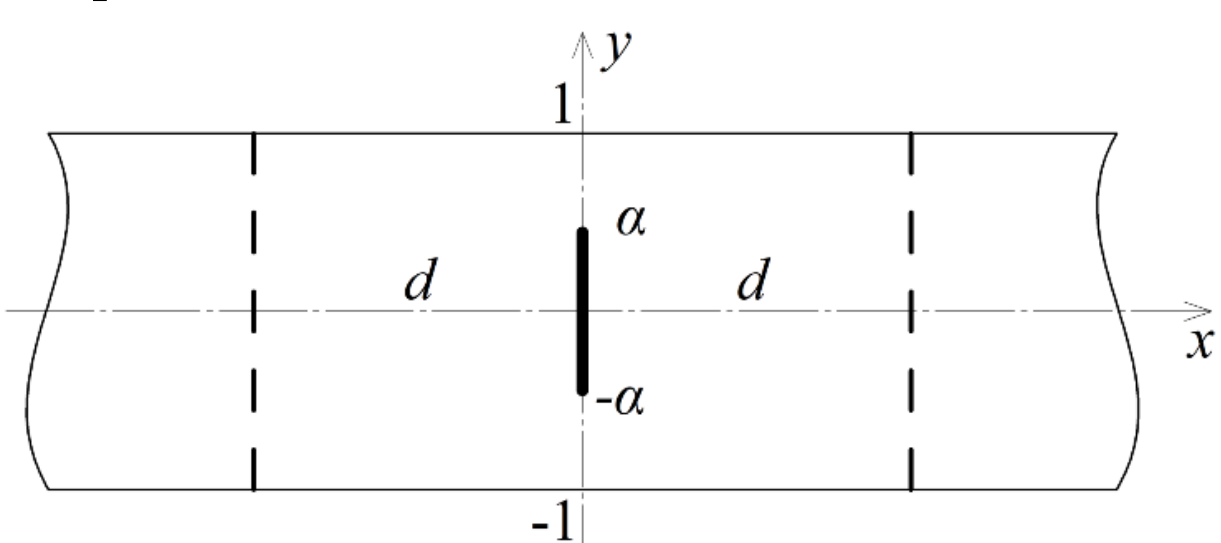


Рис. 4. Прямоугольник, вырезаемый из полосы с остаточными напряжениями.

## Результаты

Предполагается, что образование новых свободных поверхностей  $\{x = \pm d, |y| \leq 1\}$  приводит к полному сбросу остаточных напряжений в бесконечной полосе так, что при этом вдоль оси  $y$  образуется разрыв, совпадающий с формой торцов полуполос, соединяемых в бесконечную полосу, стороны которого описываются формулой  $u(y) = \begin{cases} K\sqrt{y^2 - \alpha^2}, & |y| \leq \alpha, \\ 0, & \alpha < |y| \leq 1. \end{cases}$

Приведены формулы для продольных и поперечных перемещений в полуполосе  $\Pi^+$  ( $\text{Re } \lambda_k < 0$ ):

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \text{Re} \left( u_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right) \frac{\text{Im}(-\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{\text{Im } \lambda_k}, \quad V(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \text{Re} \left( \frac{u_k \chi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right) \frac{\text{Im}(-\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{\text{Im } \lambda_k},$$

$$\xi(\lambda_k, y) = \left( \frac{1-\nu}{2} \sin \lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \cos \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y,$$

$$\chi(\lambda_k, y) = \left( \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k + \sin \lambda_k \right) \sin \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y,$$

$$u_k = \int_{-1}^1 u(y) u_k(y) dy = \frac{\pi \alpha J_1(\alpha \lambda_k) K}{(1+\nu) \sin \lambda_k}, \quad u_k(y) = \frac{1}{1+\nu} \left\{ \frac{\lambda_k \cos \lambda_k y}{\sin \lambda_k} - [\delta(y-1) + \delta(y+1)] \right\}.$$

Обозначения:  $\nu$  – коэффициент Пуассона; числа  $\lambda_k$  – множество четверок  $\{\pm \lambda_k, \pm \bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$  всех комплексных нулей целой функции экспоненциального типа  $L(\lambda) = \lambda + \sin \lambda \cos \lambda$ ;  $U(x, y)$  и  $V(x, y)$  – умноженные на модуль сдвига  $G$  продольное и поперечное перемещения соответственно, которые возникают при сбросе остаточных напряжений с образованием разрыва  $2u(y)$  на стыке полуполос. Числа  $u_k$  – коэффициенты Лагранжа. Функции  $u_k(y)$  – финитные части биортогональных функций. Числа  $M_k = L'(\lambda_k)/2 = \cos^2 \lambda_k$  – нормирующие множители.

Были приняты следующие значения параметров:  $d = 0.5$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\nu = 1/3$ ,  $K = 0.05$ .  $K$  – коэффициент, равный отношению длин малой и большой осей трещины. На рис. 5а–5г представлены графики, иллюстрирующие решения для полосы и прямоугольника.

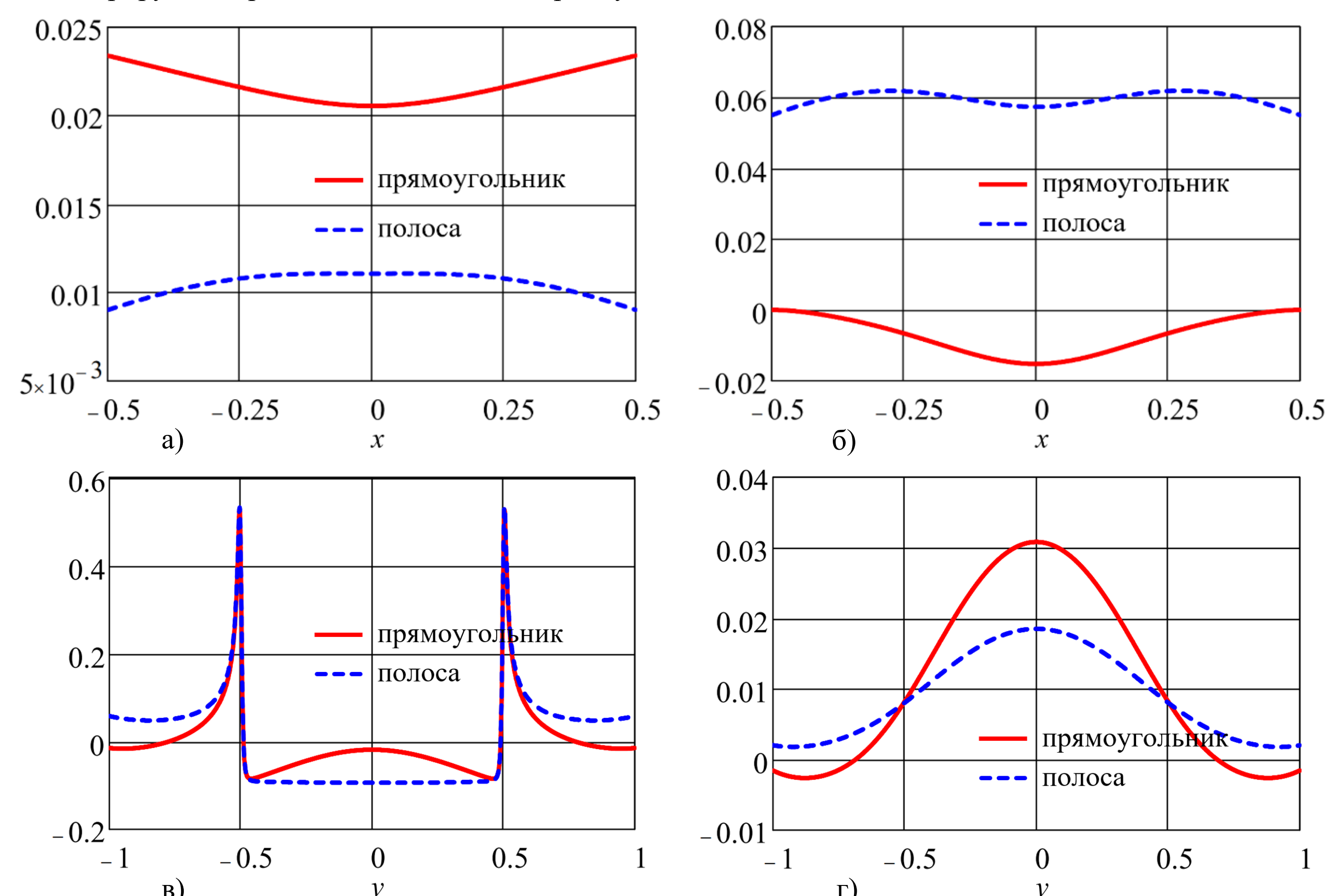


Рис. 5. а) Вид горизонтальных сторон полуполос до соединения их в полосу и вид горизонтальных сторон прямоугольников после образования разрыва и сброса остаточных напряжений. б) Напряжения  $\sigma_x(x, \pm 1)$  до (пунктир) и после сброса остаточных напряжений. в) Сбрасываемые нормальные напряжения  $\sigma_x(0.01, y)$  в полосе и прямоугольнике. г) Распределение продольных перемещений в прямоугольнике и полосе в сечении  $x = d$ , возникающих при сбросе остаточных напряжений.

## Выводы

1. Поперечные перемещения  $V(x, 1)$  горизонтальных сторон полосы и нормальные напряжения  $\sigma_x(x, \pm 1)$  после сброса остаточных напряжений весьма существенно (в 2-3 раза) отличаются от первоначальных.
2. Если в результате сброса остаточных напряжений образуются два прямоугольника, то правый и левый прямоугольники смещаются относительно друг друга в противоположных направлениях как абсолютно жесткие. Величина этого перемещения определяется из решения задачи. В том случае, когда задача не является четно- или нечетно-симметричной, прямоугольники смещаются относительно друг друга также и в вертикальном направлении. Кроме того, они могут поворачиваться. Численные значения жестких перемещений определяются из решения задачи.
3. После образования разрыва фрагменты области невозможно состыковать без зазоров.

## Список литературы

1. Айтматов И.Т., Тажибаев К.Т., Казакбаева Г.О. Исследование остаточных напряжений в горных породах на основе поляризационно-оптического метода моделирования // Вестник КРСУ. Геомеханика. 2006. Т. 6. № 7. С. 13–18.
2. Мороз А.И. Самонапряженное состояние горных пород. М.: Изд-во Московского государственного горного университета, 2004. 288 с.
3. Тажибаев К.Т. Напряжения, процессы деформации и динамического разрушения горных пород : в 2 т. Бишкек: Алтын Принт, 2016.
4. Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P., Yu G. A boundary value problem in the theory of elasticity for a rectangle: exact solutions // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2020. V. 71. Article 199. DOI:10.1007/s00033-020-01425-2