Об ослаблении нелинейности в адвективных членах у пространственно-аналитических пространственно-периодических решений уравнений магнитогидродинамики

В. Железовский

Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН

E-mail: vlad@mitp.ru

Проект финансируется РНФ, грант № 22-17-00114

Уравнения магнитогидродинамики

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{V} \times \mathrm{rot}\, \mathbf{V} - \mathbf{B} \times \mathrm{rot}\, \mathbf{B} - \nabla P \quad \textbf{(уравнение Навье–Стокса)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{B} + \mathrm{rot}\,(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad \textbf{(уравнение магнитной индукции)}$$

$$\mathrm{div}\, \mathbf{V} = \mathrm{div}\, \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{V}\big|_{t=0} = \mathbf{V}^{(\mathrm{init})}, \qquad \mathbf{B}\big|_{t=0} = \mathbf{B}^{(\mathrm{init})}$$

$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ скорость течения, $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ магнитное поле, $P(\mathbf{x}, t)$ давление
$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ (эйлеровы) пространственные координаты, t время
ν коэффициент вязкости, η коэффициент магнитной диффузии

Уравнения заданы на торе $\mathbb{T}^3 = [0, 2\pi]^3$, т.е. $\mathbf{V}$, $\mathbf{B}$ и P пространственно-периодичны

Ослабление (“depletion” = “расщепление”) нелинейности

1. $D_q = \left((L^2/\nu) \left\langle |\mathrm{rot}\mathbf{V}|^q \right\rangle^{1/q} \right)^{q/(2q-3)}$ монотонно растут с q. Donzis D.A., Gibbon J.D., Gupta A., Kerr R.M., Pandit R., Vincenzi D. Vorticity moments in four numerical simulations of the 3D Navier–Stokes equations. J. Fluid Mech., **732**, 316–331 (2013);
Gibbon J.D., Donzis D.A., Gupta A., Kerr R.M., Pandit R., Vincenzi D. Regimes of nonlinear depletion and regularity in the 3D Navier–Stokes equations. Nonlinearity, **27**, 2605–2625 (2014)

2. МГД турбулентность: степень ослабления нелинейности даже выше (изучено поведение аналогичных величин $D^{\pm}_m$ для роторов переменных Эльзассера $\mathbf{V} \pm \mathbf{B}$). Gibbon J.D., Gupta A., Krstulovic G., Pandit R., Politano H., Ponty Y., Pouquet A., Sahoo G., Stawarz J. Depletion of nonlinearity in magnetohydrodynamic turbulence: Insights from analysis and simulations. Phys. Rev. E, **93**, 043104 (2016)

3. В случайном гауссовом (турбулентном) соленоидальном потоке потенциальная часть поля вектора Лэмба $\mathbf{V} \times \mathrm{rot}\mathbf{V}$ может вдвое превосходить соленоидальную. Tsinober A. On one property of Lamb vector in isotropic turbulent flow. Phys. Fluids A: Fluid Dynamics, **2**, 484–486 (1990)

4. Прямые численные оценки ослабления нелинейности в двумерной затухающей турбулентности. Pushkarev A.V., Bos W.J.T. Depletion of nonlinearity in two-dimensional turbulence. Phys. Fluids, **26**, 115102 (2014).

5. Бельтрамизация течений (приближенно $\mathbf{V} \,||\, \mathrm{rot}\mathbf{V}$).
Frisch U. Turbulence: The legacy of A.N. Kolmogorov. CUP, 1995

6. Уменьшение размерности течения (самоорганизация в структуры типа квазиодномерных жгутов в областях повышенной завихренности). ibid.

7. Тенденция в областях больших градиентов $\mathbf{V}$ и $\mathbf{B}$ стать параллельными. Matthaeus W.H., Pouquet A., Mininni P.D., Dmitruk P., Breech B. Rapid alignment of velocity and magnetic field in magnetohydrodynamic turbulence. Phys. Rev. Lett., **100**, 085003 (2008); Servidio S., Matthaeus W.H., Dmitruk P. Depression of nonlinearity in decaying isotropic MHD turbulence. Phys. Rev. Lett., **100**, 095005 (2008).

7a. Динамо Арконтиса (ABC-сила без косинусов): $\mathbf{V} \approx \mathbf{B}$. Dorch S.B.F., Archontis V. On the saturation of astrophysical dynamos: Numerical experiments with the no-cosines flow. Solar Phys., **224**, 171–178 (2004); Cameron R., Galloway D. Saturation properties of the Archontis dynamo. Mon. Not. R. Astron. Soc., **365**, 735–746 (2006); Galloway D. ABC flows then and now. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., **106**, 450–467 (2012)

Преобразование пространственно-аналитических решений

$$\mathbf{V} = \sum_{\mathbf{n}\neq 0} \widehat{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}, \qquad \mathbf{B} = \sum_{\mathbf{n}\neq 0} \widehat{\mathbf{B}}_{\mathbf{n}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}$$

$$\widehat{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}} = \widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}} \mathrm{e}^{-\Gamma|\mathbf{n}|}, \quad \widehat{\mathbf{B}}_{\mathbf{n}} = \widetilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}} \mathrm{e}^{-\Gamma|\mathbf{n}|} \quad (\Gamma > 0 \text{ не зависит от } \mathbf{n})$$

$$\widetilde{\mathbf{v}} = \sum_{\mathbf{n}\neq 0} \widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}, \quad \widetilde{\mathbf{b}} = \sum_{\mathbf{n}\neq 0} \widetilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}}(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}$$

$\mathscr{P}_{\mathbf{n}}$ – оператор проектирования вектора на плоскость $\perp \mathbf{n}$.

$$\mathbf{c} \times \mathrm{rot}\, \mathbf{c} = -(\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{c} + \frac{1}{2}\nabla|\mathbf{c}|^2;$$

$$\mathrm{div}\, \mathbf{c} = \mathrm{div}\, \mathbf{d} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rot}\, (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{d}\cdot\nabla)\mathbf{c} - (\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{d}$$

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}}{\mathrm{d}t}+\nu|\mathbf{n}|^2\widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}-|\mathbf{n}|\widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}=\mathrm{i}\sum_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{\Gamma(|\mathbf{n}|-|\mathbf{k}|-|\mathbf{n}-\mathbf{k}|)}\mathscr{P}_{\mathbf{n}}\Big((\widetilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{n})\widetilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}-\mathbf{k}}-(\widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{n})\widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}-\mathbf{k}}\Big)$$

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}}}{\mathrm{d}t}+\eta|\mathbf{n}|^2\widetilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}}-|\mathbf{n}|\widetilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}}\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}=\mathrm{i}\sum_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{\Gamma(|\mathbf{n}|-|\mathbf{k}|-|\mathbf{n}-\mathbf{k}|)}\Big((\widetilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{n})\widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}-\mathbf{k}}-(\widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{n})\widetilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}-\mathbf{k}}\Big)$$

Foias C., Temam R. Gevrey class regularity for the solutions of the Navier–Stokes equations. J. Funct. Anal., **87**, 359–369 (1989) ($\Gamma=t$);

Levermore C.D., Oliver M. Analyticity of solutions for a generalized Euler equation. J. Diff. Equations, 133, 321–339 (1997);

Zheligovsky V. A priori bounds for Gevrey–Sobolev norms of space-periodic three-dimensional solutions to equations of hydrodynamic type. Adv. in diff. equations, 16, 955–976 (2011);

Zheligovsky V. Space analyticity and bounds for derivatives of solutions to the evolutionary equations of diffusive magnetohydrodynamics. *Mathematics*, **9**, 2021, 1789

$\Big(\Gamma=\delta\phi;\quad \Phi=(1+\|\widetilde{\mathbf{v}}\|^2_{3/2}+\|\widetilde{\mathbf{b}}\|^2_{3/2})^{-1/2};\quad \delta>0$ – константа $\Big)$.

$\Rightarrow$ Нелинейные члены пропорциональны $\mathrm{e}^{\Gamma(|\mathbf{n}|-|\mathbf{k}|-|\mathbf{n}-\mathbf{k}|)}(\mathbf{c}_{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{n})\mathbf{d}_{\mathbf{n}-\mathbf{k}}$ $\Big(\mathbf{c}_{\mathbf{k}}$ и $\mathbf{d}_{\mathbf{n}-\mathbf{k}}$ – “метапеременные” со “значениями” $\widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}},\widetilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}}$ и $\widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}-\mathbf{k}},\widetilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}-\mathbf{k}}$, соответственно$\Big)$.

Потеря половины производной

$$\operatorname{div}\mathbf{c}=0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{c}_{\mathbf{k}}\perp\mathbf{k} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{c}_{\mathbf{k}}=(\mathbf{k}\times(\mathbf{c}_{\mathbf{k}}\times\mathbf{k}))/|\mathbf{k}|^2,$$

$$\Rightarrow\quad |(\mathbf{c}_{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{n})|\exp\big(\Gamma(|\mathbf{n}|-|\mathbf{n}-\mathbf{k}|-|\mathbf{k}|)\big)\le\varphi(\theta)|\mathbf{c}_{\mathbf{k}}||\mathbf{n}|,$$

где $\varphi(\theta)=|\sin\theta|\exp\big(\Gamma(|\mathbf{n}|-|\mathbf{n}-\mathbf{k}|-|\mathbf{k}|)\big),\quad \theta$ – угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{k}$.

Найдем $\max_\theta\varphi(\theta)$.

$\varphi(\theta)$ недифференцируема, когда $\sin\theta=0$, но тогда $\varphi(\theta)=0$ – это минимум φ.

$\Rightarrow\quad \theta=\theta_{\max}$ точка максимума φ, только если $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\theta=0$, т.е.

$$-\sin^2\theta_{\max}\,\Gamma|\mathbf{n}||\mathbf{k}|/|\mathbf{n}-\mathbf{k}|\Big|_{\theta=\theta_{\max}}+\cos\theta_{\max}=0$$

(использована теорема косинуса: $|\mathbf{n}-\mathbf{k}|=\sqrt{|\mathbf{n}|^2+|\mathbf{k}|^2-2|\mathbf{n}||\mathbf{k}|\cos\theta}$).

$$\Rightarrow\quad \sin^2\theta_{\max}\,\Gamma|\mathbf{n}||\mathbf{k}|=\cos\theta_{\max}|\mathbf{n}-\mathbf{k}|\Big|_{\theta=\theta_{\max}}\le|\mathbf{n}|+|\mathbf{k}|$$

(поскольку $\cos\theta\ge0$, то верно и более сильное неравенство $|\mathbf{n}-\mathbf{k}||_{\theta=\theta_{\max}}\le\sqrt{|\mathbf{n}|^{\mathbf{2}}+|\mathbf{k}|^{\mathbf{2}}}.$).

По неравенству треугольника показатель экспоненты в $\varphi(\theta)$ отрицателен $\Rightarrow$ экспонента не превышает 1.

$$\Rightarrow \quad \varphi(\theta) \le |\varphi(\theta_{\max})| \le |\sin\theta_{\max}| \le \sqrt{\frac{|\mathbf{n}|+|\mathbf{k}|}{\Gamma|\mathbf{n}||\mathbf{k}|}}$$

$$\Rightarrow \quad |(\mathbf{c_k}\cdot\mathbf{n})\mathscr{P}_{\mathbf{n}}\mathbf{d_{n-k}}|\mathrm{e}^{\Gamma(|\mathbf{n}|-|\mathbf{n-k}|-|\mathbf{k}|)} \le \frac{|\mathbf{c_k}||\mathbf{d_{n-k}}|}{\sqrt{\Gamma}}\Big(\sqrt{|\mathbf{n}|}+|\mathbf{k}|/\sqrt{|\mathbf{n}|}\Big).$$

Q.E.D.

Вклад $\mathbf{c_k}$ и $\mathbf{d_{n-k}}$ в адвективные нелинейные члены в производных $\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}/\mathrm{d}t$ и $\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}}/\mathrm{d}t$ растет не как линейная функция $|\mathbf{n}|$, а как функция $|\mathbf{n}|$ и $|\mathbf{k}|$ степени $1/2$.

Однако вклад Γ может, наоборот, приводить к росту этого слагаемого!

Следствия

На какие времена можно гарантировать существование гладкого решения (для простоты) гидродинамической задачи ($\mathbf{B}=0$) в $\mathbb{T}^3=[0,2\pi]^3$?

i. Стандартная оценка (аналог оценки Foias & Temam, 1989). $\Gamma=\nu t/2$.

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}}{\mathrm{d}t}+\nu|\mathbf{n}|^2\widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}-\frac{\nu|\mathbf{n}|}{2}\widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}=-\mathrm{i}\sum_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{\Gamma(|\mathbf{n}|-|\mathbf{k}|-|\mathbf{n}-\mathbf{k}|)}(\widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{n})\mathscr{P}_{\mathbf{n}}\widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}-\mathbf{k}} \qquad (*)$$

Скалярно домножаем на $|\mathbf{n}|^2\widetilde{\mathbf{v}}_{-\mathbf{n}}$, суммируем:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\widetilde{\mathbf{v}}\|_1^2+\nu\|\widetilde{\mathbf{v}}\|_2^2-\frac{\nu}{2}\|\widetilde{\mathbf{v}}\|_{3/2}^2\le C\|\widetilde{\mathbf{v}}\|_1\|\widetilde{\mathbf{v}}|_{3/2}\|\widetilde{\mathbf{v}}\|_2\le\frac{\nu}{4}\|\widetilde{\mathbf{v}}\|_2^2+C_1\nu^{-3}\|\widetilde{\mathbf{v}}\|_1^6$$

Здесь C,C_1 – абсолютные константы. Обозначим $y=\|\widetilde{\mathbf{v}}\|_1^2$.

$$\Rightarrow\quad \mathrm{d}y/\mathrm{d}t\le C_1\nu^{-3}y^3,\quad\Rightarrow\quad y\le\Big(y(0)^{-2}-2C_1\nu^{-3}t\Big)^{-1/2}$$

$\Rightarrow$ оценка существует до $T_*=\nu^3/(2C_1\|\widetilde{\mathbf{v}}(0)\|_1^4)$.

ii. Новая оценка. $\Gamma = \nu(t+\tau)/2$, где $\tau > 0$ – константа.
Уравнение (*) скалярно домножаем на $|\mathbf{n}|\widetilde{\mathbf{v}}_{-\mathbf{n}}$, суммируем:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\widetilde{\mathbf{v}}\|_{1/2}^2 + \nu\|\widetilde{\mathbf{v}}\|_{3/2}^2 - \frac{\nu}{2}\|\widetilde{\mathbf{v}}\|_1^2 &\le 2C\|\widetilde{\mathbf{v}}\|_{1/2}\|\widetilde{\mathbf{v}}\|_1\|\widetilde{\mathbf{v}}\|_{3/2}(\nu(t+\tau)/2)^{-1/2} \\
&\le \left(\|\widetilde{\mathbf{v}}\|_{3/2}(\nu/3)^{1/2}\right)^{3/2} \cdot 2 \cdot 3^{3/4} C \nu^{-5/4}((t+\tau)/2)^{-1/2}\|\widetilde{\mathbf{v}}\|_{1/2}^{3/2} \\
&\le \frac{\nu}{4}\|\widetilde{\mathbf{v}}\|_{3/2}^2 + C_2\nu^{-5}(t+\tau)^{-2}\|\widetilde{\mathbf{v}}\|_{1/2}^6
\end{aligned}$$

Здесь C_2 – абсолютная константа. Обозначим $y = \|\widetilde{\mathbf{v}}\|_{1/2}^2$.

$$\Rightarrow \quad y^{-3}\mathrm{d}y/\mathrm{d}t \le C_2\nu^{-5}(t+\tau)^{-2} \quad \Rightarrow \quad y \le \left(y(0)^{-2} + 2C_2\nu^{-5}\left(\frac{1}{t+\tau} - \frac{1}{\tau}\right)\right)^{-1/2}$$

$\Rightarrow$ оценка существует до $T_{**} = \dfrac{\tau^2}{2C_2\nu^{-5}\|\widetilde{\mathbf{v}}(0)\|_{1/2}^4 - \tau}$.

Выводы

• Предъявлен новый механизм ослабления нелинейности у пространственно-аналитических пространственно-периодических решений уравнений магнитогидродинамики.

• Он может быть использован для построения оценок для решений, но дает качественно похожий результат – оценки существуют только конечное время.

• “Any proposed positive solution to the regularity problem which does not use the finer structure of the nonlinearity [in the Navier–Stokes equation - VZ] cannot possibly be successful.”

Tao T. Finite time blowup for an averaged three-dimensional Navier–Stokes equation. J. Amer. Math. Soc. 29, 601–674 (2016)

Тонкая структура была использована:

i. Соленоидальность (она также определяет отличие от поведения решений уравнения Бюргерса);

ii. Представление нелинейных членов в виде сумм выражений $(\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{d}$ (что не соответствует структуре уравнения-контрпримера Т.Тао);

iii. Предположение о пространственной аналитичности решений (выполнено для почти всех времен).

Благодарю за внимание