# НОВЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ФИЗИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА

О.М.Подвигина

*Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН*

E-mail: olgap@mitp.ru

Работа поддержана грантом РНФ № 22-17-00114
https://rscf.ru/project/22-17-00114/

## МЕТОД ГАЛЕРКИНА

для эволюционного уравнения $\dot{v} = F(v)$

с граничными условиями $B(v) = q$ и начальным условием $v_0$:

**Уравнение решено методом Галеркина**,

если для заданного набора функций

$$\{u_1, ..., u_N\}, \quad B(u_j) = q,\ 1 \leq j \leq N,$$

найдены

$$\{c_1(t), ..., c_N(t)\}, \quad c_j : [0, T] \to \mathbb{R}(\text{ or } \mathbb{C}),$$

такие, что для

$$v(t) = \sum_{j=1}^{N} c_j(t) u_j$$

выполнено

$$v(0) = v_0 \text{ и } \left(\dot{v}(t) - F(v(t)), u_j\right) = 0, \quad 1 \leq j \leq N,\ 0 \leq t \leq T$$

# ТРАДИЦИОННЫЙ МЕТОД ГАЛЕРКИНА:

$\mathcal{X}$ - Гильбертово пространство, $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ - базис в $\mathcal{X}$, оператор $\mathcal{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, элемент $f \in \mathcal{X}$ и $N > 0$.

Задача $\mathcal{A}u = f$ решена методом Галеркина, если найдены

$$\{c_1, c_2, ..., c_N\}$$

такие, что для

$$u = \sum_{j=1}^{N} c_j \phi_j$$

выполнено

$$\Big((\mathcal{A}u - f), \phi_j\Big) = 0 \text{ для любого } 1 \leq j \leq N.$$

## ДРУГАЯ ФОРМУЛИРОВКА:

Обозначим

$$U = < \phi_1, \phi_2, ..., \phi_N >$$

$$P_U : \mathcal{X} \to U - \text{ ортогональное проектирование на } U$$

Задача

$$\mathcal{A}u = f$$

решена методом Галеркина, если найдено

$$u \in U$$

такое, что

$$P_U(\mathcal{A}u - f) = 0$$

# НОВЫЙ АЛГОРИТМ:

Пусть $\mathcal{A}$ линейный оператор и существует подпространство

$$W \supset U, \quad \dim W < \infty$$

такое, что задача

$$P_U(\mathcal{A}w - f) = 0, \quad w \in W$$

решается более просто, чем

$$P_U(\mathcal{A}u - f) = 0, \quad u \in U$$

## Алгоритм состоит из предварительного шага и двух основных шагов

### Предварительный шаг:

Находим $h_j \in W$ и $s_j \in W$, где
$h_1, ..., h_K$ - ортонормированный базис в $U^{\perp}$, $W = U \oplus U^{\perp}$
$s_1, ..., s_K$ - решения задачи $P_U \mathcal{A} s = 0$ где $s \in W$
при этом $s_j = h_j + \tilde{h}_j$, $\tilde{h}_j \in U$

### Основные шаги:

1. Решение задачи $P_U(\mathcal{A}w - f) = 0$, $w \in W$.

2. Вычисление коррекции $q \in W$,

$$q = \sum_{j=1}^{K} \Big( w, h_j \Big) s_j.$$

Из выбора $h_j$ и $s_j$ следует

$$w - q \in U \text{ и } P_U(\mathcal{A}(w - q) - f) = 0.$$

## ПРИМЕР 1:

$\mathcal{X}$ - пространство гладких функций на $[-1, 1]$

$T_j$ - полиномы Чебышева

$W =< T_0, ..., T_{N+1} >$, $U =< \phi_1, ..., \phi_N >$, где

$\phi_j = T_{j+1} - T_0$ ($j$ - нечетное), $\phi_j = T_{j+1} - T_1$ ($j$ - четное)

Задача: для данного $f \in \mathcal{X}$, $f = \sum_{j=1}^{L} f_j T_j$, хотим найти $u = P_U f$.

Традиционный алгоритм:

Вычисляем матрицу $A_{ij} = \Big(\phi_j, \phi_i\Big)$ и правую часть $y_j = \Big(f, \phi_i\Big)$, и решаем

$$Ac = y$$

Новый алгоритм:

$U^{\perp}$ состоит из $d_1 = (1/2, 0, 1, 0, 1, ..., 1, 0)$ и $d_2 = (0, 1, 0, 1, 0, ..., 0, 1)$,

$h_1 = d_1/|d_1|$ и $h_2 = d_2/|d_2|$

$$u = \sum_{j=1}^{N+1} f_j T_j - \Big(f, h_1\Big) h_1 - \Big(f, h_2\Big) h_2$$

## ПРИМЕР 2:

$\mathcal{X}$ - пространство гладких функций на $[-1,1]$
$T_j$ - полиномы Чебышева
$W =< T_0, ..., T_{N+1} >$, $U =< \phi_1, ..., \phi_N >$, где
$\phi_j = T_{j+1} - T_0$ ($j$ - нечетное), $\phi_j = T_{j+1} - T_1$ ($j$ - четное)

Задача: решить $P_U(Au - f) = 0$,
где $Au = \lambda u'' + u$, $f \in \mathcal{X}$, $f = \sum_{j=1}^{L} f_j T_j$.

Традиционный алгоритм:

Вычисляем матрицу $A_{ij} = \Big(\lambda \phi_j'' + \phi_j, \phi_i\Big)$ и

правую часть $y_j = \Big(f, \phi_i\Big)$, и решаем

$$Ac = y$$

## Новый алгоритм:

Шаг 0. Находим $s_1$ и $s_2$ такие, что $P_U \mathcal{A} s_{1,2} = 0$, $s_{1,2} \in W$, и запишем $s_j = h_j + \tilde{h}_j$, $\tilde{h}_j \in U$.

Шаг 1. Запишем

$$\text{решение: } w = \sum_{j=0}^{N+1} \hat{w}_j T_j, \quad \text{уравнение: } \sum_{j=0}^{N+1} \hat{w}_j (\lambda T_j'' + T_j) = \sum_{j=0}^{N+1} f_j T_j$$

Используем формулу

$$2T_k = \frac{1}{2(k+1)(k+2)} T_{k+2}'' - \frac{1}{(k-1)(k+1)} T_k'' + \frac{1}{2(k-1)(k-2)} T_{k-2}''$$

Для $j = N+1, N$: $\hat{w}_j = f_j$

Для $j = N-1, N_2$: $\hat{w}_j = f_j - 4\lambda j(j-1) f_{j+2}$

.....................................

Шаг 2. Вычисляем коррекцию

$$\Big(w, h_1\Big), \ \Big(w, h_2\Big) \text{ и } q = \Big(w, h_1\Big) s_1 + \Big(w, h_2\Big) s_2$$

## Генерация магнитного поля конвективными течениями в плоском горизонтальном слое вращающемся относительно наклонной оси

### Уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + P\tau \mathbf{v} \times \mathbf{e}_{\mathrm{r}} + P\Delta \mathbf{v} + PR\theta \mathbf{e}_z - \nabla p - \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{b}),$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{b}) + \frac{1}{P_m}\Delta \mathbf{b},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla)\theta + v_z + \Delta\theta,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{b} = 0$$

$\mathbf{v}$ - скорость жидкости, $\mathbf{b}$ - магнитное поле, $\theta$ - температура

$P$, $Ta$ и $R$ - числа Прандтля, Тейлора и Рэлея, $\tau = Ta^{1/2}$, $P_m$ - магнитное число Прандтля, $\mathbf{e}_{\mathrm{r}}$ - единичный вектор вдоль оси вращения

## Граничные условия

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{at } z = \pm 1$$

$$\mathbf{b} = \nabla h, \quad \nabla^2 h = 0 \text{ for } x_3 \geq 1, \quad h \to \infty \text{ for } x_3 \to \infty,$$
$$\frac{\partial b_1}{\partial x_3}\Big|_{x_3=-1} = \frac{\partial b_2}{\partial x_3}\Big|_{x_3=-1} = b_3\big|_{x_3=-1} = 0.$$

Периодичность в горизонтальных направлениях

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(x_1 + n_1 L_1, x_2 + n_2 L_2, x_3),$$
$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(x_1 + n_1 L_1, x_2 + n_2 L_2, x_3),$$
$$\theta(\mathbf{x}) = \theta(x_1 + n_1 L_1, x_2 + n_2 L_2, x_3).$$

## Численное интегрирование уравнения теплопроводности

Метод Эйлера (дискретизация по времени)

$$\theta(t_{m+1}) = \theta(t_m) + \delta t f(t_m), \quad f(t_m) = -(\mathbf{v}\cdot\nabla)\theta + v_3 + \Delta\theta$$

Метод Галеркина (дискретизация по пространству)

$$\theta(\mathbf{x},t) = \sum_{-N_1\le n_1\le N_1, -N_2\le n_2\le N_2} \Theta_{n_1,n_2}(x_3,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n_1x_1+n_2x_2)}$$

$$\Theta_{n_1,n_2}(x_3,t) = \sum_{0\le n_1\le N_3+1} \hat{\theta}_{\mathbf{n}}(t)T_{n_3}(x_3), \quad \Theta_{n_1,n_2}(\pm1,t) = 0$$

Запишем

$$f(t_m) = \sum_{-K_1\le n_1\le K_1, -K_2\le n_2\le K_2} F_{n_1n_2}(x_3,t_m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n_1x_1+n_2x_2)}$$

## Численная схема

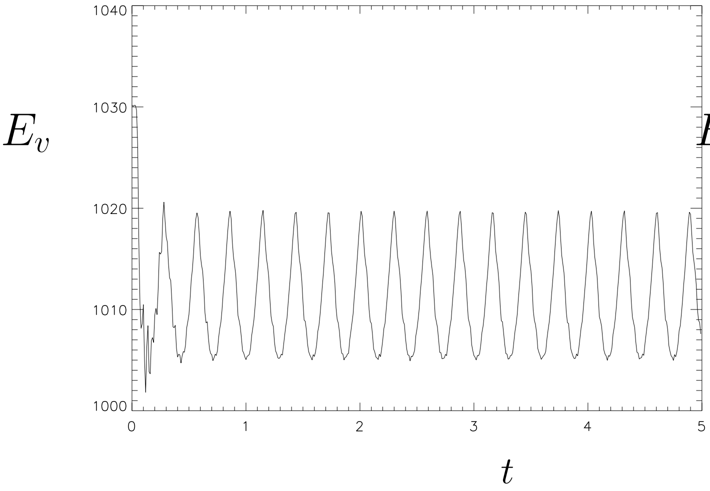
$$\Theta_{n_1,n_2}(x_3, t_{m+1}) = \Theta_{n_1,n_2}(x_3, t_m) + \delta t P_U(F_{n_1 n_2}(x_3, t_m))$$

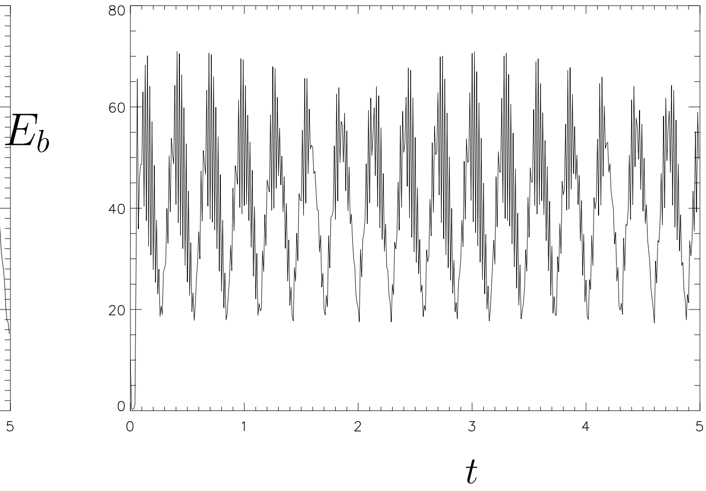
для всех $-N_1 \leq n_1 \leq N_1, \; -N_2 \leq n_2 \leq N_2$.

Здесь $U =< \phi_1, ..., \phi_N >$
$\phi_j = T_{j+1} - T_0$ ($j$ - нечетное), $\phi_j = T_{j+1} - T_1$ ($j$ - четное)

Задача вычисления $P_U(F_{n_1 n_2}(x_3, t_m))$ была решена в Примере 1

# Результаты расчетов




Параметры: $P = 1,\ R = 50000,\ \tau = 500,\ \mathrm{e_r} = (0, 1, 1),\ P_m = 2$

Интегрирование по времени - Рунге-Кутта 4 порядка
$\delta t = 10^{-4}$, разрешение по пространству - $32^2 \times 16$

# Полунеявная схема

Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -(\mathbf{v}\cdot\nabla)\theta + v_z + \Delta\theta,$$

Метод Эйлера

$$\theta(t_{m+1}) - \delta t\Delta\theta(t_{m+1}) = \theta(t_m) + \delta t f(\mathbf{v}(t_m), \theta(t_m)), \quad f(\mathbf{v},\theta) = -(\mathbf{v}\cdot\nabla)\theta + v_3$$

Температура представлена в виде

$$\theta(\mathbf{x},t) = \sum_{-N_1\le n_1\le N_1, -N_2\le n_2\le N_2} \Theta_{n_1 n_2}(x_3,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n_1x_1+n_2x_2)}$$

Для каждого слагаемого

$$\Delta\Theta_{n_1,n_2}(x_3,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n_1x_1+n_2x_2)} = -(n_1^2+n_2^2)\Theta_{n_1n_2}(x_3,t) + \Theta''_{n_1n_2}(x_3,t)$$

Полунеявная схема: для каждой пары $(n_1, n_2)$ решаем уравнение

$$P_U(\Theta_{n_1n_2}(t_{m+1})(1 + \delta t(n_1^2 + n_2^2)) + \delta t\Theta''_{n_1n_2}(t_{m+1})) =$$

$$P_U(\Theta_{n_1n_2}(t_m) + \delta t F_{n_1n_2}),\ \Theta_{n_1n_2}(t_{m+1}) \in U.$$

Обозначим $u = \Theta_{n_1n_2}(t_{m+1})$ и $f = \Theta_{n_1n_2}(t_m) + \delta t F_{n_1n_2}$.

Уравнение принимает вид

$$P_U(\alpha u + \beta u'' - f) = 0,\ u \in U$$

(и было решено в Примере 2)

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Для задач с физическими граничными условиями новый алгоритм метода Галеркина более эффективен, чем традиционный.

2. Может быть использован для решения любого эволюционного уравнения.

3. Может быть использован для решения задач методом Петрова-Галеркина.