

Оценка скорости роста палинстрофии
в двумерной идеальной гидродинамике:
опыт подхода
на основе вычислительного эксперимента

В. Желиговский

Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН

E-mail: vlad@mitp.ru



Уравнение Эйлера: $\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

- Течения на торе $\mathbb{T}^2 = [0, 2\pi]^2$ (2π -периодические по пространству).
- Двумерность: $\mathbf{v}(x_1, x_2) = (v_1, v_2, 0) \Rightarrow \boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{v} = (0, 0, \omega)$
- Эквивалентное уравнение для завихренности: $\partial \omega / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega = 0$
- Уравнение эволюции **палинстрофии** течения $\mathfrak{P} = \int_{\mathbb{T}^2} |\nabla \omega|^2 / 2 \, d\mathbf{x}$:

$$\frac{d\mathfrak{P}}{dt} = - \sum_{k,m} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_m} \, d\mathbf{x} \equiv \sigma / 2.$$

- $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \langle \mathbf{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = -\nabla \times (\Delta^{-1} \boldsymbol{\omega})$ (Δ – лапласиан.)

$$\Rightarrow \left| \frac{d\mathfrak{P}}{dt} \right| \leq 2 \max_{\mathbb{T}^2} \left| \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \right| \int_{\mathbb{T}^2} |\nabla \omega|^2 \, d\mathbf{x}$$

В $\partial \mathbf{v} / \partial x_m = \nabla \times (\Delta^{-1} \partial \boldsymbol{\omega} / \partial x_m)$ на $\boldsymbol{\omega}$ действует псевдодифференциальный оператор нулевого порядка.

- **Верно ли, что $|d\mathfrak{P}/dt| \leq c \mathfrak{P} \max_{\mathbb{T}^2} |\omega|$?**

- $D\omega/Dt \equiv \partial\omega/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\omega = 0$

$\Rightarrow \omega$ постоянна вдоль траектории любой жидкой частицы

$\Rightarrow \min \omega$ и $\max \omega$ сохраняются во времени.

Доказано: $d\mathfrak{P}/dt \leq c \mathfrak{P} \ln(e + \mathfrak{P}) \max_{\mathbb{T}^2} |\omega|$

$\Rightarrow$ по лемме Гронуолла $\mathfrak{P} \leq c \exp(c \exp(ct))$

[Bardos C., Benachour S., Zerner M. Analyticité des solutions périodiques de l'équation d'Euler en deux dimensions. C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, 282, 1976, 995–998;

Bardos C., Benachour S. Domaine d'analyticité des solutions de l'équation d'Euler dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Annali della Scuola Normale Superiore di Piza, Classe di Scienze 4^e série, 4 (4), 1977, 647–687.]

Желательно: $d\mathfrak{P}/dt \leq c \mathfrak{P} \max_{\mathbb{T}^2} |\omega(\mathbf{x}, t)| \ln^\epsilon(e + \mathfrak{P})$

для любого фиксированного c и $\epsilon < 1$.

При $\epsilon = 0$ из $d\mathfrak{P}/dt \leq c \mathfrak{P} \max_{\mathbb{T}^2} |\omega|$ по лемме Гронуолла

получили бы $\mathfrak{P} \leq c \exp(ct)$ – как в расчетах.

- Норма $\|\cdot\|_q$ в соболевском пространстве $H_q(\mathbb{T}^2)$:

$$\|g\|_q^2 = \sum_{\mathbf{n} \neq 0} |\widehat{g}_{\mathbf{n}}|^2 |\mathbf{n}|^{2q}, \quad \text{где } g = \sum_{\mathbf{n} \neq 0} \widehat{g}_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}$$

- $\mathfrak{P} = 2\pi^2 \|\omega\|_1^2$

- Верно ли $\sigma / (\|\omega\|_1^2 \max_{\mathbb{T}^2} |\omega|) \leq c$, где $\sigma \equiv -2 \sum_{k,m} \int \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_m} d\mathbf{x}$?

- $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \sigma = 2 \int_{\mathbb{T}^2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \left(\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right)^2 \right) - \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right) d\mathbf{x}$

- Слагаемые справа переходят друг в друга при повороте осей координат на $\pi/4$.

- $\omega(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{n} \neq 0} \widehat{\omega}_{\mathbf{n}}(t) e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} \quad (\widehat{\omega}_{\mathbf{n}} = \overline{\widehat{\omega}_{-\mathbf{n}}}) \Rightarrow \mathbf{v} = i \sum_{\mathbf{k} \neq 0} |\mathbf{k}|^{-2} \mathfrak{R}\mathbf{k} \widehat{\omega}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}},$

где $\mathfrak{R} : \mathbf{k} \mapsto (k_2, -k_1)$ – поворот по часовой стрелке на $\pi/2$

- $\mathfrak{R}\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{k} \cdot \mathfrak{R}\mathbf{n}$

- Уравнение Эйлера: $d\widehat{\omega}_{\mathbf{n}}/dt = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} |\mathbf{k}|^{-2} \mathfrak{R}\mathbf{k} \cdot (\mathbf{n} - \mathbf{k}) \widehat{\omega}_{\mathbf{k}} \widehat{\omega}_{\mathbf{n}-\mathbf{k}}$

Существенное сокращение в σ

i. $d\widehat{\omega}_{\mathbf{n}}/dt = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} |\mathbf{k}|^{-2} \Re \mathbf{k} \cdot (\mathbf{n} - \mathbf{k}) \widehat{\omega}_{\mathbf{k}} \widehat{\omega}_{\mathbf{n}-\mathbf{k}}$ УМНОЖИМ на $2|\mathbf{n}|^{2p} \widehat{\omega}_{-\mathbf{n}}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\|\omega\|_p^2}{dt} &= 2 \sum_{\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2+\mathbf{n}_3=0, \mathbf{n}_j \neq 0} (\Re \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_1) |\mathbf{n}_2|^{-2} |\mathbf{n}_3|^{2p} \widehat{\omega}_{\mathbf{n}_1} \widehat{\omega}_{\mathbf{n}_2} \widehat{\omega}_{\mathbf{n}_3} && (\mathbf{n}_2 \leftrightarrow \mathbf{n}_3) \\
 &= \sum_{\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2+\mathbf{n}_3=0, \mathbf{n}_j \neq 0} (\Re \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_1) (|\mathbf{n}_2|^{-2} |\mathbf{n}_3|^{2p} - |\mathbf{n}_3|^{-2} |\mathbf{n}_2|^{2p}) \widehat{\omega}_{\mathbf{n}_1} \widehat{\omega}_{\mathbf{n}_2} \widehat{\omega}_{\mathbf{n}_3} && (*) \\
 &= \sum_{\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2+\mathbf{n}_3=0, \mathbf{n}_j \neq 0} \frac{(\Re \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_1) \widehat{\omega}_{\mathbf{n}_1} \widehat{\omega}_{\mathbf{n}_2} \widehat{\omega}_{\mathbf{n}_3}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \det \begin{bmatrix} |\mathbf{n}_1|^{2p} & |\mathbf{n}_2|^{2p} & |\mathbf{n}_3|^{2p} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ |\mathbf{n}_1|^{-2} & |\mathbf{n}_2|^{-2} & |\mathbf{n}_3|^{-2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(*) – минор при α_1 ; $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 \rightarrow \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_1$ – при α_2 ; $\rightarrow \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ – при α_3 .

α_j – произвольные константы, не зависящие от $\mathbf{n}_j$. При $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$:

- $p = -1$: сохранение кинетической энергии течения $\|\mathbf{v}\|_0^2$,
- $p = 0$: нормы Лебега завихренности $\|\omega\|_0^2$ ($\Rightarrow$ энтрофии $\|\nabla \mathbf{v}\|_0^2$);
- $p = -2, -1/2$ и 1 : определитель сводится к определителю Вандермонда.

$$\sigma = \sum_{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3 = 0, \mathbf{n}_j \neq 0} (\mathbf{n}_2 \cdot \Re \mathbf{n}_1) \frac{(|\mathbf{n}_1|^2 - |\mathbf{n}_2|^2)(|\mathbf{n}_2|^2 - |\mathbf{n}_3|^2)(|\mathbf{n}_3|^2 - |\mathbf{n}_1|^2)}{3 |\mathbf{n}_1|^2 |\mathbf{n}_2|^2 |\mathbf{n}_3|^2} \widehat{\omega}_{\mathbf{n}_1} \widehat{\omega}_{\mathbf{n}_2} \widehat{\omega}_{\mathbf{n}_3}$$

Δ со сторонами $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ равнобедренный $\Rightarrow \widehat{\omega}_{\mathbf{n}_1} \widehat{\omega}_{\mathbf{n}_2} \widehat{\omega}_{\mathbf{n}_3}$ не входит в σ .

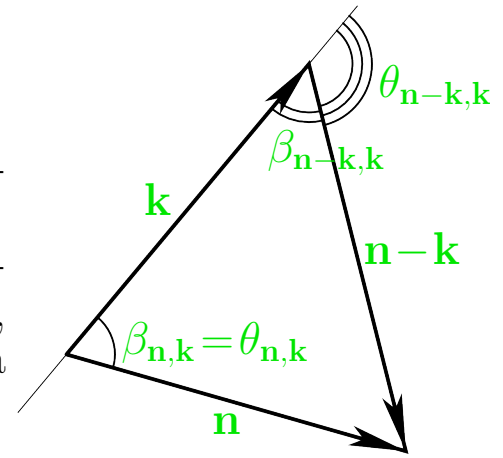
$$\begin{aligned} ii. \quad \sigma &= \sum_{0 \neq \mathbf{k} \neq \mathbf{n} \neq 0} |\mathbf{k}|^{-2} (\mathbf{n} \cdot \Re \mathbf{k}) (|\mathbf{n}|^2 - |\mathbf{n} - \mathbf{k}|^2) \widehat{\omega}_{\mathbf{k}} \widehat{\omega}_{\mathbf{n} - \mathbf{k}} \widehat{\omega}_{-\mathbf{n}} \\ &= 2 \sum_{0 \neq \mathbf{k} \neq \mathbf{n} \neq 0} |\mathbf{k}|^{-2} (\mathbf{n} \cdot \Re \mathbf{k}) ((\mathbf{n} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}) \widehat{\omega}_{\mathbf{k}} \widehat{\omega}_{\mathbf{n} - \mathbf{k}} \widehat{\omega}_{-\mathbf{n}} \\ &\quad \text{(Т.К. } \sum_{0 \neq \mathbf{k} \neq \mathbf{n} \neq 0} (\mathbf{n} \cdot \Re \mathbf{k}) \widehat{\omega}_{\mathbf{k}} \widehat{\omega}_{\mathbf{n} - \mathbf{k}} \widehat{\omega}_{-\mathbf{n}} = 0) \\ \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{k} - \mathbf{n} \quad &= 2 \sum_{0 \neq \mathbf{k} \neq \mathbf{n} \neq 0} |\mathbf{k}|^{-2} ((\mathbf{n} - \mathbf{k}) \cdot \Re \mathbf{k}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) \widehat{\omega}_{\mathbf{k}} \widehat{\omega}_{\mathbf{n} - \mathbf{k}} \widehat{\omega}_{-\mathbf{n}} \end{aligned}$$

Обозначим $\theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$ угол от $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$ против часовой стрелки.

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{0 \neq \mathbf{k} \neq \mathbf{n} \neq 0} |\mathbf{n}| |\mathbf{n} - \mathbf{k}| \left(\sin \theta_{\mathbf{n}, \mathbf{k}} \cos \theta_{\mathbf{n} - \mathbf{k}, \mathbf{k}} + \cos \theta_{\mathbf{n}, \mathbf{k}} \sin \theta_{\mathbf{n} - \mathbf{k}, \mathbf{k}} \right) \widehat{\omega}_{\mathbf{k}} \widehat{\omega}_{\mathbf{n} - \mathbf{k}} \widehat{\omega}_{-\mathbf{n}} \\ &= \sum_{0 \neq \mathbf{k} \neq \mathbf{n} \neq 0} |\mathbf{n}| |\mathbf{n} - \mathbf{k}| \sin (\theta_{\mathbf{n}, \mathbf{k}} + \theta_{\mathbf{n} - \mathbf{k}, \mathbf{k}}) \widehat{\omega}_{\mathbf{k}} \widehat{\omega}_{\mathbf{n} - \mathbf{k}} \widehat{\omega}_{-\mathbf{n}} \end{aligned}$$

$$\sigma = \sum_{0 \neq \mathbf{k} \neq \mathbf{n} \neq 0} |\mathbf{n}| |\mathbf{n} - \mathbf{k}| \sin(\beta_{\mathbf{n}-\mathbf{k}, \mathbf{k}} - \beta_{\mathbf{n}, \mathbf{k}}) \widehat{\omega}_{\mathbf{k}} \widehat{\omega}_{\mathbf{n}-\mathbf{k}} \widehat{\omega}_{-\mathbf{n}}$$

- Существенные сокращения в σ (в т.ч. не содержит "равнобедренные Δ волновых векторов").
- Каждое подпространство $\widehat{\omega}_{\mathbf{n}}$, отвечающее одномерному подпространству волновых векторов $\mathbf{n}$, входит в σ в виде линейного функционала (из-за множителя $\mathbf{n} \cdot \Re \mathbf{k}$).
- σ – квадратичная форма мнимых частей $\widehat{\omega}_{\mathbf{n}}$.



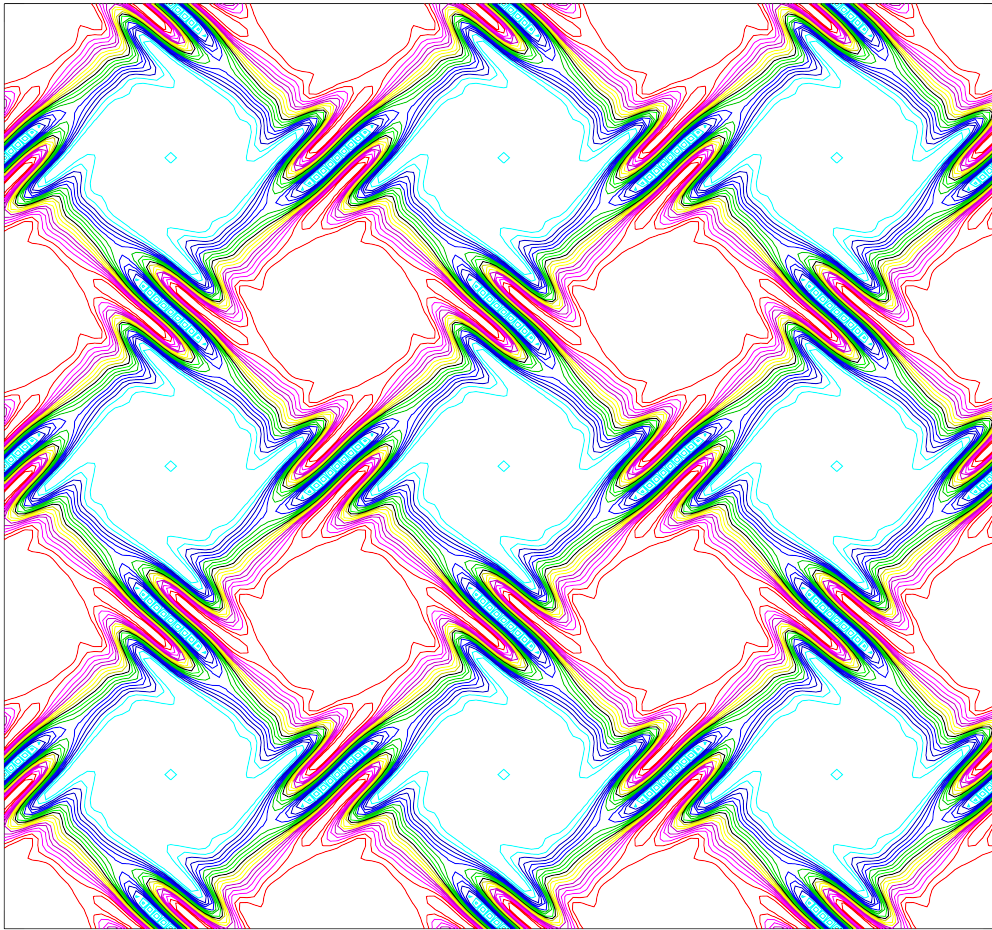
$\Rightarrow$ Не исключено выполнение неравенства $|\sigma| \leq c \|\omega\|_1^2 \max_{\mathbb{T}^2} |\omega|$ (*).

Численная проверка

Характер роста $C_p = \max_{\omega_p} (\sigma_p / (\|\omega_p\|_1^2 \max_{\mathbb{T}^2} |\omega_p|))$ для конечных рядов Фурье $\omega_p = \sum_{\mathbf{n} \neq 0, 0 \leq |n_j| \leq N_p} \widehat{\omega}_{\mathbf{n}} e^{i \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}$, $N_p = 2^p - 1$, $p \rightarrow \infty (= 10 \div 15)$ может указать на более правдоподобную модификацию (*) – **желательно**

$$\sigma \leq c \|\omega\|_1^2 \max_{\mathbb{T}^2} |\omega(\mathbf{x}, t)| \ln^\epsilon (e + \|\omega\|_1 / \max_{\mathbb{T}^2} |\omega(\mathbf{x}, t)|)$$

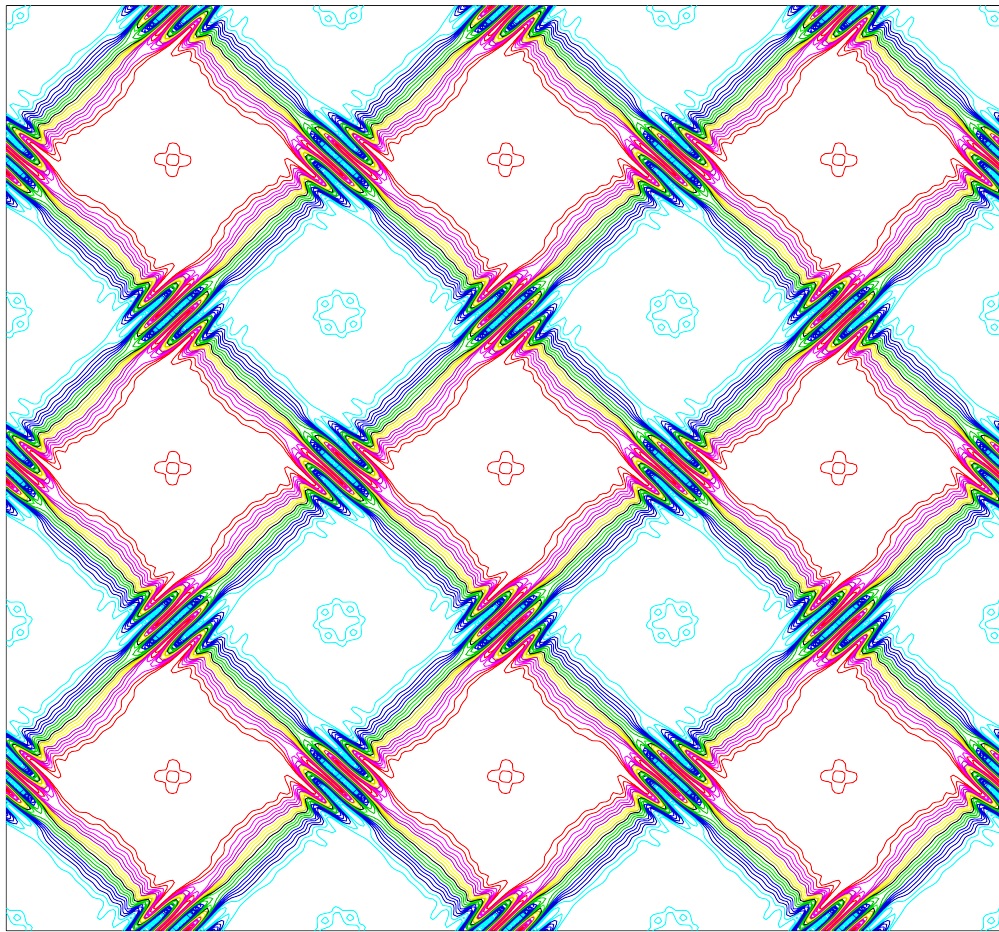
для любого фиксированного c и $\epsilon < 1$.



Изолинии $\omega_p = \sum_{\mathbf{n}} \hat{\omega}_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}$,
 где $|n_j| \leq 2^p - 1$, $p = 3$,
 $\max_{\mathbb{T}^2} |\omega_p| = 1$, реализующей
 $C_p = \max_{\omega_p} \sigma / \|\omega_p\|_1^2$.
 Вычислено $C_3 = 0.5112$.
 Показано 9 смежных
 ячеек периодичности.

● Цветовая кодировка
 изолиний:

- 0.9, -0.8 красный
- 0.7, -0.6 светлофиолетовый
- 0.5, -0.4 темнофиолетовый
- 0.3, -0.2 желтый
- 0.1 коричневый
- 0 черный
- 0.1 светлосиний
- 0.2, 0.3 темносиний
- 0.4, 0.5 светлосиний
- 0.6, 0.7 темносиний
- 0.8, 0.9 морской волны



Изолинии $\omega_p = \sum_{\mathbf{n}} \hat{\omega}_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}$,
где $|n_j| \leq 2^p - 1$, $p = 4$,
 $\max_{\mathbb{T}^2} |\omega_p| = 1$, реализующей
 $C_p = \max_{\omega_p} \sigma / \|\omega_p\|_1^2$.
Вычислено $C_4 = 0.7797$.
Показано 9 смежных
ячеек периодичности.

● Цветовая кодировка
изолиний:

- 0.9, -0.8 красный
- 0.7, -0.6 светлофиолетовый
- 0.5, -0.4 темнофиолетовый
- 0.3, -0.2 желтый
- 0.1 коричневый
- 0 черный
- 0.1 светлзеленый
- 0.2, 0.3 темнозеленый
- 0.4, 0.5 светлосиний
- 0.6, 0.7 темносиний
- 0.8, 0.9 морской волны

Инвариантность относительно поворотов вокруг глобального максимума

Перенесем начало координат $\mathbf{x} = 0$ в точку глобального максимума $|\omega(\mathbf{x})|$.

i. Центральная симметрия. Обозначим

$$A^2 = \sum_{\mathbf{n} \neq 0} |\operatorname{Re} \widehat{\omega}_{\mathbf{n}} \mathbf{n}|^2, \quad B^2 = \sum_{\mathbf{n} \neq 0} |\operatorname{Im} \widehat{\omega}_{\mathbf{n}} \mathbf{n}|^2 \quad \Rightarrow \quad \|\omega\|_1^2 = A^2 + B^2;$$

$$a_{\mathbf{n}} = \operatorname{Re} \widehat{\omega}_{\mathbf{n}} / A, \quad b_{\mathbf{n}} = \operatorname{Im} \widehat{\omega}_{\mathbf{n}} / B, \quad a(\mathbf{x}) = \sum a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}, \quad b(\mathbf{x}) = \sum i b_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}$$

(суммирование по $\mathbf{n} \neq 0$ с компонентами $0 \leq |n_j| \leq N_p$);

$$\sigma(a, b) = \sum_{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3 = 0, \mathbf{n}_j \neq 0} \mathbf{n}_2 \cdot \Re \mathbf{n}_1 \frac{(|\mathbf{n}_1|^2 - |\mathbf{n}_2|^2)(|\mathbf{n}_2|^2 - |\mathbf{n}_3|^2)(|\mathbf{n}_3|^2 - |\mathbf{n}_1|^2)}{3 |\mathbf{n}_1|^2 |\mathbf{n}_2|^2 |\mathbf{n}_3|^2} a_{\mathbf{n}_1} b_{\mathbf{n}_2} b_{\mathbf{n}_3},$$

$$C_p(\omega) = A |\omega(0)|^{-1} \widetilde{C}_p, \quad \widetilde{C}_p = (\sigma(a, a) A^2 - 3\sigma(a, b) B^2) (A^2 + B^2)^{-1}.$$

$a_{\mathbf{n}}$ и $b_{\mathbf{n}}$ не зависят от A и $B \Rightarrow A |\omega(0)|^{-1} = |\sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}|^{-1}$ не зависит от A и B .

$\widetilde{C}_p$ монотонно меняется от $\sigma(a, a)$ до $-3\sigma(a, b)$ при росте B/A от 0 до ∞ .

$\max_{A,B} \tilde{C}_p = \max(\sigma(a, a), -3\sigma(a, b))$, реализуемые при $B=0$ и $A=0$, соответственно. В первом случае глобальный $\max_{\mathbb{T}^2} |a(\mathbf{x})|$ остается в $\mathbf{x}=0$:

$$|a(\mathbf{x})| \leq \frac{|Aa(\mathbf{x}) + Bb(\mathbf{x})| + |Aa(\mathbf{x}) - Bb(\mathbf{x})|}{2A} = \frac{|\omega(\mathbf{x})| + |\omega(-\mathbf{x})|}{2A} \leq \frac{|\omega(0)|}{A} = |a(0)|,$$

$\Rightarrow C_p(\omega)$ не убывает при переходе от исходной $\omega(\mathbf{x})$ к центрально-симметричной $a(\mathbf{x})$. Во втором – только оценка, т.к. при $A=0$ (i) $C_p(\omega_p) = 0$, и (ii) $\mathbf{x}=0$ не есть точка глобального максимума $|\omega(\mathbf{x})|$, т.к. $b(0) = 0$.

ii. Симметрия относительно поворотов на $\pi/2$ для центрально-симметричной ω . Рассуждение аналогично. Обозначим

$$\omega_{\mathbf{n}}^+ = (\hat{\omega}_{\mathbf{n}} + \hat{\omega}_{\mathfrak{R}\mathbf{n}})/2, \quad \omega_{\mathfrak{R}\mathbf{n}}^+ = \omega_{\mathbf{n}}^+, \quad \omega_{\mathbf{n}}^- = (\hat{\omega}_{\mathbf{n}} - \hat{\omega}_{\mathfrak{R}\mathbf{n}})/2, \quad \omega_{\mathfrak{R}\mathbf{n}}^- = -\omega_{\mathbf{n}}^-,$$

$$A^2 = \sum |\omega_{\mathbf{n}}^+ \mathbf{n}|^2, \quad B^2 = \sum |\omega_{\mathbf{n}}^- \mathbf{n}|^2 \quad \Rightarrow \quad \|\omega_p\|_1^2 = A^2 + B^2;$$

$$a_{\mathbf{n}} = \omega_{\mathbf{n}}^+/A, \quad b_{\mathbf{n}} = \omega_{\mathbf{n}}^-/B, \quad a(\mathbf{x}) = \sum a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}, \quad b(\mathbf{x}) = \sum b_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}},$$

суммирование по $\mathbf{n} \neq 0$ с компонентами $0 \leq |n_j| \leq N_p$.

$a(\mathbf{x})$ инвариантна относительно поворотов на $\pi/2$, $b(\mathbf{x})$ антиинвариантна.

$$C_p(\omega_p) = A|\omega(0)|^{-1}\tilde{C}_p, \quad \tilde{C}_p = (\sigma(a, a)A^2 + 3\sigma(a, b)B^2)(A^2 + B^2)^{-1}.$$

$a_{\mathbf{n}}$ и $b_{\mathbf{n}}$ не зависят от A и $B \Rightarrow A|\omega(0)|^{-1} = |\sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}|^{-1}$ не зависит от A и B .

$\max_{A,B} \tilde{C}_p = \max(\sigma(a, a), 3\sigma(a, b))$, реализуемые при $B=0$ или $A=0$.

В первом случае глобальный $\max_{\mathbb{T}^2} |a(\mathbf{x})|$ остается в $\mathbf{x}=0$:

$$|a(\mathbf{x})| \leq \frac{|Aa(\mathbf{x}) + Bb(\mathbf{x})| + |Aa(\mathbf{x}) - Bb(\mathbf{x})|}{2A} = \frac{|\omega(\mathbf{x})| + |\omega(\Re \mathbf{x})|}{2A} \leq \frac{|\omega(0)|}{A} = |a(0)|,$$

$\Rightarrow C_p(\omega)$ не убывает при переходе от исходной $\omega(\mathbf{x})$ к $a(\mathbf{x})$, инвариантной относительно поворотов на $\pi/2$. Во втором – только оценка, т.к. при $A=0$

(i) $C_p(\omega_p) = 0$, и (ii) $\mathbf{x} = 0$ не есть точка глобального максимума $|\omega(\mathbf{x})|$, т.к. $b(0) = 0$.

Задачи

- Ускорить БПФ для функций, инвариантных относительно поворотов на $\pi/2$.
- Ускорить вычисления, используя структуру подынтегрального выражения

$$\sigma = 2 \int_{\mathbb{T}^2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \left(\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right)^2 \right) - \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right) d\mathbf{x}.$$

- Охарактеризовать конечные ряды Фурье ω_p , реализующие $\max_{\omega_p} C_p$:
 - i.* Они инвариантны относительно поворотов на $\pi/2$ вокруг одного из глобальных максимумов?
 - ii.* Они принимают обе величины $\pm \max_{\mathbb{T}^2} |\omega|$, причем каждое в нескольких точках?
 - iii.* Какие-то еще специальные свойства?
- Вычислить C_p для $p \rightarrow \infty = 15$.
- Доказать (или опровергнуть) желаемое неравенство для σ , используя специальную структуру этой суммы.

