

КАК ВЫБИРАТЬ ИНТЕРВАЛ МАГНИТУД ДЛЯ ОЦЕНКИ НАКЛОНА ГРАФИКА ПОВТОРЯЕМОСТИ

В.Ф. Писаренко, А.А. Скоркина, Т.А. Рукавишникова

23 ноября 2023

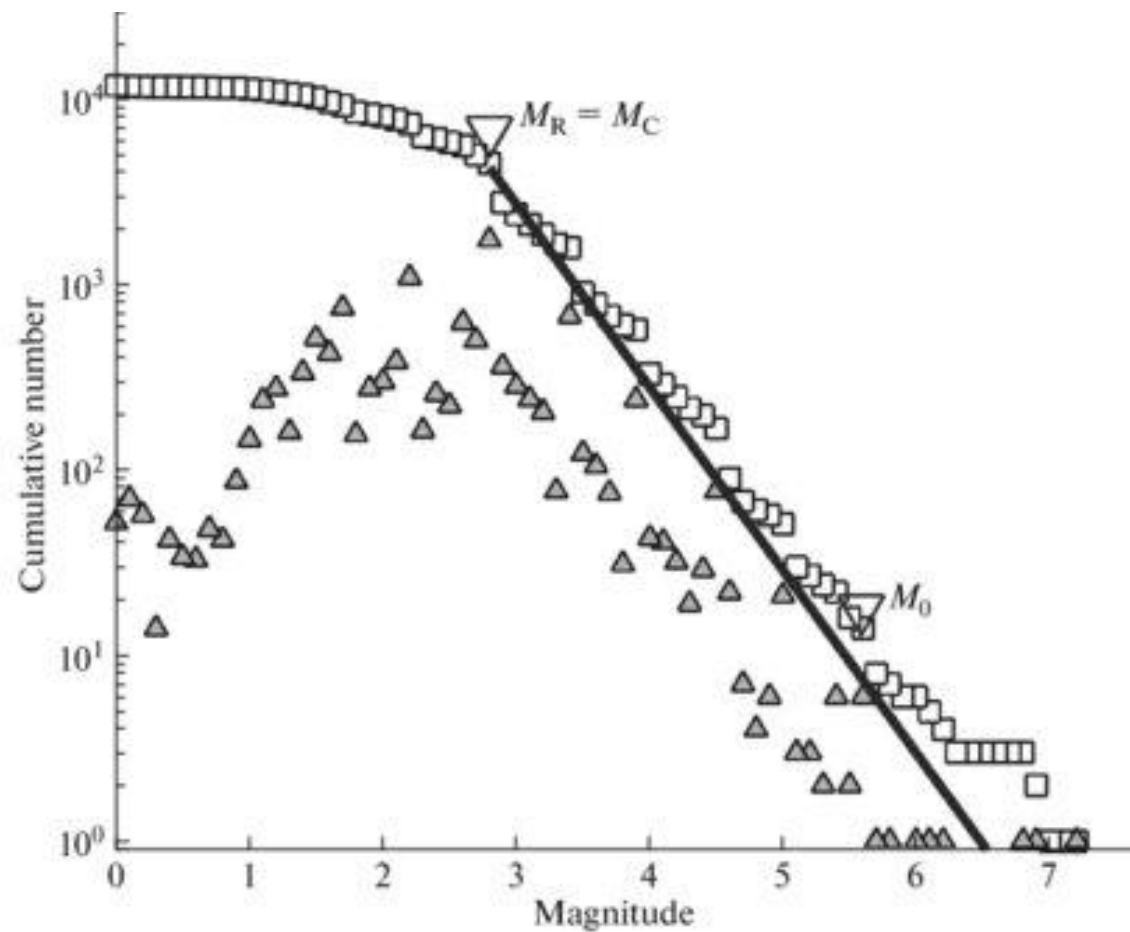
График повторяемости. Теория.

В области малых и средних магнитуд, общепринят **закон Гутенберга-Рихтера**, который после нормализации приводит к экспоненциальному распределению

$$F(m) = 1 - \exp(-b \cdot (m - m_0)), \quad m \geq m_0.$$

Это распределение дает прямолинейный график повторяемости **с наклоном b** для функции $\log(1 - F(m))$ и для логарифма плотности вероятности $\log(f(m))$

График повторяемости. Практика



[Гвишиани и др., 2018]

Усеченный закон Гутенберга-Рихтера

Мы предполагаем, что в интервале магнитуд $[m_0; m_1]$ справедлив усеченный закон Гутенберга-Рихтера:

- Функция распределения: $F(m | b, m_1, m_0) = \frac{1 - \exp(-b(m - m_0))}{1 - \exp(-b(m_1 - m_0))}$, $m_0 \leq m \leq m_1$,
- Плотность распределения: $f(m | b, m_1, m_0) = \frac{b \exp(-b(m - m_0))}{1 - \exp(-b(m_1 - m_0))}$, $m_0 \leq m \leq m_1$.

Оценка максимального правдоподобия (ОМП)

1. Для неограниченного закона Гутенберга-Рихтера (экспоненциальное распределение магнитуд) эффективной оценкой величины b является ОМП $\hat{b}$ ([Aki,1965] **для непрерывных распределений**):

$$\hat{b} = 1 / \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - m_0).$$

2. **Для дискретных распределений** с шагом дискретизации Δ в формулу предлагается вносить поправку ([Utsu 1966; Bender,1983; Taroni et al., 2021])

$$b_{\Delta} = 1 / \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - m_0 + \frac{\Delta}{2})$$

Оценка максимального правдоподобия (ОМП)

3. Мы предлагаем для дискретных распределений при оценивании параметра b использовать классическую ОМП для дискретного распределения [Cramer, 1946].

Логарифм функции правдоподобия имеет вид:

$$L(b | \bar{n}) = \sum_{j=1}^r n^{(j)} \log(p(j | b)),$$

где $p(j | b)$ – дискретные вероятности, r – количество дискретных интервалов

Также как и в непрерывном случае, ОМП для параметра b находится как значение, максимизирующее правдоподобие. **Обозначим эту оценку b_d .**

Разброс оценок b-value

Приведены стандартные отклонения (STD), смещения ($BIAS$) и среднеквадратичные отклонения ($Mean\ Square\ Error$, $MSE = \sqrt{STD^2 + BIAS^2}$) для синтетических каталогов.

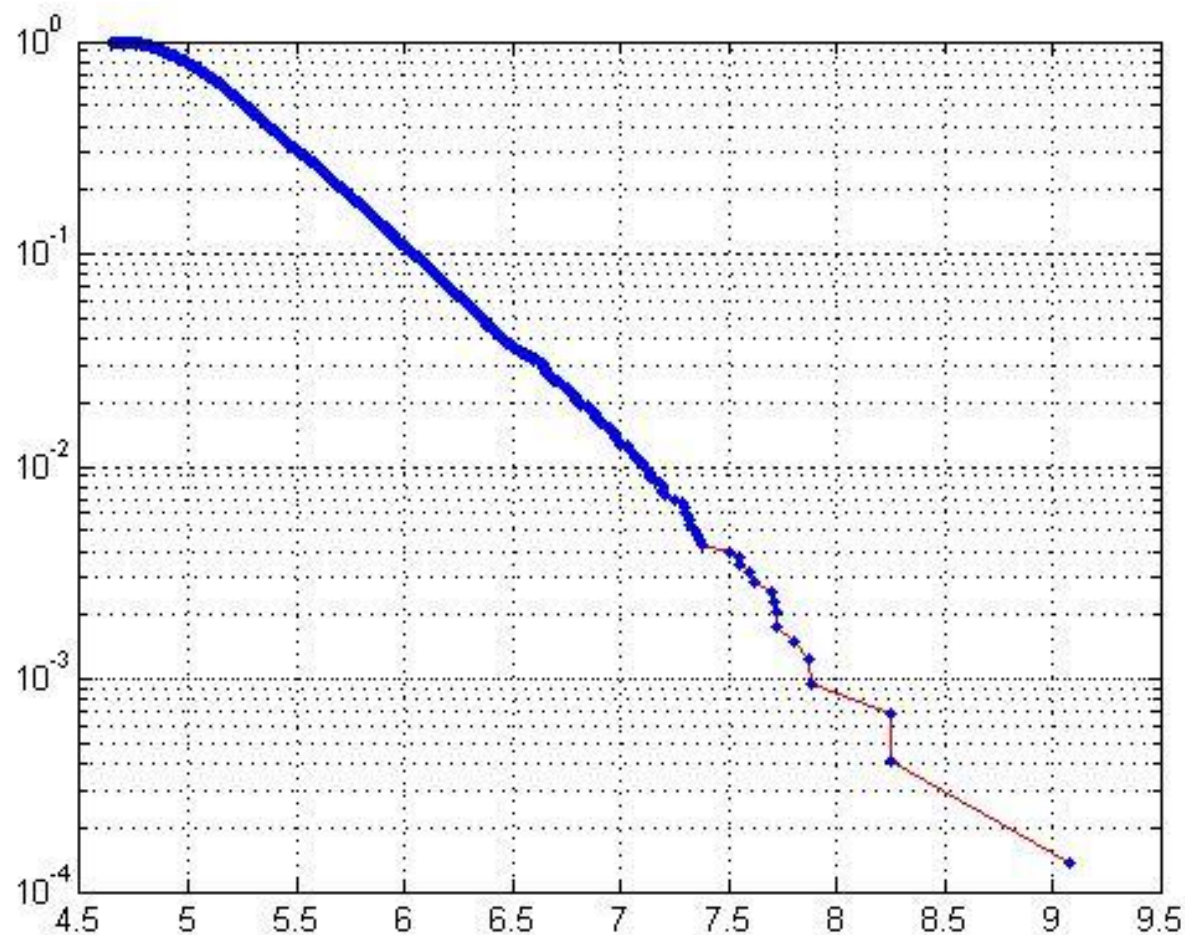
Объем выборки – $n = 300$; $m_0 = 6.0$; истинное значение параметра $\beta = 2.25$

	b_{Δ}	b_d	$\hat{b}$	b_{Δ}	b_d	$\hat{b}$
	$m_1 = 7.0$; $\Delta = 0.01$ магнитуды			$m_1 = 7.0$; $\Delta = 0.1$ магнитуды		
MSE	0.81	0.22	0.22	0.67	0.22	0.22
BIAS	0.80	0.0062	0.0062	0.65	0.0042	0.0042
STD	0.14	0.22	0.22	0.13	0.22	0.22
	$m_1 = 7.5$; $\Delta = 0.01$ магнитуды			$m_1 = 7.5$; $\Delta = 0.1$ магнитуды		
MSE	0.33	0.17	0.17	0.28	0.16	0.16
BIAS	0.30	0.0027	0.0027	0.25	0.0042	0.038
STD	0.13	0.17	0.17	0.13	0.16	0.16

График повторяемости

декластеризованного каталога GCMT

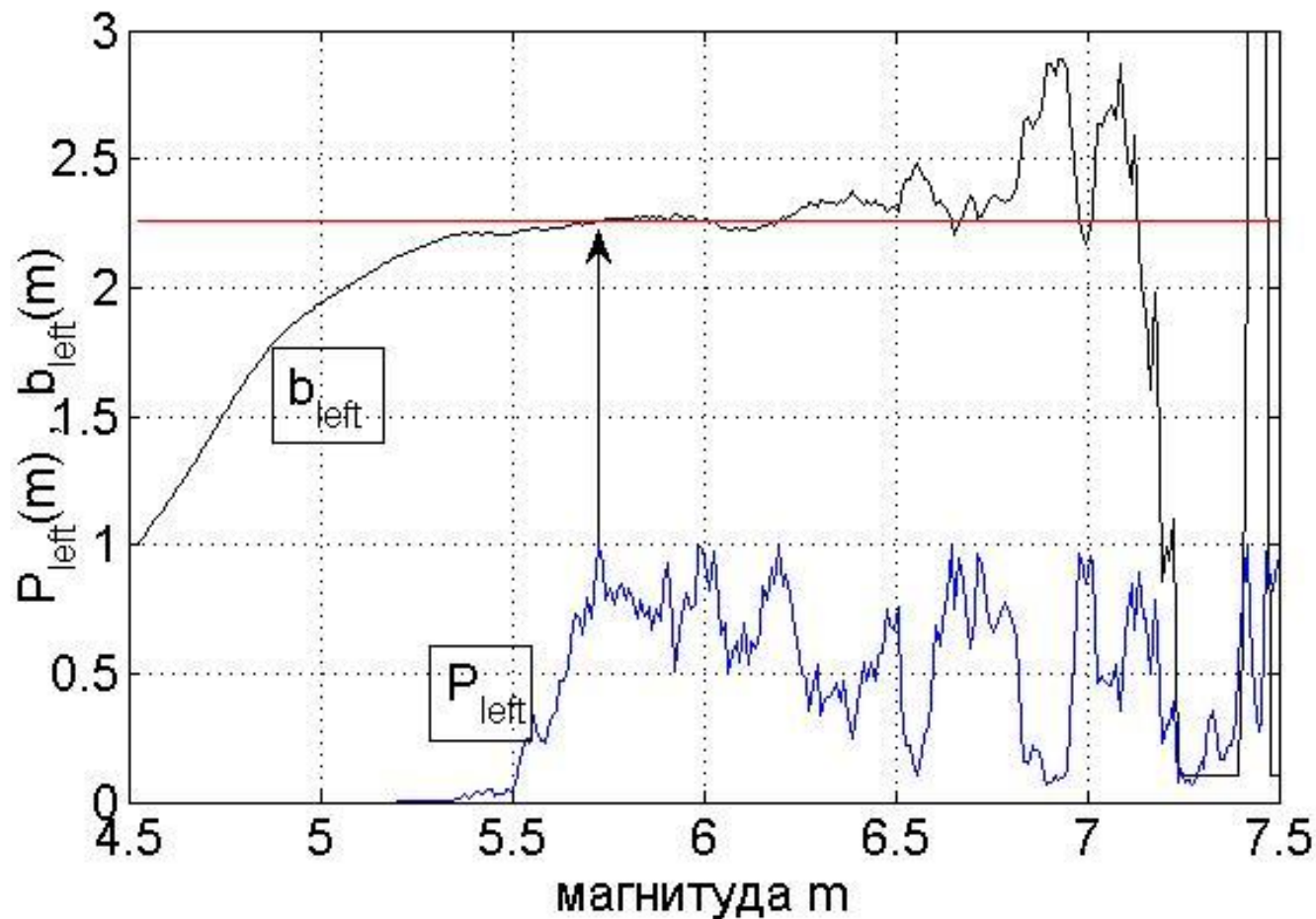
1976–2022 гг. ($n = 34511$, $m_{min}^{obs} = 4.30$, $m_{max}^{obs} = 9.08$)



Учитывая поведение
графика повторяемости,
выберем с запасом
предварительный интервал линейности
закона повторяемости $[\underline{m}; \bar{m}]$:
 $\underline{m} = 6.0$; $\bar{m} = 7.2$.

Оценку, полученную по данным на
интервале $[\underline{m}; \bar{m}]$,
обозначим $\beta_0 = 2.26$.

Определение левого конца интервала линейности закона повторяемости



Используя [Рао, 1965],

можно построить график функции

$$P_{\text{left}}(m)$$

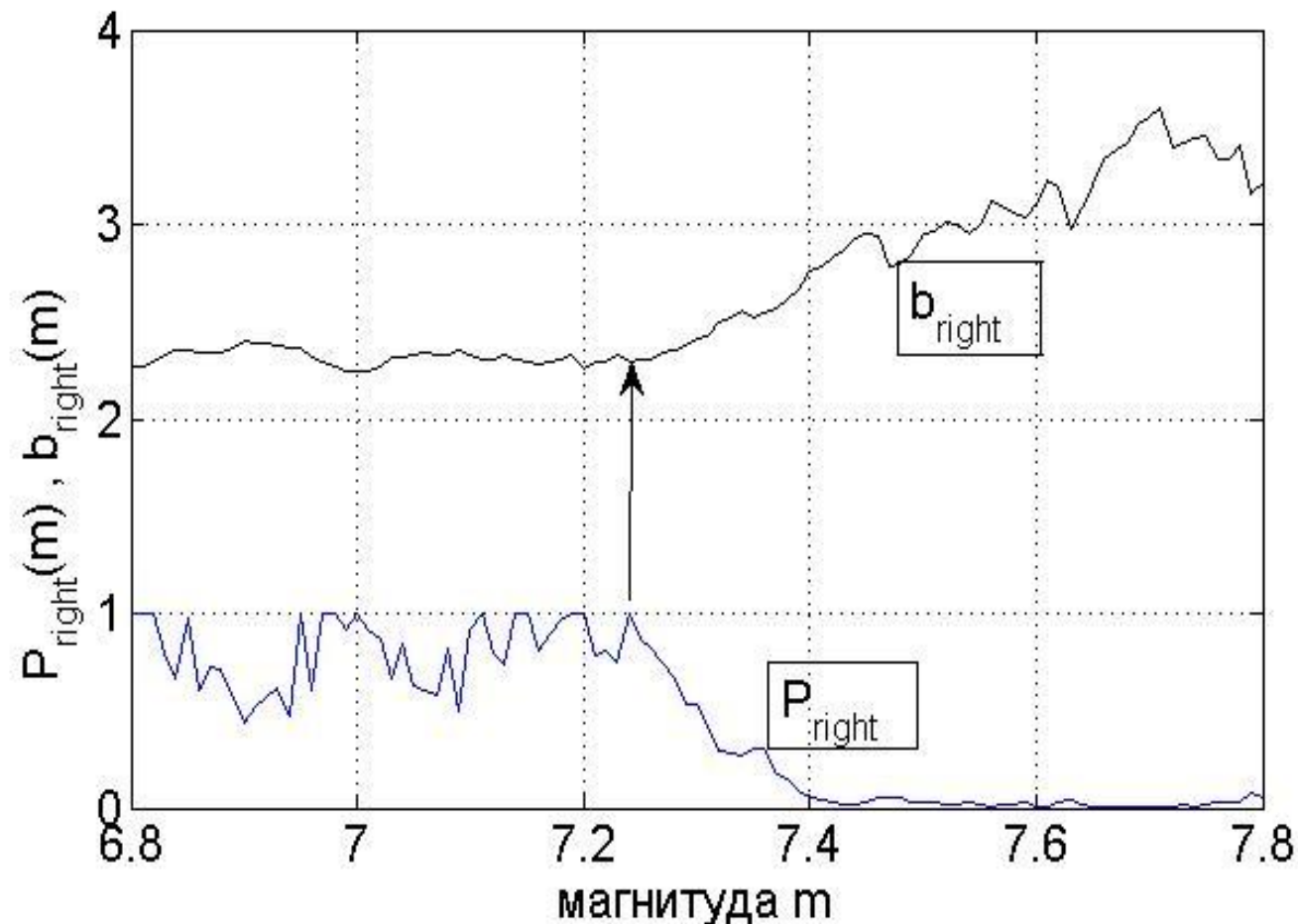
$$P_{\text{left}}(m) = 1 - \chi^2(R_{\text{left}}(m), 1),$$

позволяющей судить о том,
можно ли считать данное значение m
принадлежащим интервалу линейности
или нет

$$m_0 = 5.72$$

Графики оценки $\beta_{\text{left}}(m)$ и вероятности $P_{\text{left}}(m)$

Определение правого конца интервала линейности закона повторяемости



Используя [Пао, 1965],

можно построить график функции $P_{right}(m)$

$$P_{right}(m) = 1 - \chi^2(R_{right}(m), 1),$$

позволяющей судить о том, можно ли считать данное значение m принадлежащим интервалу линейности или нет

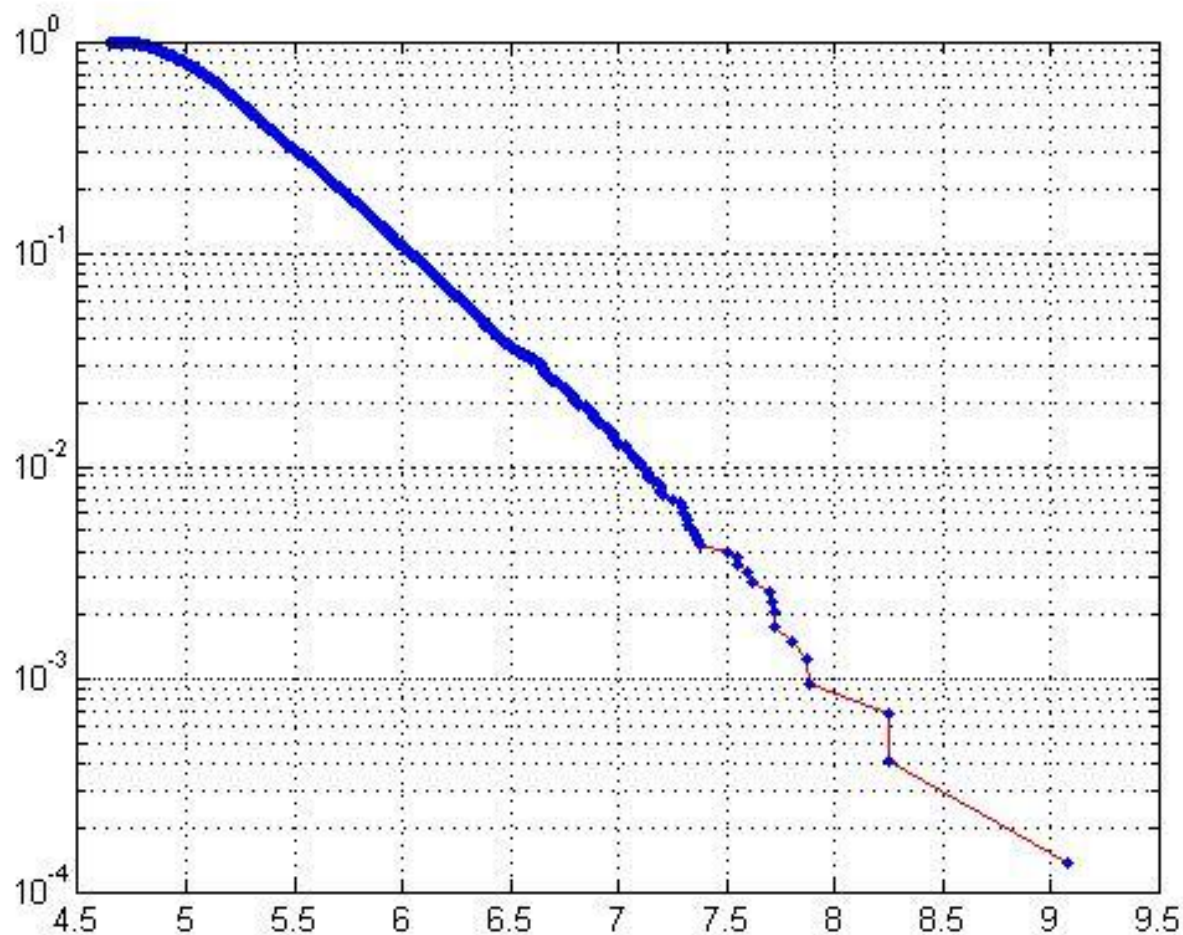
$$m_0 = 7.25$$

Графики оценки $\beta_{right}(m)$ и вероятности $P_{right}(m)$

График повторяемости

декластеризованного каталога GCMT

1976–2022 гг. ($n = 34511$, $m_{min}^{obs} = 4.30$, $m_{max}^{obs} = 9.08$)



Интервал линейности
закона повторяемости $[m; \bar{m}]$:
 $\underline{m} = 5.72$; $\bar{m} = 7.25$.

Оценка, полученная на интервале,
 $\beta_0 = 2.19$,
При этом
 $\beta = 2.19 \pm 0.03$ (по [Cramer, 1946])

ОМП на интервале $[4.9; 7.25]$,
позволяет получить
 $\beta_0 = 1.79$

Выводы

- Предложена статистически обоснованная процедура выбора интервала линейности для закона Гутенберга-Рихтера и оценивания параметра b на этом интервале (непрерывный и дискретный варианты). Как показывают примеры анализа каталогов, этот интервал $[m_0; m_1]$ заметно меньше всего интервала регистрации землетрясений.
- Включение в интервал оценки магнитуд $m < m_0$ приводит к занижению оценки b , а включение магнитуд $m > m_1$, как правило, к завышению (но возможны и случаи занижения для некоторых региональных каталогов). Следует отметить, что использование магнитуд в нижнем интервале $m_0 - a < m < m_0$ сказывается на оценке максимального правдоподобия сильнее, чем магнитуд в таком же по длине верхнем интервале $m_1 < m < m_1 + a$, так как оно сопровождается добавлением в правдоподобие гораздо большего количества наблюдений из-за экспоненциального убывания плотности. Поэтому для оценки параметра b точность оценки левого конца m_0 гораздо существенней точности оценки правого конца m_1 .
- Для каталогов с дискретными магнитудами вместо обычно используемых поправок на дискретность **при оценивании параметра b предлагается использовать классический метод максимального правдоподобия для дискретных распределений [Cramer, 1946]**. Показано, что для не слишком малых интервалов магнитуд этот метод дает меньшую среднеквадратичную ошибку. Кроме того, этот метод применим не только к равномерной дискретизации, но и к произвольным дискретным распределениям, энергетическим классам, агрегированным интервалам магнитуд и т.п.

Благодарю за внимание!

Писаренко, В.Ф., Скоркина А.А., Рукавишникова Т.А. Как выбирать интервал магнитуд для оценки наклона графика повторяемости // **Вулканология и Сейсмология**. 2023. № 2. С. 1-9.

(Pisarenko, V.F., Skorkina, A.A., Rukavishnikova, T.A. Choosing the magnitude range for estimating the b-value // Journal of Volcanology and Seismology. 2023. V. 17. № 2. P. 75-82).