Линейные возмущения блоховского типа пространственно-периодических магнитогидродинамических стационарных состояний

В. Желиговский, Р. Чертовских

Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики

Магнитный α-эффект "прочно вошел в нашу жизнь":

• используется для "объяснения" природных динамо, например, солнечного (но не геодинамо);
• обсуждаются его свойства, например, связь с кинетической спиральностью течения (ее нет);
• предполагается его затухание при большом магнитном числе Рейнольдса (т.н. α-quenching), что считается сложностью для объяснения природы астрофизических динамо;
• аналог в вычислительной математике – метод "симуляции больших вихрей" (LES);
• его (и не только магнитного) существование (как и вихревых магнитной диффузии и вязкости) доказано математически!

Линейная МГД устойчивость

Уравнения стационарного состояния $(\mathbf{V}(\mathbf{x}),\ \mathbf{B}(\mathbf{x}))$:

$$\begin{aligned} \nu\nabla^2\mathbf{V} + \mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V}) + (\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} - \nabla P + \mathbf{F} = 0,\\ \eta\nabla^2\mathbf{B} + \nabla\times(\mathbf{V}\times\mathbf{B}) + \mathbf{J} = 0,\\ \nabla\cdot\mathbf{V} = \nabla\cdot\mathbf{B} = 0. \end{aligned}$$

Уравнения возмущенного режима $(\mathbf{V}(\mathbf{x}) + \mathbf{V}'(\mathbf{x})\mathrm{e}^{\lambda t},\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}'(\mathbf{x})\mathrm{e}^{\lambda t},\ P(x) + P'(x)\mathrm{e}^{\lambda t})$ в линейном приближении:

$$\begin{aligned} \nu\nabla^2\mathbf{V}' + \mathbf{V}'\times(\nabla\times\mathbf{V}) + \mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V}') + (\nabla\times\mathbf{B}')\times\mathbf{B} + (\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}' - \nabla P' = \lambda\mathbf{V}',\\ \eta\nabla^2\mathbf{B}' + \nabla\times(\mathbf{V}'\times\mathbf{B} + \mathbf{V}\times\mathbf{B}') = \lambda\mathbf{B}',\\ \nabla\cdot\mathbf{V}' = \nabla\cdot\mathbf{B}' = 0. \end{aligned}$$

Оператор слева, действующий на $(\mathbf{V}'(\mathbf{x}), \mathbf{B}'(\mathbf{x}))$, обозначим $\mathscr{M}$.

~~The Serious Organised Crime Agency (SOCA) was a non-departmental public body of the Government of the United Kingdom which existed from 1 April 2006 until 7~~ ...

“Many calculations are based on the "second-order correlation approximation"(SOCA), sometimes also called "first-order smoothing approximation"(FOSA).”

• Rädler K.-H. Mean-field dynamo theory: early ideas and today’s problems. In: Magnetohydrodynamics. Historical evolution and trends. Eds. Molokov S., Moreau R., Moffatt K. Fluid mechanics and its applications, 80. Springer, 2007, 55–72.

• Steenbeck M., Krause F., Rädler K.-H. Berechnung der mittleren Lorentz-Feldstärke $\overline{\mathbf{v} \times \mathbf{b}}$ für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis–Kräfte beeinflußter Bewegung. Z. Naturforsch., 21a, 369–376, 1966. Engl. transl.: A calculation of the mean electromotive force in an electrically conducting fluid in turbulent motion, under the influence of Coriolis forces. In Roberts P.H., Stix M. The turbulent dynamo: A translation of a series of papers by F. Krause, K.-H. Rädler, and M. Steenbeck. Tech. Note NCAR-TN/IA-60, Boulder, Colorado, 1971, 29–47. http://nldr.library.ucar.edu/repository/assets/technotes/TECH-NOTE-000-000-000-045.pdf

• Krause F., Rädler K.-H. Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory. Academic-Verlag, Berlin, 1980.

α-эффект при значительном разделении масштабов: асимптотический подход

Магнитный α-эффект:

• Roberts G.O. Spatially periodic dynamos. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A266, 535–558 (1970).

• Roberts G.O. Dynamo action of fluid motions with two-dimensional periodicity. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A271, 411–454 (1972).

• Вишик М.М. Периодическое динамо. Математические методы в сейсмологии и геодинамике (Вычисл. сейсмология, вып. 19). М.: Наука, 1986, 186–215.

• Вишик М.М. Периодическое динамо. II. Численное моделирование и анализ геофизических процессов (Вычисл. сейсмология, вып. 20). М.: Наука, 1987, 12–22.

Анизотропный кинетический α-эффект (АКА-эффект):

• Dubrulle B., Frisch U. Eddy viscosity of parity-invariant flow. Phys. Rev. A, 43, 5355–5364 (1991).

Магнитогидродинамический комбинированный α-эффект:

• Желиговский В.А. О линейной устойчивости стационарных пространственно-периодических магнитогидродинамических систем к длиннопериодным возмущениям. *Физика Земли*, №5, 2003, 65-74.

• Zheligovsky V.A. Large-scale perturbations of magnetohydrodynamic regimes: linear and weakly nonlinear stability theory. Lecture Notes in Physics, vol. 829, Springer-Verlag, Heidelberg, 2011.

$\mathbf{x}$ – быстрая переменная (в $\mathbb{T}^3$), $\mathbf{X}=\varepsilon\mathbf{x}$ – медленная (в $\mathbb{R}^3$). Усреднение по $\mathbf{x}$: $\langle\cdot\rangle$.
Рассматриваем предел $\varepsilon\to 0$ (“разделение масштабов”).

$$\mathbf{V}'=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{V}'_n(\mathbf{x},\mathbf{X})\varepsilon^n,\qquad \mathbf{B}'=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{B}'_n(\mathbf{x},\mathbf{X})\varepsilon^n,\qquad P'=\sum_{n=0}^{\infty}P'_n(\mathbf{x},\mathbf{X})\varepsilon^n,\qquad \lambda=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\varepsilon^n$$

$$\Rightarrow\quad \mathscr{M}(\mathbf{V}'_n,\mathbf{B}'_n)=\mathbf{F}_n(\mathbf{V}'_{n-1},\mathbf{B}'_{n-1},\lambda_{n-1},P'_{n-1},...,\mathbf{V}'_0,\mathbf{B}'_0,\lambda_0,P'_0).$$

Соленоидальность:
$$\nabla_{\mathbf{X}}\cdot\langle\mathbf{V}'_n\rangle=0,\qquad \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{V}'_n+\nabla_{\mathbf{X}}\cdot\mathbf{V}'_{n-1}=0,$$
$$\nabla_{\mathbf{X}}\cdot\langle\mathbf{B}'_n\rangle=0,\qquad \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{B}'_n+\nabla_{\mathbf{X}}\cdot\mathbf{B}'_{n-1}=0$$

$\forall n\geq 0$ (считая $\mathbf{V}'_n=\mathbf{B}'_n=0$ при $n<0$).
$\nabla_{\mathbf{x}}$ обозначает градиент по быстрым переменным, $\nabla_{\mathbf{X}}$ – по медленным.
1. Уравнение при $n=0$: $\mathscr{M}(\mathbf{V}'_0,\mathbf{B}'_0)=\lambda_0(\mathbf{V}'_0,\mathbf{B}'_0)\ \Rightarrow\ \lambda_0=0.$
Ядро $\mathscr{M}$ (“нейтральные моды”) как минимум 6-мерно (обычно 6-мерно).
Если с.в. имеет ненулевое среднее по $\mathbb{T}^3$, то оно принадлежит ядру. Базис в $\ker\mathscr{M}$:

$$\mathbf{S}^{\mathbf{v}}_k(\mathbf{x})=(\mathbf{S}^{\mathbf{vv}}_k(\mathbf{x}),\mathbf{S}^{\mathbf{vb}}_k(\mathbf{x}),S^{\mathbf{v}p}_k(\mathbf{x}));\quad \mathbf{S}^{\mathbf{b}}_k(\mathbf{x})=(\mathbf{S}^{\mathbf{bv}}_k(\mathbf{x}),\mathbf{S}^{\mathbf{bb}}_k(\mathbf{x}),S^{\mathbf{b}p}_k(\mathbf{x})),\quad k=1,2,3,$$

$$\langle\mathbf{S}^{\mathbf{v}}_k\rangle=(\mathbf{e}_k,0,0),\qquad \left\langle\mathbf{S}^{\mathbf{b}}_k\right\rangle=(0,\mathbf{e}_k,0)\ \text{ для }\ 1\leq k\leq 3\quad\text{(нормализация)},$$

$\mathbf{S}^{\mathbf{vv}}_k,\mathbf{S}^{\mathbf{vb}}_k,\mathbf{S}^{\mathbf{bv}}_k,\mathbf{S}^{\mathbf{bb}}_k$ соленоидальны.

$$\Rightarrow\quad(\mathbf{V}'_0,\mathbf{B}'_0,P'_0)=\sum_{k=1}^{3}\big(\langle\mathbf{V}'_0\rangle_k\,\mathbf{S}^{\mathbf{v}}_k(\mathbf{x})+\langle\mathbf{B}'_0\rangle_k\,\mathbf{S}^{\mathbf{b}}_k(\mathbf{x})\big)$$

$\langle\cdot\rangle_k$ обозначает k-ую компоненту вектора, усредненного по $\mathbf{x}$.

Ядро $\mathscr{M}^*$ состоит из векторов-констант. $\Rightarrow$ $\langle \mathbf{f}^{\mathbf{v}} \rangle = \langle \mathbf{f}^{\mathbf{b}} \rangle = 0$ – необходимое и достаточное условие разрешимости $\mathscr{M}(\mathbf{v},\mathbf{b}) = (\mathbf{f}^{\mathbf{v}}, \mathbf{f}^{\mathbf{b}})$ (где все $\mathbf{f}^{\mathbf{v}}$, $\mathbf{f}^{\mathbf{b}}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{b}$ соленоидальны).

ii. Условие разрешимости уравнения при $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{3} \left(\mathbf{A}_k^{\mathbf{vv}} \nabla_{\mathbf{X}} \langle \mathbf{V}_0' \rangle_k + \mathbf{A}_k^{\mathbf{bv}} \nabla_{\mathbf{X}} \langle \mathbf{B}_0' \rangle_k \right) - \nabla_{\mathbf{X}} P_0^* = \lambda_1 \langle \mathbf{V}_0' \rangle,$$

$$\nabla_{\mathbf{X}} \times \sum_{k=1}^{3} \left(\mathbf{A}_k^{\mathbf{vb}} \langle \mathbf{V}_0' \rangle_k + \mathbf{A}_k^{\mathbf{bb}} \langle \mathbf{B}_0' \rangle_k \right) = \lambda_1 \langle \mathbf{B}_0' \rangle .$$

$\mathbf{A}_k^{\mathbf{vv}}$ и $\mathbf{A}_k^{\mathbf{bv}}$ – симметричные 3×3 матрицы

$$A_{k,j'j}^{\mathbf{vv}} = \left\langle -V_{j'} S_{k,j}^{\mathbf{vv}} - V_j S_{k,j'}^{\mathbf{vv}} + B_{j'} S_{k,j}^{\mathbf{vb}} + B_j S_{k,j'}^{\mathbf{vb}} \right\rangle,$$
$$A_{k,j'j}^{\mathbf{bv}} = \left\langle -V_{j'} S_{k,j}^{\mathbf{bv}} - V_j S_{k,j'}^{\mathbf{bv}} + B_{j'} S_{k,j}^{\mathbf{bb}} + B_j S_{k,j'}^{\mathbf{bb}} \right\rangle,$$

$\mathbf{A}_k^{\mathbf{vb}}$ и $\mathbf{A}_k^{\mathbf{bb}}$ – трехмерные векторы

$$\mathbf{A}_k^{\mathbf{vb}} = \left\langle \mathbf{V} \times \mathbf{S}_k^{\mathbf{vb}} - \mathbf{B} \times \mathbf{S}_k^{\mathbf{vv}} \right\rangle, \quad \mathbf{A}_k^{\mathbf{bb}} = \left\langle \mathbf{V} \times \mathbf{S}_k^{\mathbf{bb}} - \mathbf{B} \times \mathbf{S}_k^{\mathbf{bv}} \right\rangle.$$

Оператор слева, действующий на векторы $(\langle \mathbf{V}_0' \rangle, \langle \mathbf{B}_0' \rangle)$, называется *оператором комбинированного МГД $\alpha-$эффекта*.

Максимальные по $\mathbf{q}$ инкременты мод в 3 задачах устойчивости (кинематического динамо, гидродинамической и МГД устойчивости) обозначаем $\gamma_\alpha^{\mathbf{b}}$, $\gamma_\alpha^{\mathbf{v}}$ и $\gamma_\alpha^{\mathbf{bv}}$ (это, соответственно, $\max_{\mathbf{q}} \operatorname{Re} \lambda_1$).

Если $\mathbf{V}'(\mathbf{x},\mathbf{X}),\mathbf{B}'(\mathbf{x},\mathbf{X})$ считаются периодическими по $\mathbf{X}$, (так считать не обязательно!), то $\langle(\mathbf{V}'_0,\mathbf{B}'_0)\rangle=(\mathbf{C_v},\mathbf{C_b})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$, где $\mathbf{C_v}$ и $\mathbf{C_b}$ – 3-мерные векторы-константы, $\mathbf{q}=\varepsilon\mathbf{l}$.
Соленоидальность. Ортонормальный базис:

$$\mathbf{l}=(\sin\theta\,\cos\varphi,\ \sin\theta\,\sin\varphi,\ \cos\theta),$$

$$\mathbf{l}^{(1)}=(\cos\theta\,\cos\varphi,\ \cos\theta\,\sin\varphi,\ -\sin\theta),\quad \mathbf{l}^{(2)}=(-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0).$$

Соленоидальность $\langle\mathbf{V}'_0\rangle$ и $\langle\mathbf{B}'_0\rangle$ эквивалентна $\mathbf{C_v}\cdot\mathbf{q}=\mathbf{C_b}\cdot\mathbf{q}=0$, откуда

$$\mathbf{C_v}=C_1\mathbf{l}^{(1)}+C_2\mathbf{l}^{(2)},\quad \mathbf{C_b}=C_3\mathbf{l}^{(1)}+C_4\mathbf{l}^{(2)}.$$

Проецируя уравнения задачи на с.з. на $\mathbf{l}^{(1)}$ и $\mathbf{l}^{(2)}$, сводим её к задаче на с.з. для матрицы

$$\mathrm{i}\mathbf{A}(\theta,\varphi)=\mathrm{i}\begin{bmatrix}
\sum\limits_{k,j',j}A^{\mathbf{vv}}_{k,j'j}l^{(1)}_k l_{j'}l^{(1)}_j & \sum\limits_{k,j',j}A^{\mathbf{vv}}_{k,j'j}l^{(2)}_k l_{j'}l^{(1)}_j & \sum\limits_{k,j',j}A^{\mathbf{bv}}_{k,j'j}l^{(1)}_k l_{j'}l^{(1)}_j & \sum\limits_{k,j',j}A^{\mathbf{bv}}_{k,j'j}l^{(2)}_k l_{j'}l^{(1)}_j \\
\sum\limits_{k,j',j}A^{\mathbf{vv}}_{k,j'j}l^{(1)}_k l_{j'}l^{(2)}_j & \sum\limits_{k,j',j}A^{\mathbf{vv}}_{k,j'j}l^{(2)}_k l_{j'}l^{(2)}_j & \sum\limits_{k,j',j}A^{\mathbf{bv}}_{k,j'j}l^{(1)}_k l_{j'}l^{(2)}_j & \sum\limits_{k,j',j}A^{\mathbf{bv}}_{k,j'j}l^{(2)}_k l_{j'}l^{(2)}_j \\
-\sum\limits_{k,j}A^{\mathbf{vb}}_{k,j}l^{(1)}_k l^{(2)}_j & -\sum\limits_{k,j}A^{\mathbf{vb}}_{k,j}l^{(2)}_k l^{(2)}_j & -\sum\limits_{k,j}A^{\mathbf{bb}}_{k,j}l^{(1)}_k l^{(2)}_j & -\sum\limits_{k,j}A^{\mathbf{bb}}_{k,j}l^{(2)}_k l^{(2)}_j \\
\sum\limits_{k,j}A^{\mathbf{vb}}_{k,j}l^{(1)}_k l^{(1)}_j & \sum\limits_{k,j}A^{\mathbf{vb}}_{k,j}l^{(2)}_k l^{(1)}_j & \sum\limits_{k,j}A^{\mathbf{bb}}_{k,j}l^{(1)}_k l^{(1)}_j & \sum\limits_{k,j}A^{\mathbf{bb}}_{k,j}l^{(2)}_k l^{(1)}_j
\end{bmatrix}$$

и затем максимизируем инкремент по θ и φ
(т.е. надо найти с.з. с максимальной **мнимой!** частью (под)матрицы $\mathbf{A}$).

Задача. Найти замкнутые выражения для этих максимумов, $\gamma_\alpha^{\mathbf{b}}$, $\gamma_\alpha^{\mathbf{v}}$ и $\gamma_\alpha^{\mathbf{bv}}$.

Для кинематического динамо (только $\mathbf{A}_k^{\mathbf{bb}} \neq 0$) эта задача решена:

$$\lambda^{\mathbf{b}}_{1_\pm}(\mathbf{l}) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{k,j,m}\epsilon_{kjm}A^{\mathbf{bb}}_{k,j}l_m \pm \sqrt{a^{\mathbf{b}}}, \qquad a^{\mathbf{b}} = \mathbf{l}\cdot(\det{}^s\mathbf{A}^{\mathbf{bb}})\,({}^s\mathbf{A}^{\mathbf{bb}})^{-1}\mathbf{l},$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_\alpha^{\mathbf{b}} \equiv \max_{\theta,\varphi}\mathrm{Re}\,\lambda_1^{\mathbf{b}}(\theta,\varphi) = \sqrt{\max(\alpha_1\alpha_2,\ \alpha_2\alpha_3,\ \alpha_1\alpha_3)},$$

где ϵ_{kjm} – тензор Леви–Чивиты, ${}^s\mathbf{A}^{\mathbf{bb}} = (\mathbf{A}^{\mathbf{bb}} + (\mathbf{A}^{\mathbf{bb}})^t)/2$,
α_i – три действительных с.з. матрицы ${}^s\mathbf{A}^{\mathbf{bb}}$.

Для задачи гидродинамической устойчивости (только $\mathbf{A}_k^{\mathbf{vv}} \neq 0$, т.н. AKA-эффект):

$$\lambda^{\mathbf{v}}_{1_\pm} = \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{k,j}a_{kj}(\delta_k^j - l_kl_j) \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^{\mathbf{v}}},$$

где δ_k^j – символ Кронекера, $a_{kj} = \sum_{j'}A^{\mathbf{vv}}_{k,j'j}l_{j'}$,

$$a^{\mathbf{v}} = \Big(\sum_{k,j,m}\epsilon_{kjm}a_{kj}l_m\Big)^2 - \Big(\sum_{k,j}a_{kj}(l_k^{(1)}l_j^{(1)} - l_k^{(2)}l_j^{(2)})\Big)^2 - \Big(\sum_{k,j}a_{kj}(l_k^{(1)}l_j^{(2)} + l_k^{(2)}l_j^{(1)})\Big)^2.$$

$\Rightarrow$ $\gamma_\alpha^{\mathbf{v}} \neq 0$ только, если антисимметричная по k и j часть тензора $A^{\mathbf{vv}}_{k,j'j}$ ненулевая.

Вихревая диффузия

А вдруг $\mathbf{A}=0 \;\Rightarrow\; \lambda_1=0$? (Например, так при $\mathbf{V}(\mathbf{x})=-\mathbf{V}(-\mathbf{x})$ и $\mathbf{B}(\mathbf{x})=-\mathbf{B}(-\mathbf{x})$.)
<u>iii. $n=2$.</u> Обозначаем максимальные по $\mathbf{q}$ инкременты роста $\gamma_{\mathrm{e}}^{\mathbf{b}}$, $\gamma_{\mathrm{e}}^{\mathbf{v}}$ и $\gamma_{\mathrm{e}}^{\mathbf{bv}}$, соответственно.

$$(\mathbf{V}_1',\mathbf{B}_1',P_1')=\sum_{k=1}^{3}\left(\langle\mathbf{V}_1'\rangle_k\,\mathbf{S}_k^{\mathbf{v}}(\mathbf{x})+\langle\mathbf{B}_1'\rangle_k\,\mathbf{S}_k^{\mathbf{b}}(\mathbf{x})\right)+\sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\left(\mathbf{G}_{mk}^{\mathbf{v}}\frac{\partial\left\langle\mathbf{V}_0'\right\rangle_k}{\partial X_m}+\mathbf{G}_{mk}^{\mathbf{b}}\frac{\partial\left\langle\mathbf{B}_0'\right\rangle_k}{\partial X_m}\right),$$

$\mathbf{G}_{mk}^{\mathbf{v}}(\mathbf{x})=(\mathbf{G}_{mk}^{\mathbf{vv}},\mathbf{G}_{mk}^{\mathbf{vb}},G_{mk}^{\mathbf{v}p})$ and $\mathbf{G}_{mk}^{\mathbf{b}}(\mathbf{x})=(\mathbf{G}_{mk}^{\mathbf{bv}},\mathbf{G}_{mk}^{\mathbf{bb}},G_{mk}^{\mathbf{b}p})$ – $\mathbb{T}^3$-периодические решения с нулевым средним вспомогательных задач

$$\begin{aligned}\mathscr{M}\,\mathbf{G}_{mk}^{\mathbf{v}}&=\Big(-2\nu\partial\mathbf{S}_k^{\mathbf{vv}}/\partial x_m+V_m\mathbf{S}_k^{\mathbf{vv}}-B_m\mathbf{S}_k^{\mathbf{vb}}+(S_k^{\mathbf{v}p}-\mathbf{V}\cdot\mathbf{S}_k^{\mathbf{vv}}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{S}_k^{\mathbf{vb}})\mathbf{e}_m,\\&\qquad-2\eta\partial\mathbf{S}_k^{\mathbf{vb}}/\partial x_m-\mathbf{V}S_{k,m}^{\mathbf{vb}}+V_m\mathbf{S}_k^{\mathbf{vb}}+\mathbf{B}S_{k,m}^{\mathbf{vv}}-B_m\mathbf{S}_k^{\mathbf{vv}}\Big),\\\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{G}_{mk}^{\mathbf{vv}}&=-\,S_{k,m}^{\mathbf{vv}};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{M}\,\mathbf{G}_{mk}^{\mathbf{b}}&=\Big(-2\nu\partial\mathbf{S}_k^{\mathbf{bv}}/\partial x_m+V_m\mathbf{S}_k^{\mathbf{bv}}-B_m\mathbf{S}_k^{\mathbf{bb}}+(S_k^{\mathbf{b}p}-\mathbf{V}\cdot\mathbf{S}_k^{\mathbf{bv}}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{S}_k^{\mathbf{bb}})\mathbf{e}_m,\\&\qquad-2\eta\partial\mathbf{S}_k^{\mathbf{bb}}/\partial x_m-\mathbf{V}S_{k,m}^{\mathbf{bb}}+V_m\mathbf{S}_k^{\mathbf{bb}}+\mathbf{B}S_{k,m}^{\mathbf{bv}}-B_m\mathbf{S}_k^{\mathbf{bv}}\Big),\\\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{G}_{mk}^{\mathbf{bv}}&=-\,S_{k,m}^{\mathbf{bv}}.\end{aligned}$$

Условия разрешимости задач в быстрых переменных:

$$\nu\nabla^2_{\mathbf{X}}\left\langle \mathbf{V}'_0\right\rangle + \sum_{k,m,j}\left(\mathbf{D}^{\mathbf{vv}}_{jmk}\frac{\partial^2\left\langle \mathbf{V}'_0\right\rangle_k}{\partial X_m\partial X_j} + \mathbf{D}^{\mathbf{bv}}_{jmk}\frac{\partial^2\left\langle \mathbf{B}'_0\right\rangle_k}{\partial X_m\partial X_j}\right) - \nabla_{\mathbf{X}}P^*_1 = \lambda_2\left\langle \mathbf{V}'_0\right\rangle,$$

$$\eta\nabla^2_{\mathbf{X}}\left\langle \mathbf{B}'_0\right\rangle + \nabla_{\mathbf{X}}\times\sum_{k,m}\left(\mathbf{D}^{\mathbf{vb}}_{mk}\frac{\partial\left\langle \mathbf{V}'_0\right\rangle_k}{\partial X_m} + \mathbf{D}^{\mathbf{bb}}_{mk}\frac{\partial\left\langle \mathbf{B}'_0\right\rangle_k}{\partial X_m}\right) = \lambda_2\left\langle \mathbf{B}'_0\right\rangle.$$

Обозначено

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^{\mathbf{vv}}_{jmk} &= \left\langle -V_j\mathbf{G}^{\mathbf{vv}}_{mk} - \mathbf{V}G^{\mathbf{vv}}_{mk,j} + B_j\mathbf{G}^{\mathbf{vb}}_{mk} + \mathbf{B}G^{\mathbf{vb}}_{mk,j}\right\rangle,\\
\mathbf{D}^{\mathbf{bv}}_{jmk} &= \left\langle -V_j\mathbf{G}^{\mathbf{bv}}_{mk} - \mathbf{V}G^{\mathbf{bv}}_{mk,j} + B_j\mathbf{G}^{\mathbf{bb}}_{mk} + \mathbf{B}G^{\mathbf{bb}}_{mk,j}\right\rangle,\\
\mathbf{D}^{\mathbf{vb}}_{mk} &= \left\langle \mathbf{V}\times\mathbf{G}^{\mathbf{vb}}_{mk} - \mathbf{B}\times\mathbf{G}^{\mathbf{vv}}_{mk}\right\rangle,\\
\mathbf{D}^{\mathbf{bb}}_{mk} &= \left\langle \mathbf{V}\times\mathbf{G}^{\mathbf{bb}}_{mk} - \mathbf{B}\times\mathbf{G}^{\mathbf{bv}}_{mk}\right\rangle.
\end{aligned}$$

Оператор 2го порядка слева называется *оператором комбинированной МГД вихревой диффузии* (или β-эффект в терминологии магнитной гидродинамики средних полей). $\mathbf{D}$ называется *тензором магнитной комбинированной МГД диффузии*.

Если $\mathbf{V}', \mathbf{B}'$ периодические функции $\mathbf{X}$ (так считать не обязательно!), то

$$\langle(\mathbf{V}_0', \mathbf{B}_0')\rangle = (\mathbf{C_v}, \mathbf{C_b})\mathrm{e}^{\mathbf{iq}\cdot\mathbf{x}},$$

$$\mathbf{C_v} = C_1\mathbf{l}^{(1)} + C_2\mathbf{l}^{(2)}, \quad \mathbf{C_b} = C_3\mathbf{l}^{(1)} + C_4\mathbf{l}^{(2)},$$

где C_i – константы, (C_1, C_2, C_3, C_4) – с.в., а λ_2 – с.з. матрицы

$$\mathbf{D}(\theta, \varphi) = -\begin{bmatrix} \nu + \sum\limits_{k,j} d_{kj}^{\mathbf{vv}} l_k^{(1)} l_j^{(1)} & \sum\limits_{k,j} d_{kj}^{\mathbf{vv}} l_k^{(2)} l_j^{(1)} & \sum\limits_{k,j} d_{kj}^{\mathbf{bv}} l_k^{(1)} l_j^{(1)} & \sum\limits_{k,j} d_{kj}^{\mathbf{bv}} l_k^{(2)} l_j^{(1)} \\ \sum\limits_{k,j} d_{kj}^{\mathbf{vv}} l_k^{(1)} l_j^{(2)} & \nu + \sum\limits_{k,j} d_{kj}^{\mathbf{vv}} l_k^{(2)} l_j^{(2)} & \sum\limits_{k,j} d_{kj}^{\mathbf{bv}} l_k^{(1)} l_j^{(2)} & \sum\limits_{k,j} d_{kj}^{\mathbf{bv}} l_k^{(2)} l_j^{(2)} \\ -\sum\limits_{k,j} d_{kj}^{\mathbf{vb}} l_k^{(1)} l_j^{(2)} & -\sum\limits_{k,j} d_{kj}^{\mathbf{vb}} l_k^{(2)} l_j^{(2)} & \eta - \sum\limits_{k,j} d_{kj}^{\mathbf{bb}} l_k^{(1)} l_j^{(2)} & -\sum\limits_{k,j} d_{kj}^{\mathbf{bb}} l_k^{(2)} l_j^{(2)} \\ \sum\limits_{k,j} d_{kj}^{\mathbf{vb}} l_k^{(1)} l_j^{(1)} & \sum\limits_{k,j} d_{kj}^{\mathbf{vb}} l_k^{(2)} l_j^{(1)} & \sum\limits_{k,j} d_{kj}^{\mathbf{bb}} l_k^{(1)} l_j^{(1)} & \eta + \sum\limits_{k,j} d_{kj}^{\mathbf{bb}} l_k^{(2)} l_j^{(1)} \end{bmatrix},$$

$$d_{kj}^{\mathbf{vv}} = \sum_{j',m} D_{j'mk,j}^{\mathbf{vv}} l_{j'} l_m, \quad d_{kj}^{\mathbf{bv}} = \sum_{j',m} D_{j'mk,j}^{\mathbf{bv}} l_{j'} l_m, \quad d_{kj}^{\mathbf{vb}} = \sum_{m} D_{mk,j}^{\mathbf{vb}} l_m, \quad d_{kj}^{\mathbf{bb}} = \sum_{m} D_{mk,j}^{\mathbf{bb}} l_m.$$

Задача. Найти замкнутые выражения для максимумов с.з. по θ и φ ($\gamma_e^{\mathbf{b}}$, $\gamma_e^{\mathbf{v}}$ и $\gamma_e^{\mathbf{bv}}$).
Не решена.

Задача об устойчивости с “разделением масштабов”: численный подход

Блоховские моды:

$$(\mathbf{V}'(\mathbf{x}),\ \mathbf{B}'(\mathbf{x})) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}(\mathbf{v}(\mathbf{x}),\ \mathbf{b}(\mathbf{x})),$$
$$P'(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}p(\mathbf{x}),$$

причём ячейка периодичности $(\mathbf{v},\mathbf{b})$ такая же, как у $(\mathbf{V},\mathbf{B})$: $\mathbb{T}^3=[-\pi,\pi]^3$
Когда мы ранее считали $\mathbf{V}'(\mathbf{x},\mathbf{X}),\mathbf{B}'(\mathbf{x},\mathbf{X})$ периодическими по $\mathbf{X}$, фактически мы рассматривали блоховские моды и предел $|\mathbf{q}|=\varepsilon\to 0$. Теперь $|\mathbf{q}|$ произволен.
С другой стороны, ранее не обязательно требовалась периодичность по $\mathbf{X}$, а теперь в явном виде рассматриваем гармонику Фурье.

Соленоидальность поля $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{f}$ для $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}$ эквивалентна $\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{n}+\mathbf{q})=0\ \forall\mathbf{n}$.
Определим проекцию

$$\mathscr{P}_{\mathbf{q}}:\mathbf{f}\mapsto\sum_{\mathbf{n}}\left(\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{n}}-\frac{\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{n}+\mathbf{q})}{|\mathbf{n}+\mathbf{q}|^2}(\mathbf{n}+\mathbf{q})\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}},\quad \mathbf{q}\neq 0,$$
$$\mathscr{P}_0:\mathbf{f}\mapsto\hat{\mathbf{f}}_0+\sum_{\mathbf{n}\neq 0}\left(\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{n}}-\frac{\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}\quad(\mathbf{q}=0).$$

Тогда $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\mathscr{P}_{\mathbf{q}}\mathbf{f}$ – соленоидальная компонента $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x})$, а $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}(\mathscr{I}-\mathscr{P}_{\mathbf{q}})\mathbf{f}$ – потенциальная (градиент); $\mathscr{I}$ – тождественный оператор. Очевидно, $\overline{\mathscr{P}_{\mathbf{q}}\mathbf{f}}=\mathscr{P}_{-\mathbf{q}}\overline{\mathbf{f}}$.

После сокращения $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$, задача сводится к задаче на собственные значения (с.з.) в $\mathbb{T}^3$:

$$\mathscr{M}_{\mathbf{q}}(\mathbf{v},\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{q})(\mathbf{v},\mathbf{b}),$$

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_{\mathbf{q}} : (\mathbf{v},\mathbf{b}) \mapsto \Big(\nu\Delta_{\mathbf{q}}\mathbf{v} + \mathscr{P}_{\mathbf{q}}\Big(&\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{V}) + \mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{v}) + \mathrm{i}\mathbf{V}\times(\mathbf{q}\times\mathbf{v})\\ &+ (\nabla\times\mathbf{b})\times\mathbf{B} + \mathrm{i}(\mathbf{q}\times\mathbf{b})\times\mathbf{B} + (\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{b}\Big),\\ &\eta\Delta_{\mathbf{q}}\mathbf{b} + \nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}+\mathbf{V}\times\mathbf{b}) + \mathrm{i}\mathbf{q}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}+\mathbf{V}\times\mathbf{b})\Big),\end{aligned}$$

$$\Delta_{\mathbf{q}} : \mathbf{v} \mapsto \nabla^2\mathbf{v} + 2\mathrm{i}(\mathbf{q}\cdot\nabla)\mathbf{v} - |\mathbf{q}|^2\mathbf{v}$$

– самосопряженный оператор в пространстве Лебега $\mathfrak{L}_2(\mathbb{T}^3)$.

$$\langle\!\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle\!\rangle = \big\langle \mathbf{f}_1 \cdot \overline{\mathbf{f}_2} \big\rangle \equiv (2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{f}_1(\mathbf{x})\cdot\overline{\mathbf{f}_2(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

$\mathscr{M}_{\mathbf{q}}(\mathbf{v},\mathbf{b}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\mathscr{M}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}(\mathbf{v},\mathbf{b})) \;\Rightarrow\; \mathscr{M} = \mathscr{M}_{\mathbf{0}}$.

Комплексное сопряжение уравнения на с.з.: инкременты роста мод для $\mathbf{q}$ и $-\mathbf{q}$ одинаковы.

Очевидно: изменение $\mathbf{q}$ на любой целочисленный вектор не меняет инкремент роста
$\Rightarrow$ максимальные по $\mathbf{q}$ и $-\mathbf{q}$ с.з. достаточно искать в параллелепипеде

$$\mathbb{Q} = \{\mathbf{q}\,|\,0 \le q_1 \le 1/2,\ \ -1/2 \le q_2 \le 1/2,\ \ -1/2 \le q_3 \le 1/2\}.$$

Вычисление градиентов с.з. по q_m

$$\mathscr{M}^*_{\mathbf{q}}:(\mathbf{v},\mathbf{b})\mapsto\Big(\nu\Delta_{\mathbf{q}}\mathbf{v}+(\nabla\times\mathbf{V})\times\mathscr{P}_{\mathbf{q}}\mathbf{v}+\nabla\times(\mathscr{P}_{\mathbf{q}}\mathbf{v}\times\mathbf{V})+\mathrm{i}\mathbf{q}\times(\mathscr{P}_{\mathbf{q}}\mathbf{v}\times\mathbf{V})$$
$$-(\nabla\times\mathbf{b}+\mathrm{i}\mathbf{q}\times\mathbf{b})\times\mathbf{B},$$
$$\eta\Delta_{\mathbf{q}}\mathbf{b}+\nabla\times(\mathbf{B}\times\mathscr{P}_{\mathbf{q}}\mathbf{v})+\mathrm{i}\mathbf{q}\times(\mathbf{B}\times\mathscr{P}_{\mathbf{q}}\mathbf{v})-(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathscr{P}_{\mathbf{q}}\mathbf{v}$$
$$-\mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{b}+\mathrm{i}\mathbf{q}\times\mathbf{b})\Big).$$

Если λ – с.з. $\mathscr{M}_{\mathbf{q}}$, то $\overline{\lambda}$ – с.з. сопряжённого оператора $\mathscr{M}^*_{\mathbf{q}}$.
$(\mathbf{v}^*,\mathbf{b}^*)$ нормализуем условием $\langle\!\langle(\mathbf{v},\mathbf{b}),(\mathbf{v}^*,\mathbf{b}^*)\rangle\!\rangle=1$.

Пусть λ – простое с.з. (случай общего положения для $\mathbf{q}\neq 0$).
Дифференцирование равенства $\mathscr{M}_{\mathbf{q}}(\mathbf{v},\mathbf{b})=\lambda(\mathbf{q})(\mathbf{v},\mathbf{b})$ по q_m дает

$$(\mathscr{M}_{\mathbf{q}}-\lambda)\left(\frac{\partial}{\partial q_m}(\mathbf{v},\mathbf{b})\right)+(\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{v}},\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{b}})=\frac{\partial\lambda}{\partial q_m}(\mathbf{v},\mathbf{b}),$$
$$\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{v}}=2\nu\left(-q_m\mathbf{v}+\mathrm{i}\,\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_m}\right)+\mathrm{i}\mathscr{P}_{\mathbf{q}}(\mathbf{V}\times(\mathbf{e}_m\times\mathbf{v})+(\mathbf{e}_m\times\mathbf{b})\times\mathbf{B})+\frac{\partial\mathscr{P}_{\mathbf{q}}}{\partial q_m}\Big(\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{V})$$
$$+\mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{v})+\mathrm{i}\mathbf{V}\times(\mathbf{q}\times\mathbf{v})+(\nabla\times\mathbf{b})\times\mathbf{B}+\mathrm{i}(\mathbf{q}\times\mathbf{b})\times\mathbf{B}+(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{b}\Big),$$
$$\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{b}}=2\eta\left(-q_m\mathbf{b}+\mathrm{i}\,\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial x_m}\right)+\mathrm{i}\mathbf{e}_m\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}+\mathbf{V}\times\mathbf{b}),$$

$$\left(\frac{\partial \mathscr{P}_{\mathbf{q}}}{\partial q_m}\right)\colon \mathbf{f}\mapsto\sum_{\mathbf{n}}\left(2(n_m+q_m)\frac{\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{n}+\mathbf{q})}{|\mathbf{n}+\mathbf{q}|^4}(\mathbf{n}+\mathbf{q})-\frac{\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{e}_m}{|\mathbf{n}+\mathbf{q}|^2}(\mathbf{n}+\mathbf{q})-\frac{\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{n}+\mathbf{q})}{|\mathbf{n}+\mathbf{q}|^2}\mathbf{e}_m\right)\mathrm{e}^{\mathbf{in}\cdot\mathbf{x}}.$$

Скалярно умножим это уравнение на $(\mathbf{v}^*,\mathbf{b}^*)$ и возьмем действительную часть. Получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial\gamma}{\partial q_m}&=\mathrm{Re}\,\langle\!\langle(\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{v}},\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{b}}),(\mathbf{v}^*,\mathbf{b}^*)\rangle\!\rangle\\&=\mathrm{Re}\left\langle\!\!\left\langle-2\nu q_m\mathbf{v}+\frac{\partial\mathscr{P}_{\mathbf{q}}}{\partial q_m}\Big(\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{V})+\mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{v}+\mathrm{i}\mathbf{q}\times\mathbf{v})+(\nabla\times\mathbf{b}+\mathrm{i}\mathbf{q}\times\mathbf{b})\times\mathbf{B}\right.\right.\\&\qquad\left.\left.+(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{b}\Big),\mathbf{v}^*\right\rangle\!\!\right\rangle-\mathrm{Im}\left\langle\!\!\left\langle2\nu\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_m}+\mathscr{P}_{\mathbf{q}}\Big(\mathbf{V}\times(\mathbf{e}_m\times\mathbf{v})+(\mathbf{e}_m\times\mathbf{b})\times\mathbf{B}\Big),\mathbf{v}^*\right\rangle\!\!\right\rangle\\&\qquad-2\eta q_m\mathrm{Re}\langle\!\langle\mathbf{b},\mathbf{b}^*\rangle\!\rangle-\mathrm{Im}\left\langle\!\!\left\langle2\eta\,\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial x_m}+\mathbf{e}_m\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}+\mathbf{V}\times\mathbf{b}),\mathbf{b}^*\right\rangle\!\!\right\rangle.\end{aligned}$$

Теорема. Пусть (i) с.з. λ оператора линеаризации $\mathscr{M}(\mathbf{V}',\mathbf{B}')=\lambda(\mathbf{V}',\mathbf{B}')$ действительно, или (ii) возмущаемое состояние центрально-симметрично, т.е. $\mathbf{V}(\mathbf{x})=-\mathbf{V}(-\mathbf{x})$ и $\mathbf{B}(\mathbf{x})=-\mathbf{B}(-\mathbf{x})$. Тогда для “полуцелых” $\mathbf{q}$ (с компонентами $0,\pm1/2$) выполнены условия экстремума $\partial\mathrm{Re}\,\lambda(\mathbf{q})\,/\,\partial q_m=0$.

Итак, магнитные α-эффект и вихревая диффузия “бывают”. Что не так?

Вычислительные эксперименты:

- Задача кинематического динамо
- Задача линейной гидродинамической устойчивости
- Задача линейной магнитогидродинамической устойчивости

Возмущаемые стационарные состояния синтезированы как ряды Фурье со случайными коэффициентами. Они соответствуют разным диапазонам пространственных масштабов:

- Экспоненциально убывающий энергетический спектр $\mathbf{c_k} \sim 4^{-|\mathbf{k}|}$ (Viscous)
  – диффузионный диапазон
- Колмогоровский энергетический спектр $\mathbf{c_k} \sim |\mathbf{k}|^{-11/6}$ (Inertial)
  – динамический диапазон
- Гармоники с волновыми числами (по каждой координате) не более 2 (Eddies)
  – нерегулярный спектр в его начале, большие вихри

Гидродинамическая задача, экспоненциальный спектр, нет симметрий

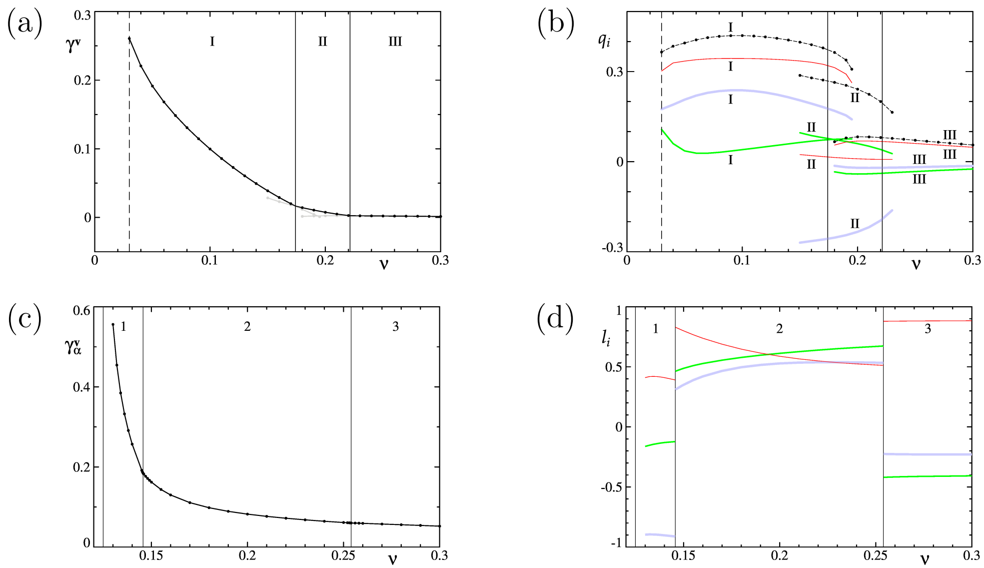


Рис. 1: Maximum growth rates of the Bloch hydrodynamic linear stability modes (a) and maximum slow-time growth rates due to the action of the AKA-effect (c) for a sample non-parity-invariant flow of type V. Wave vectors **q** (b), for which the growth rates are shown in (a), and directions of the wave vectors (d), for which the growth rates are shown in (c).

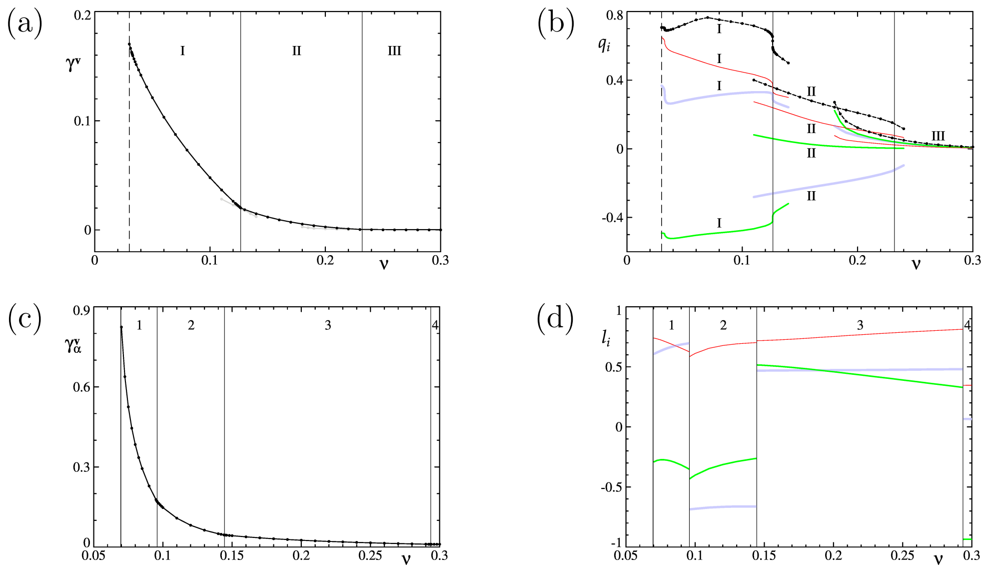


Рис. 2: Same as in Fig. 1, but for a sample non-parity-invariant flow of type I.

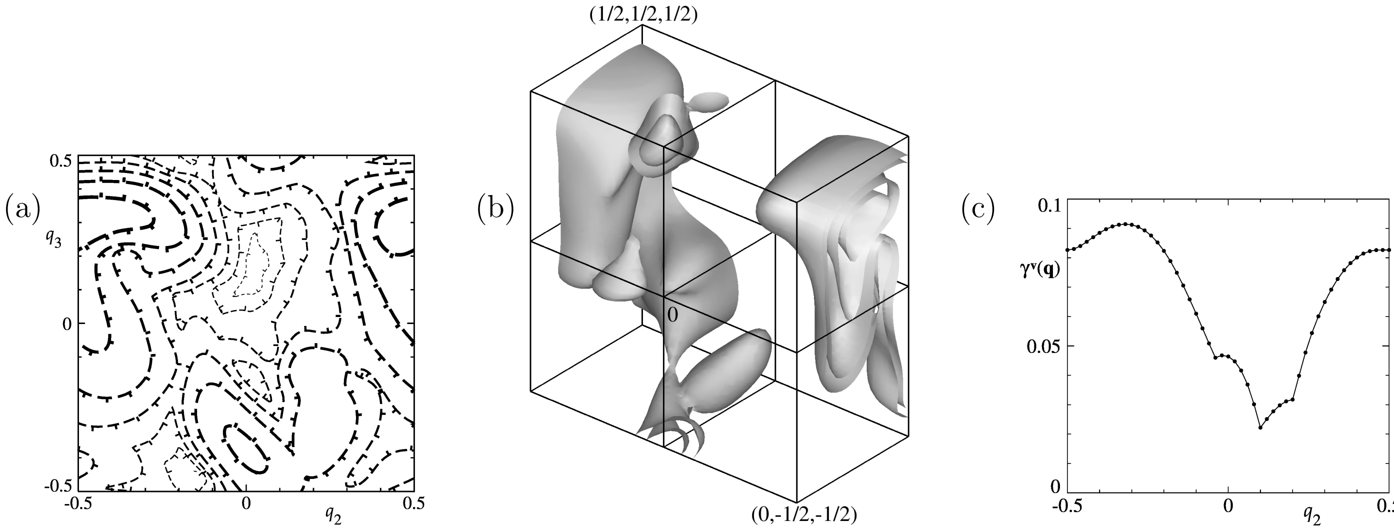


Рис. 3: For $\nu = 0.1$, isolines of the dominant growth rates $\gamma^{\mathbf{v}}(\mathbf{q})$ of the Bloch hydrodynamic stability modes in the cross-section $q_1 = 0.32$ of the parallelepiped $\mathbb{Q}$ (a), isosurfaces of the growth rates (b) and the dominant growth rates as a function of q_2 on the line $q_1 = 0.48$, $q_3 = 0.3$ (c) for a sample non-parity-invariant flow of type E. The isolines are drawn for the growth rates that are integer multiples of 0.011 (the minimum and maximum $\gamma^{\mathbf{v}}$ in this plane are 0.0128 and 0.0950). The width of the isolines and dash length increase with the constant values along the curves. The isosurfaces are shown in $\mathbb{Q}$ at the levels of 75%, 80%, 90% and 95% of the maximum over $\mathbb{Q}$ value $\gamma^{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) = 0.0951$ for $\mathbf{q} = (0.3110, 0.4967, 0.2967)$. The axis q_1 points inside $\mathbb{Q}$, the q_2 axis to the left, and the q_3 axis is vertical.

Гидродинамическая задача, большие вихри, нет симметрий

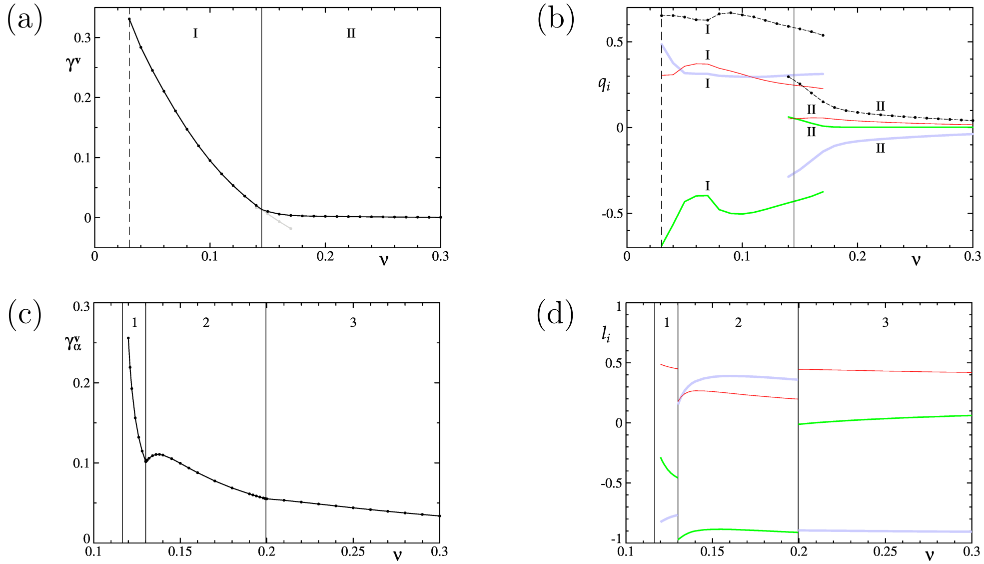


Рис. 4: Same as in Fig. 1, but for the sample non-parity-invariant flow of type E.

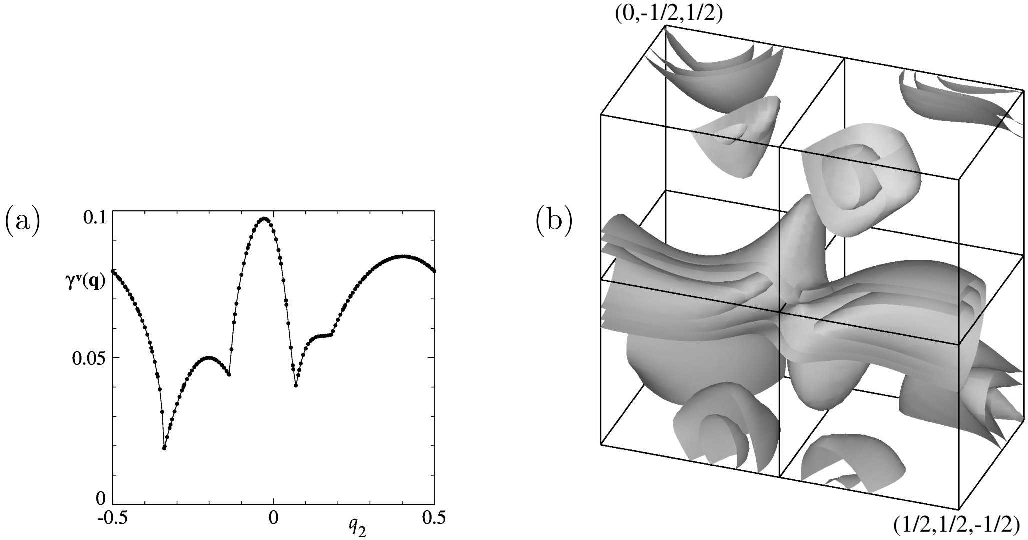


Рис. 5: For $\nu = 0.1$, dominant growth rates $\gamma^{\mathbf{v}}(\mathbf{q})$ of the Bloch hydrodynamic stability modes as a function of q_2 on the line $q_1 = 0.44$, $q_3 = 0.16$ (a), and isosurfaces of the growth rates in $\mathbb{Q}$ at the levels of 70%, 80% and 90% of the maximum over $\mathbb{Q}$ value $\gamma^{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) = 0.1283$ for $\mathbf{q} = (0.4615, 0.3878, 0.0175)$ (b) for a sample parity-invariant steady flow of type V. The axis q_1 points towards the reader, the frontal vertical plane is $q_1 = 1/2$, the q_2 axis points to the right, and the q_3 axis is vertical.

Гидродинамическая задача, колмогоровский спектр, центральная симметрия

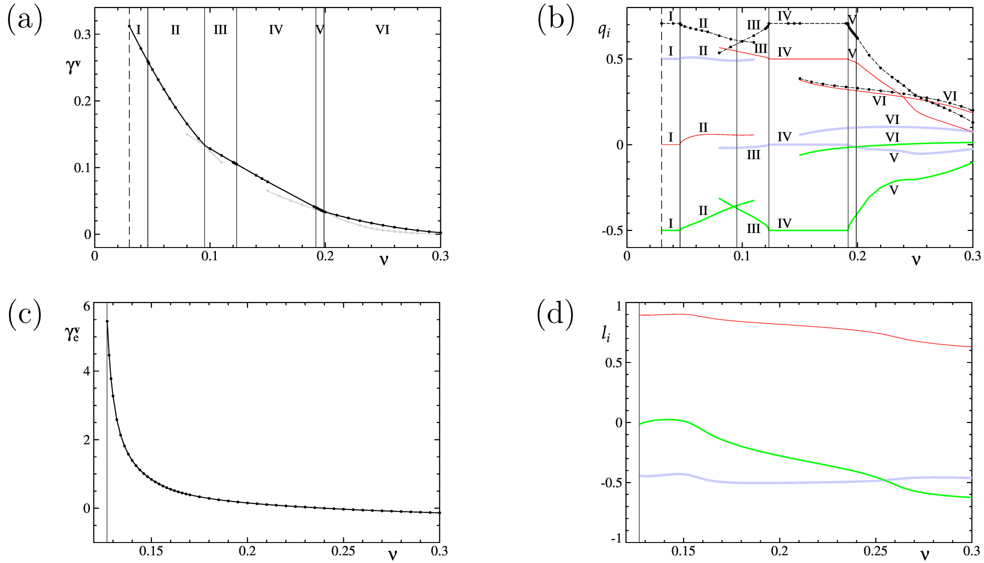


Рис. 6: Panels (a), (b) and (d) same as in Fig. 1(a), (b) and (d), but for the sample parity-invariant steady flow of type V, and maximum slow-time growth rates due to the action of the eddy viscosity (c). In intervals I and IV, the growth rates $\gamma^{\nu}(\mathbf{q})$ are globally maximum over $\mathbb{Q}$ for $\mathbf{q} = (0, -1/2, 1/2)$ and $(1/2, -1/2, 0)$, respectively.

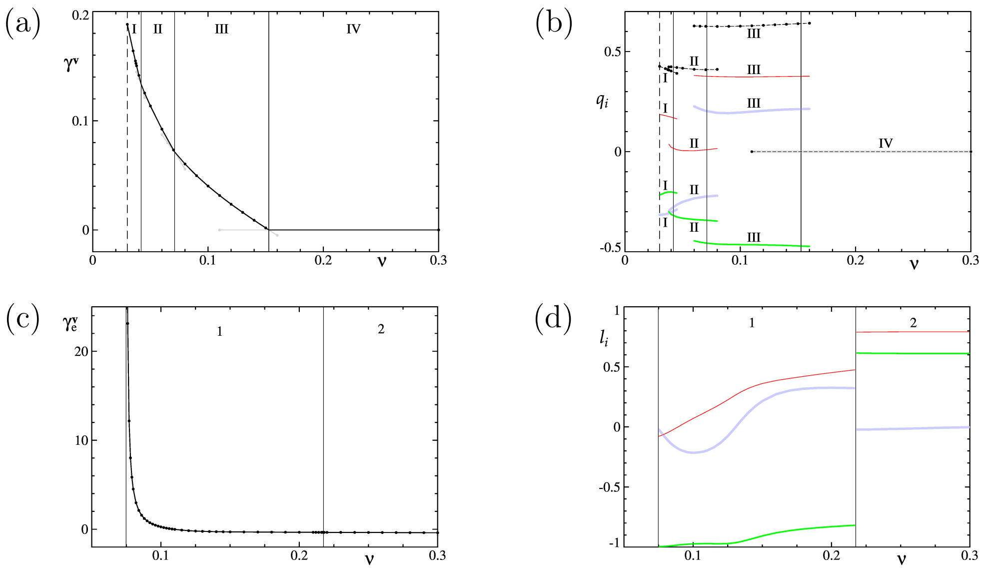
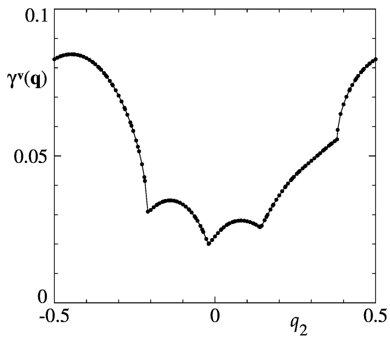


Рис. 7: Same as Fig. 6, but for a sample parity-invariant steady flow of type I. In interval IV, the globally maximum over $\mathbb{Q}$ growth rate is $\gamma^{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) = 0$ for $\mathbf{q} = 0$.

(a)



(b)

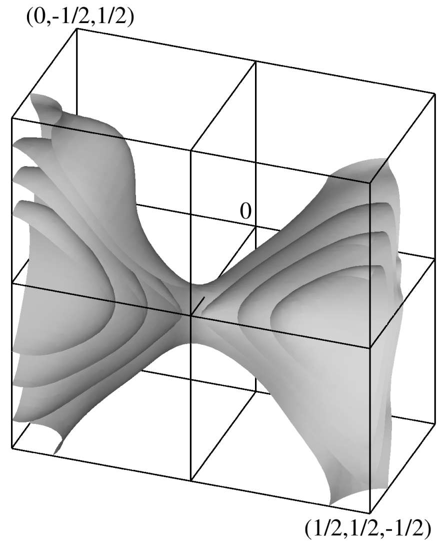


Рис. 8: For $\nu = 0.1$, dominant growth rates $\gamma^{\mathbf{v}}(\mathbf{q})$ of the Bloch hydrodynamic stability modes as a function of q_2 on the line $q_1 = 0.34$, $q_3 = -0.36$ (a), isosurfaces of the growth rates at the levels of 60%, 70%, 80% and 90% of the maximum over $\mathbb{Q}$ growth rate $\gamma^{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) = 0.1356$ for $\mathbf{q} = (1/2, -1/2, 0)$ (b) for a sample parity-invariant steady flow of type E. The axis q_1 points towards the reader, the frontal vertical plane is $q_1 = 1/2$, the q_2 axis points to the right, and the q_3 axis is vertical.

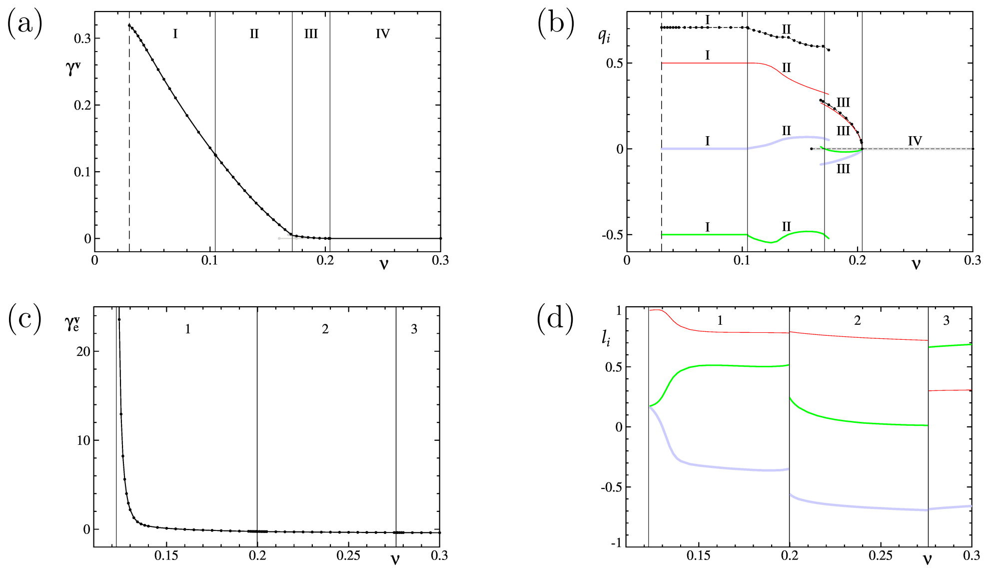


Рис. 9: Same as Fig. 6, but for the sample parity-invariant steady flow of type E. The growth rates in interval I are globally maximum over $\mathbb{Q}$ for $\mathbf{q} = (1/2, -1/2, 0)$, and $\gamma^\nu(\mathbf{q}) = 0$ for $\mathbf{q} = 0$ is globally maximum in interval IV.

Кинематическое динамо, экспоненциальный спектр, нет симметрий

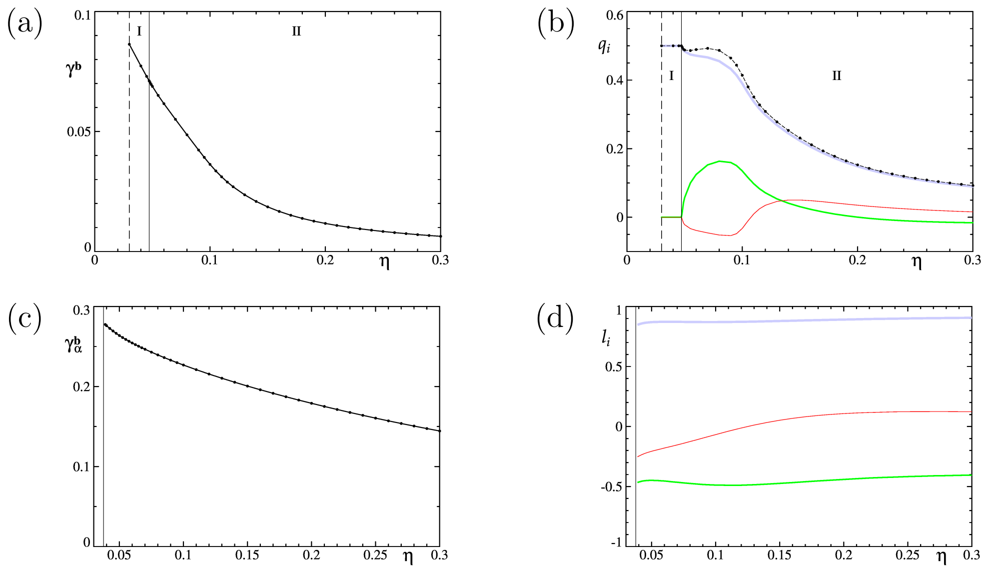


Рис. 10: Maximum growth rates of the Bloch magnetic modes (a) and maximum slow-time growth rates due to the action of the magnetic α-effect (c) for a sample non-parity-invariant steady flow of type V. Wave vectors $\mathbf{q}$ (b), for which the growth rates are shown in (a), and directions of the wave vectors (d), for which the growth rates are shown in (c).

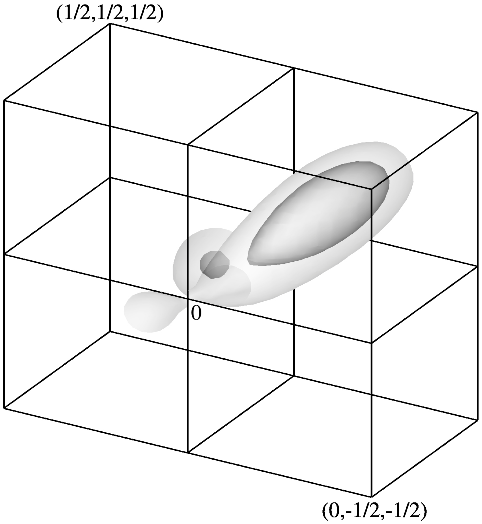


Рис. 11: For $\eta = 0.1$, isosurfaces of the dominant growth rates $\gamma^{\mathbf{b}}(\mathbf{q})$ at the levels 0 and a half of the maximum over $\mathbb{Q}$ growth rate (the internal darker structures) for a sample non-parity-invariant steady flow of type I. The maximum over $\mathbb{Q}$ value $\gamma^{\mathbf{b}}(\mathbf{q}) = 0.0097$ is located at $\mathbf{q} = (0.3333, -0.1805, 0.1742)$. The axis q_1 points inside $\mathbb{Q}$, the q_2 axis to the left, and the q_3 axis is vertical.

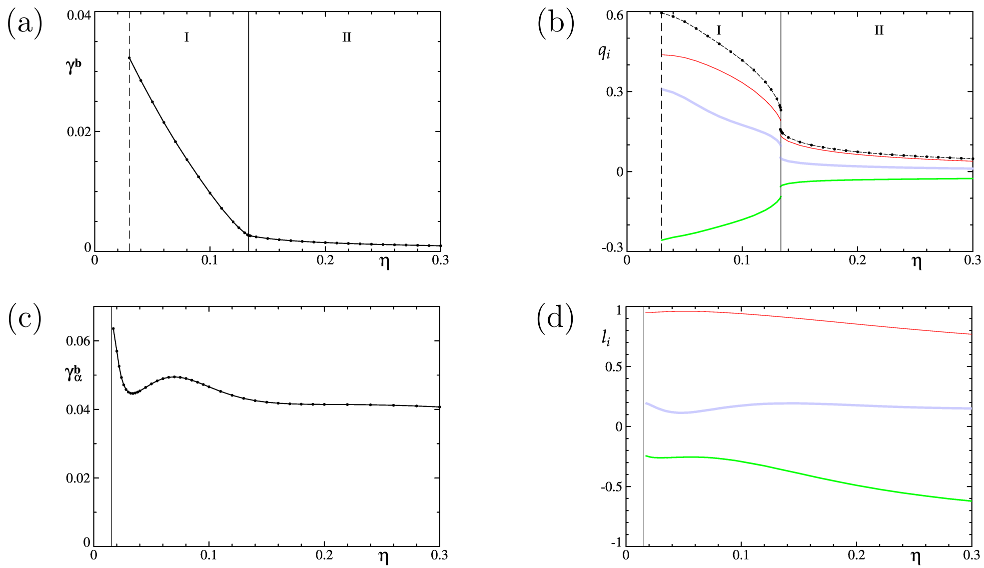


Рис. 12: Same as Fig. 10, but for the sample non-parity-invariant steady flow of type I.

Кинематическое динамо, большие вихри, нет симметрий

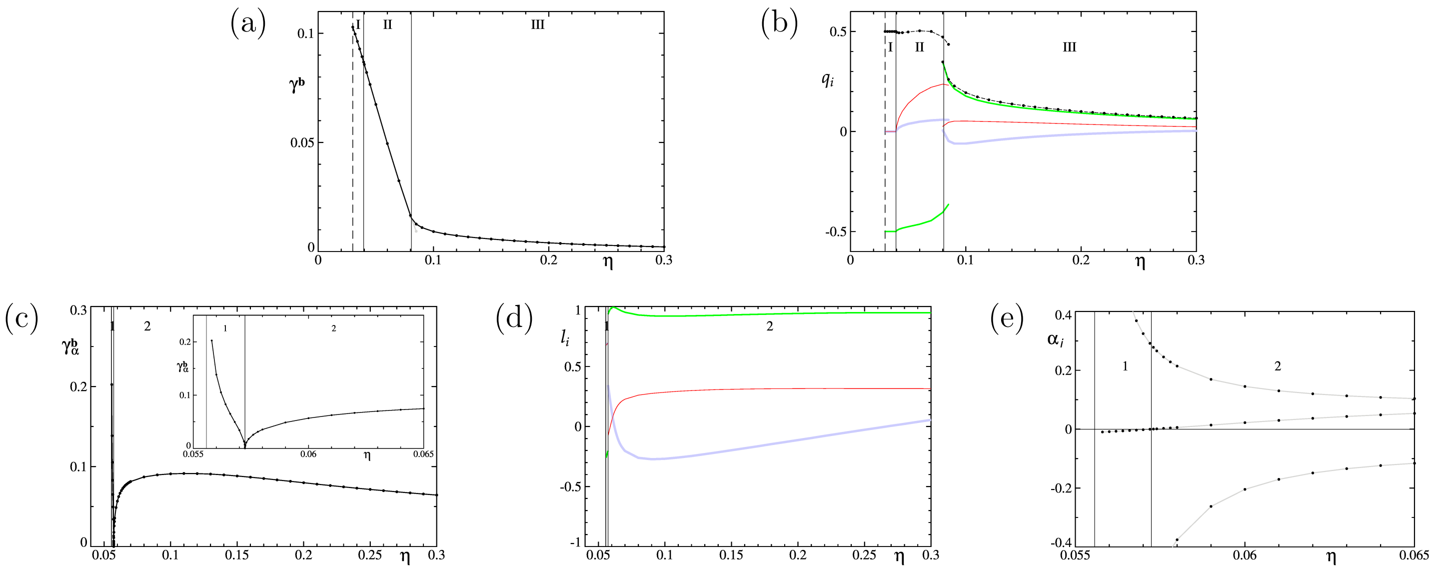


Рис. 13: Panels (a)–(d) same as (a)–(d) in Fig. 10, but for a sample non-parity-invariant steady flow of type E. In interval I, the growth rates are globally maximum over $\mathbb{Q}$ for $\mathbf{q} = (0, -1/2, 0)$. Eigenvalues of the symmetrized α-effect tensor (e). The insert in (c): a zoom of the plot (c) near the point of singular behavior of $\gamma^{\mathbf{b}}_{\alpha}$. The cusp is located at η (shown by the right thin vertical line in (c) and (e)), for which the intermediate eigenvalue of the symmetrized α-effect tensor vanishes.

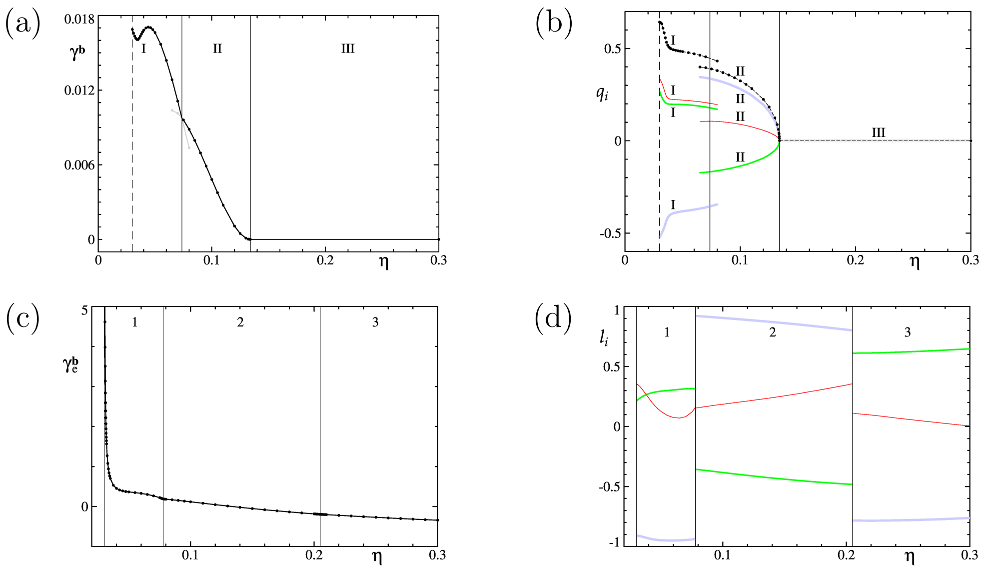


Рис. 14: Panels (a), (b) and (d) same as in Fig. 10(a), (b) and (d), but for a sample parity-invariant steady flow of type V, and maximum slow-time growth rates due to the action of the magnetic eddy diffusivity (c). In interval III, the growth rate $\gamma^{\mathbf{b}}(\mathbf{q}) = 0$ for $\mathbf{q} = 0$ is globally maximum over $\mathbb{Q}$.

Ответвление семейства магнитных мод от мод для $\mathbf{q}=0$. *в задаче кинематического динамо для центрально-симметричного течения*

$$\mathbf{V}(\mathbf{x})=-\mathbf{V}(-\mathbf{x})$$

Ответвляющееся семейство разложено в асимптотический ряд по $\vartheta=(\eta_0-\eta)^{1/2}$:

$$\mathbf{b}=\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{b}_j\vartheta^j, \qquad \mathbf{b}^*=\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{b}^*_j\vartheta^j, \qquad \lambda=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\vartheta^j, \qquad \mathbf{q}=\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{q}_j\vartheta^j$$

($\mathbf{q}$ – оптимальное). Показано, что $\lambda_1=0$, $\mathrm{Re}\,\lambda_2=\mathrm{Re}\,\lambda_3=0$. Разложение инкремента начинается с λ_4.

<u>Задача</u>. Построить аналогичные асимптотические разложения для
- случаев ответвления от семейств доминирующих мод для $\mathbf{q}=0$ в других задачах о линейной устойчивости;
- случаев ответвления от семейств доминирующих мод для полуцелых $\mathbf{q}\neq 0$ (Как на рис. 15?)
- Возможно ли ответвление от семейств доминирующих мод, не отвечающих полуцелым $\mathbf{q}$?
(Как на рис. 2, 20?)
- Будет ли примыкание на рис. 12, 13 к семейству мод для $\mathbf{q}=0$?

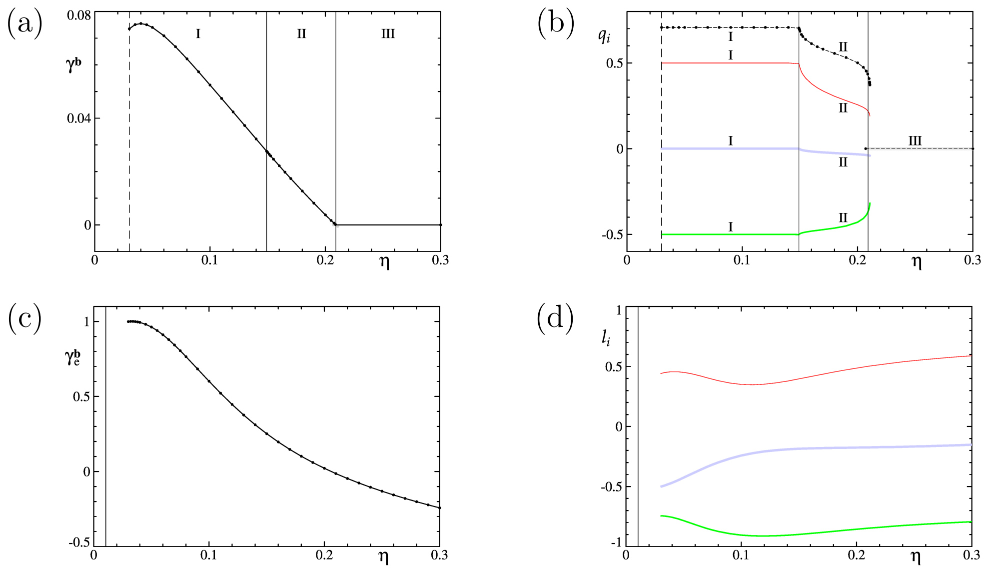


Рис. 15: Same as in Fig. 14, but for a sample parity-invariant steady flow of type I. In interval I, the growth rates are globally maximum over $\mathbb{Q}$ for $\mathbf{q} = (1/2, -1/2, 0)$, and $\gamma^{\mathbf{b}}(\mathbf{q}) = 0$ for $\mathbf{q} = 0$ is globally maximum in interval III.

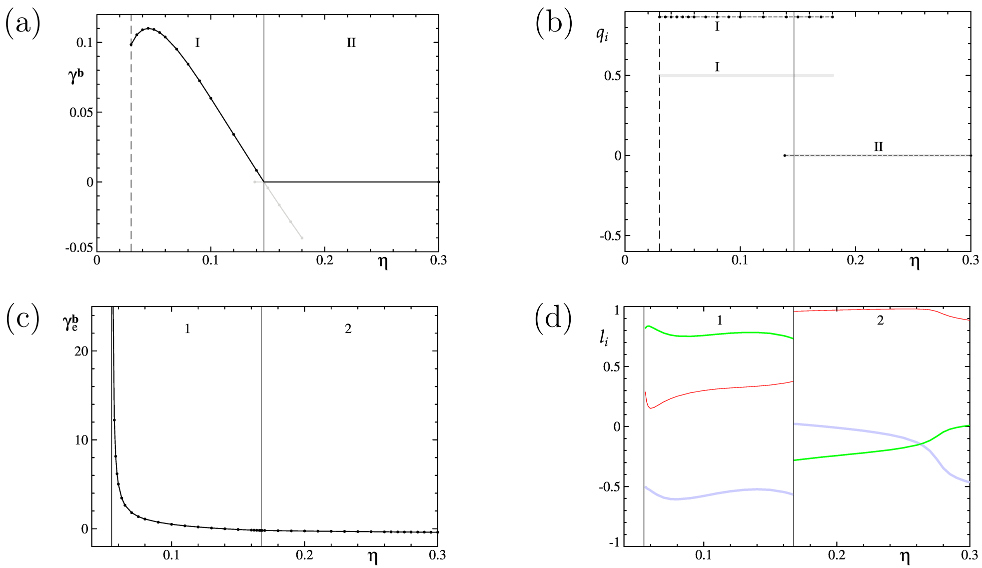
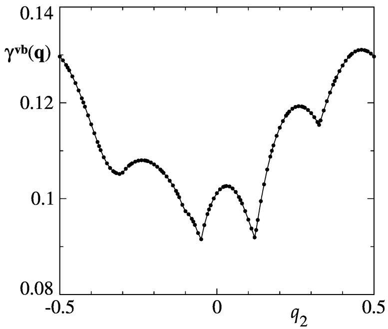


Рис. 16: Same as in Fig. 14, but for a sample parity-invariant steady flow of type E. In intervals I and II, the growth rates are globally maximum over $\mathbb{Q}$ for $\mathbf{q} = (1/2, 1/2, 1/2)$ and $\mathbf{q} = 0$, respectively.

(a)



(b)

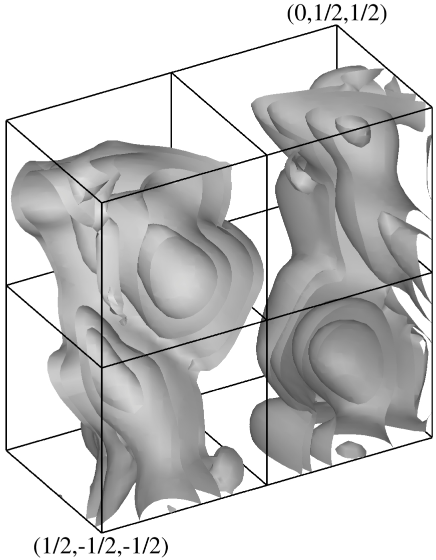


Рис. 17: For $\nu = \eta = 0.1$, dominant growth rates $\gamma^{\mathbf{vb}}(\mathbf{q})$ of the Bloch MHD stability modes as a function of q_2 on the line $q_1 = 0.2$, $q_3 = -0.15$ (a) and isosurfaces of the growth rates for a sample non-parity-invariant MHD steady state of type V shown in $\mathbb{Q}$ at the levels of 75%, 80%, 90% and 95% of the maximum over $\mathbb{Q}$ value $\gamma^{\mathbf{vb}}(\mathbf{q}) = 0.1762$ (b) for $\mathbf{q} = (0.4888, 0.2536, -0.2075)$. The axis q_1 points towards the reader, the frontal vertical plane is $q_1 = 1/2$, the q_2 axis points to the right, and the q_3 axis is vertical.

МГД устойчивость, экспоненциальный спектр, нет симметрии

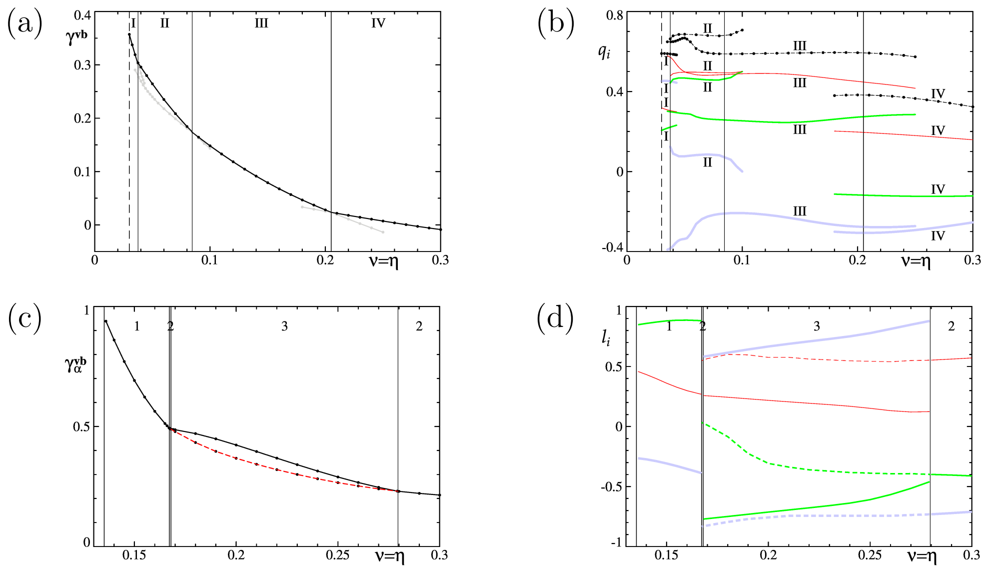


Рис. 18: Maximum growth rates of the Bloch MHD linear stability modes (a) and maximum slow-time growth rates due to the action of the combined MHD α-effect (c) for the sample non-parity-invariant MHD steady state of type V, for $\nu = \eta$. Wave vectors $\mathbf{q}$ (b), for which the growth rates are shown in (a), and directions of the wave vectors (d), for which the growth rates are shown in (c). Slow-time growth rates of large-scale MHD stability modes constituting branch 2 are globally maximum in two disjoint intervals of $\nu = \eta$; in the intervening interval of dominance of branch 3, branch 2 and the respective components of the wave vectors $\mathbf{q}$ are shown by dashed lines in (c), (d).

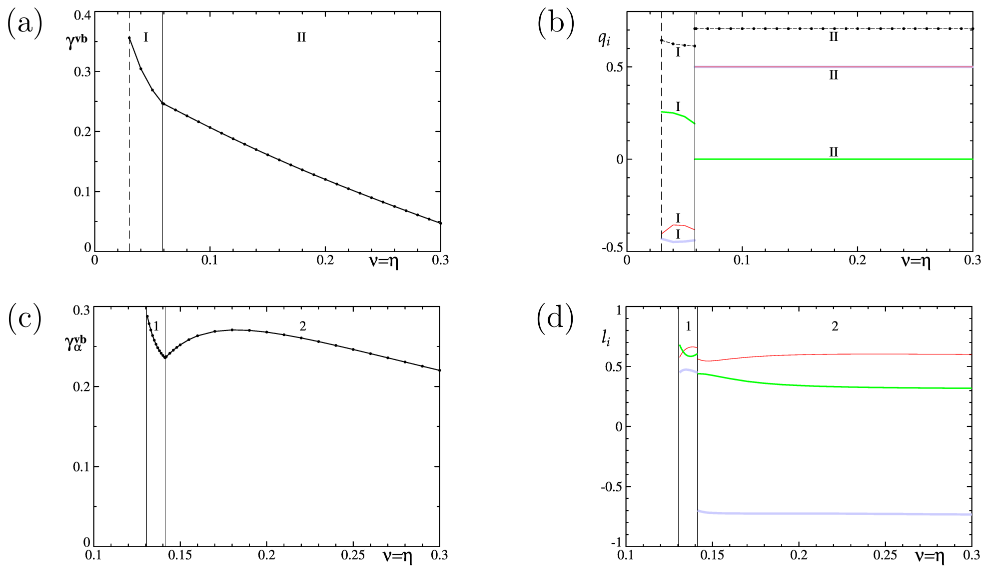


Рис. 19: Same as in Fig. 18, but for a sample MHD non-parity-invariant state of type I. In interval II, the growth rates are globally maximum over $\mathbb{Q}$ for $\mathbf{q} = (1/2, 0, 1/2)$.

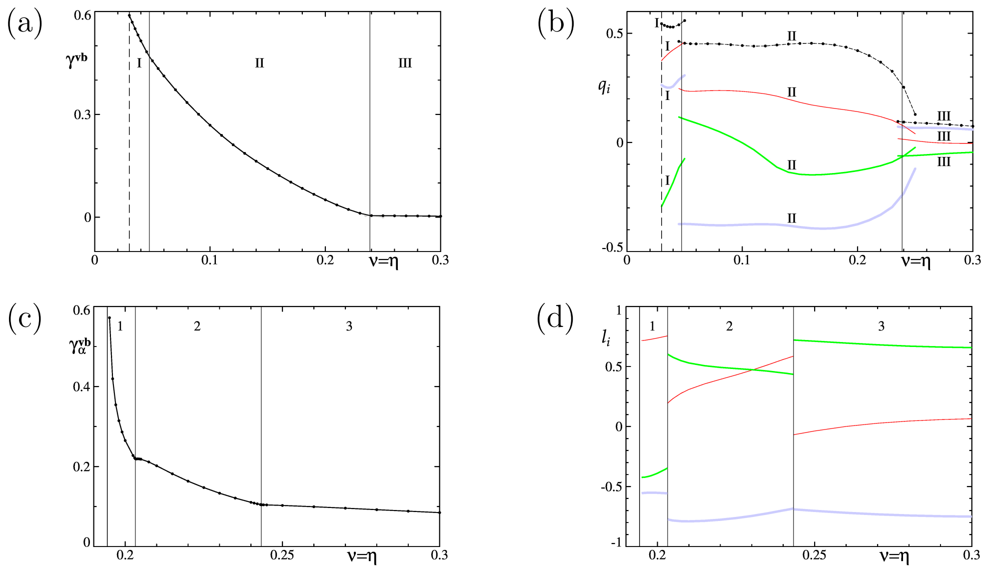


Рис. 20: Same as in Fig. 18, but for a sample non-parity-invariant MHD state of type E.

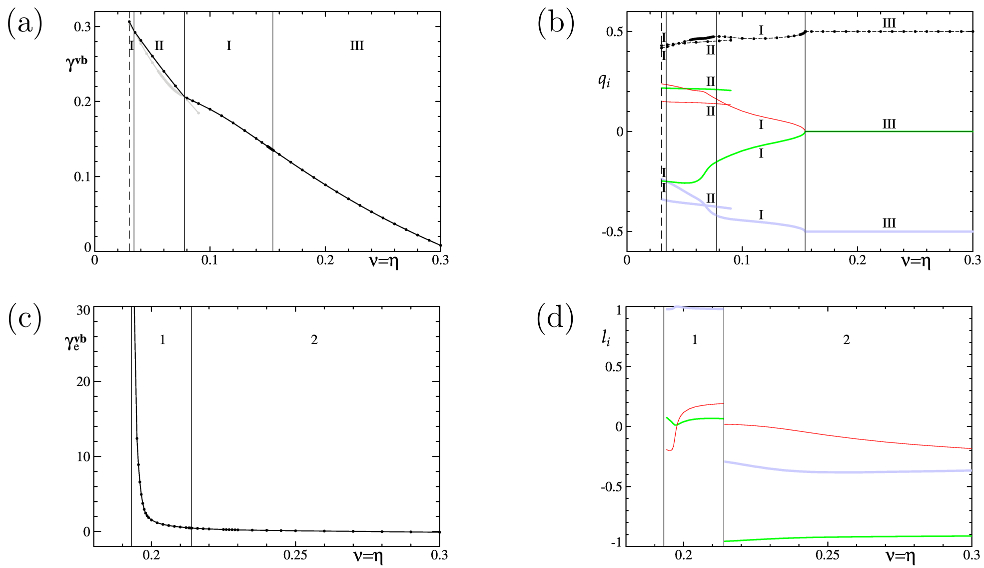


Рис. 21: Panels (a), (b) and (d) same as in Fig. 18(a), (b) and (d), but for a sample parity-invariant steady MHD state of type V, and maximum slow-time growth rates due to the action of the magnetic eddy diffusivity (c). In interval III, the growth rates are globally maximum over $\mathbb{Q}$ for $\mathbf{q} = (0, 0, -1/2)$. Growth rates of the Bloch MHD stability modes constituting branch I are globally maximum in two disjoint intervals of $\nu = \eta$ (a), (b).

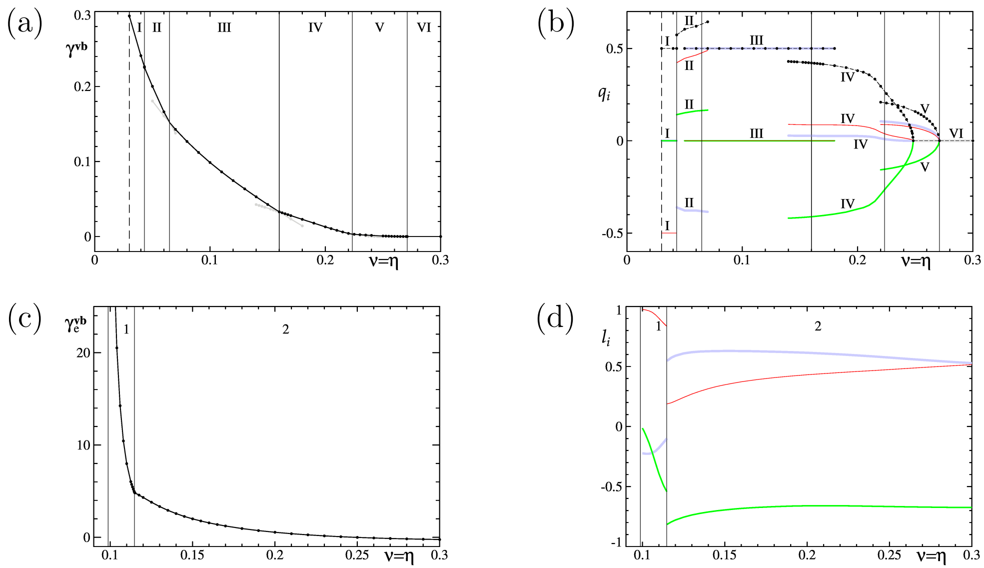


Рис. 22: Same as in Fig. 21, but for a sample parity-invariant steady MHD state of type I. In intervals I and III, the growth rates are globally maximum over $\mathbb{Q}$ for $\mathbf{q} = (-1/2, 0, 0)$ and $\mathbf{q} = (0, 0, 1/2)$, respectively, and in interval IV $\gamma^{\mathbf{vb}}(\mathbf{q}) = 0$ for $\mathbf{q} = 0$ is globally maximum.

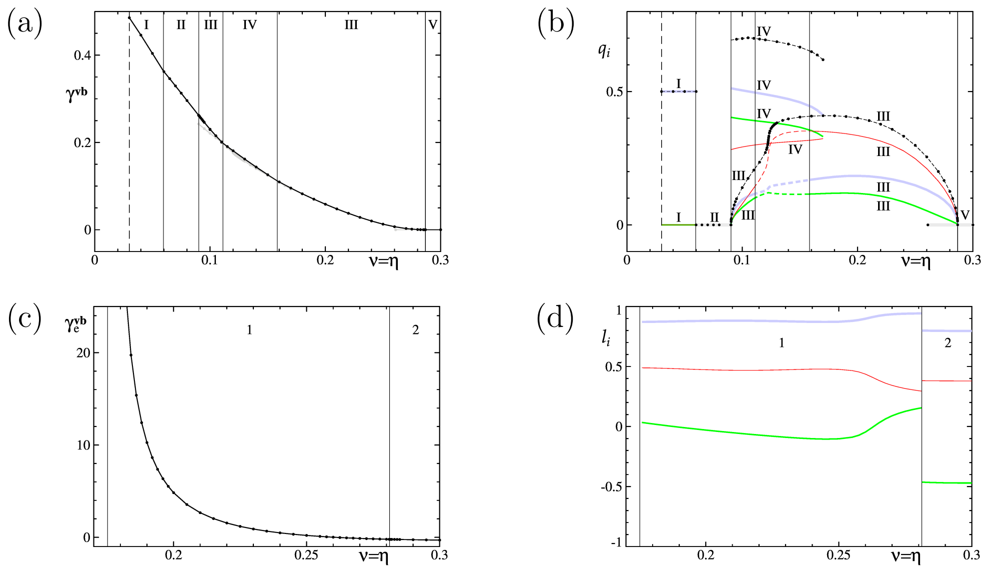


Рис. 23: Same as in Fig. 21, but for a sample parity-invariant MHD state of type E. In interval I, the growth rates are globally maximum over $\mathbb{Q}$ for $\mathbf{q} = (0, 0, 1/2)$, and in intervals II and V for $\mathbf{q} = 0$ ($\gamma^{\mathbf{vb}}(\mathbf{q}) = 0$ in interval V).

Выводы

• На рассматриваемом интервале изменения параметров максимальные в $\mathbb{Q}$ инкременты достигаются при таких $\mathbf{q}$, которые никак не малы.

• При уменьшении диффузионного параметра наблюдается уменьшение $|\mathbf{q}|$ только в 4 случаях (гидродинамическая задача, нет симметрий, V и центральная симметрия, I; и МГД задача, центральная симметрия, V и I), но оно несущественно.

• Таким образом, ни в одном из рассмотренных случаев наиболее неустойчивая мода не отвечает требованию высокого разделения масштабов, при котором работает формализм α-эффекта. Поэтому α-эффект не будет виден на фоне роста доминирующей моды блоховского типа, характеризующейся низким разделением пространственных масштабов.

• В сценарии Л.Д. Ландау развития турбулентности предполагалось постепенное усложнение течения с появлением в последовательности бифуркаций *временны́х* периодичностей, несоизмеримых с уже присутствующими в течении. Исследованный механизм развития неустойчивостей аналогичен этому сценарию, хотя он сводится к каскадному появлению дополнительных *пространственных* частот. Если в какой-то момент времени и образуется существенное разделение пространственных масштабов, этим каскадным механизмом оно уничтожается.

• Таким образом, α-эффект – по-видимому, слишком простой механизм, чтобы реализовываться в реальных природных МГД или гидродинамических системах. Необходимо выявить более реалистичные механизмы генерации магнитного поля и развития неустойчивостей.

• Напротив, при больших (локальных) коэффициентах диффузии $|\mathbf{q}|$ имеет тенденцию убывать. Поэтому развитие вихревой диффузии представляется совместимым с полученными результатами.