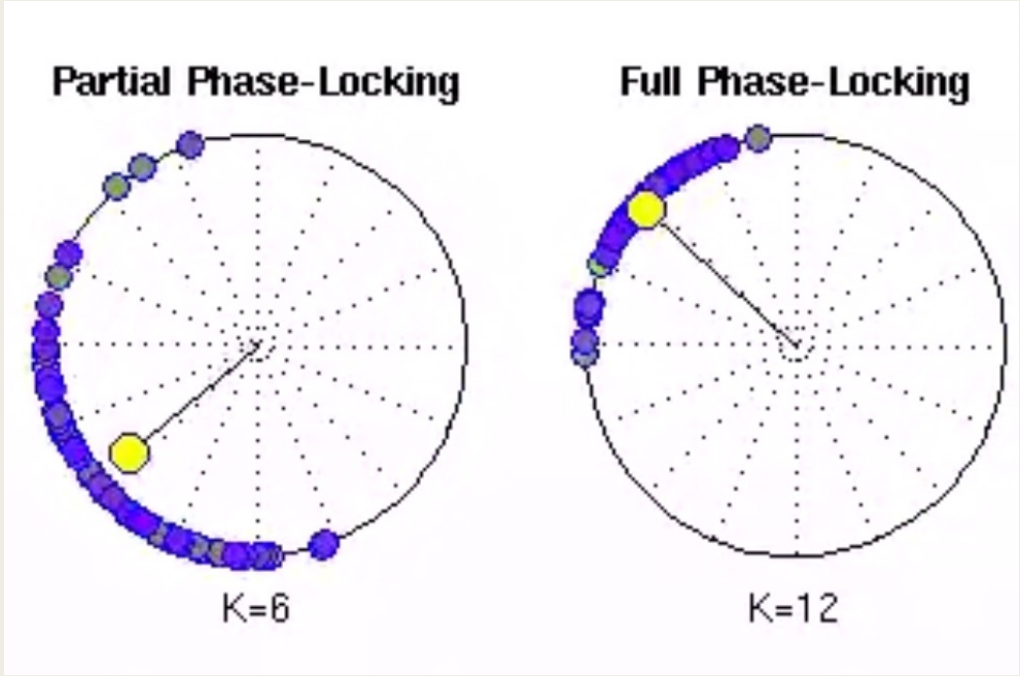
АСИММЕТРИЯ И ПРОГНОЗ

Как предсказать событие де-синхронизации двух осцилляторов в обычно синхронизированной системе, не зная систему

Е.Блантер, М.Елаева, А.Шаповал, М.Шнирман

Введение: от синхронизации осцилляторов к экстремальным событиям

- Описание фазовой синхронизации двух осцилляторов (Adler, 1946)
- Модель Курамото (Kuramoto, 1975; Acebron et al, 2005, PRE; Rodriges et al, 2016)
- Модель Курамото-Сакагучи (Sakaguchi&Kuramoto, 1986; Chen, Engelbrecht & Mirollo, 2019)
- Частичная синхронизация или химера (Omel'chenko et al, 2008, PRL; Parastesh et al, 2021, Physics reports)
- Связь положительная и отрицательная (Hong&Strogatz, 2011,2012, Chowdhuri, et al, 2020, PRE)
- Сети, графы (Perron, 2021, PRE; Rings et al, 2022, Scientific Reports), электрические сети (Witthaut et al, 2022, Revies of Modern Physics)
- Восстановление связи, восстановление графа связей - сложно (Ceccini, Rok & Pikovsky, 2021, PRE)
- События синхронизации (нейрология) и де-синхронизации (Солнце)



Уравнение Курамото

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j - \theta_i), \qquad i = 1 \ldots N,$$

СИНХРОНИЗАЦИЯ: $\dot{\theta}_i \to \Omega$

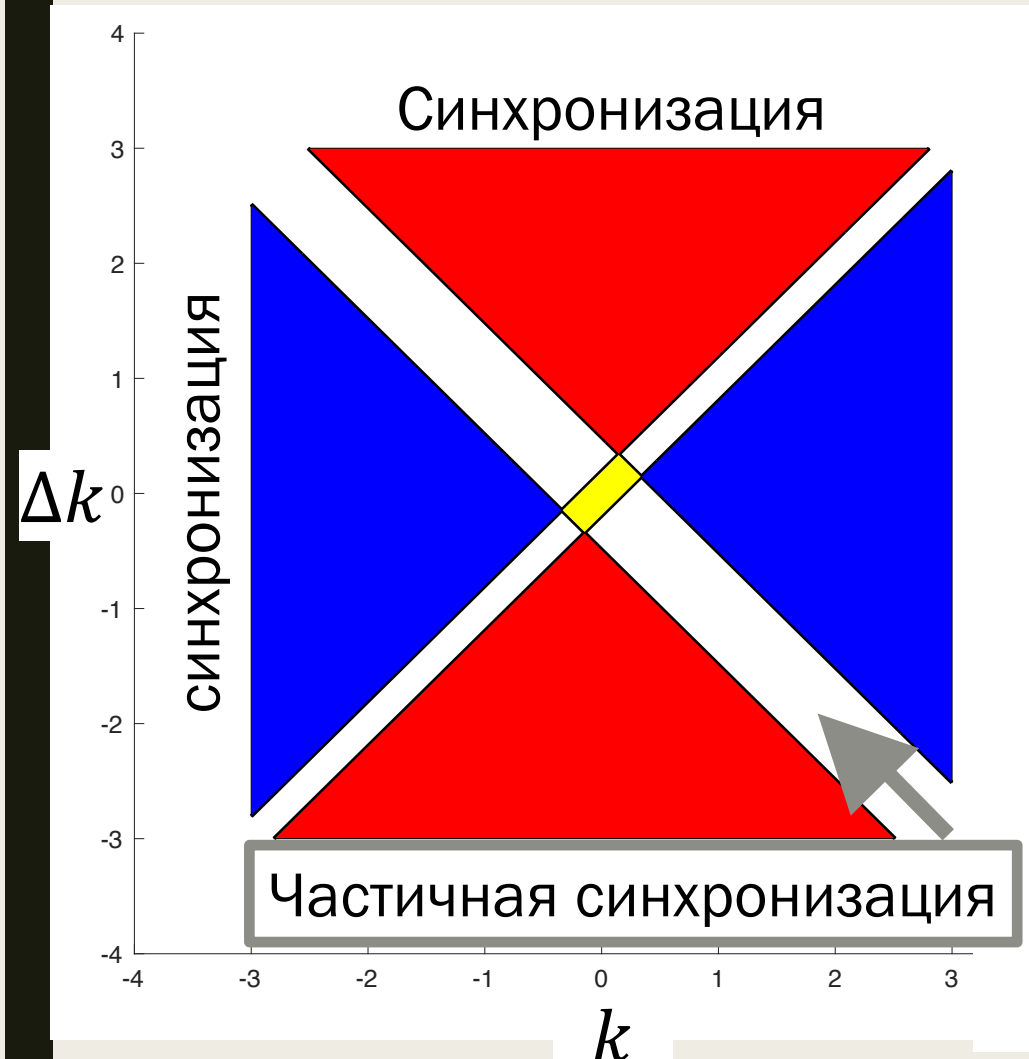
Запись через среднюю фазу и параметр порядка |r|<1: $\dot{\theta}_i = \omega_i + Kr\sin(\theta - \theta_i)$

План доклада

- **Прямая задача** в модели цепочки Курамото с тремя осцилляторами: обобщение известной модели для неодинаковых коэффициентов связи, обобщение параметра порядка. Неоднородность связи и асимметрия параметра порядка.
- **Обратная задача**: определение асимметрии параметра порядка по разности фаз двух осцилляторов при помощи решения обратной задачи.
- Инвариантные свойства асимметрии
- **Прогноз:** использование асимметрии параметра порядка для прогноза редких событий де-синхронизации между осцилляторами

Цепочка из трех осциллляторов модель Курамото:

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 + q_1 \sin(\theta_2 - \theta_1)$$
$$\dot{\theta}_2 = \omega_2 + q_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) + q_2 \sin(\theta_3 - \theta_2)$$
$$\dot{\theta}_3 = \omega_3 + q_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)$$



Естественные частоты и связь постоянны

Синхронизация $\theta_i - \theta_j = \text{const}$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_1 - \theta_3 < \frac{\pi}{2}$$

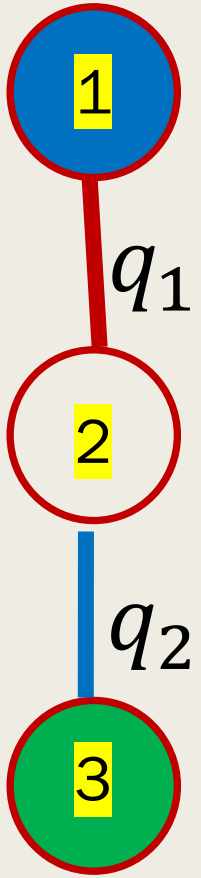
$$k = (q_1 + q_2)/2$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta_1 - \theta_3 < \frac{3\pi}{2}$$

$$\Delta k = (q_1 - q_2)/2$$

Обобщенный параметр порядка:

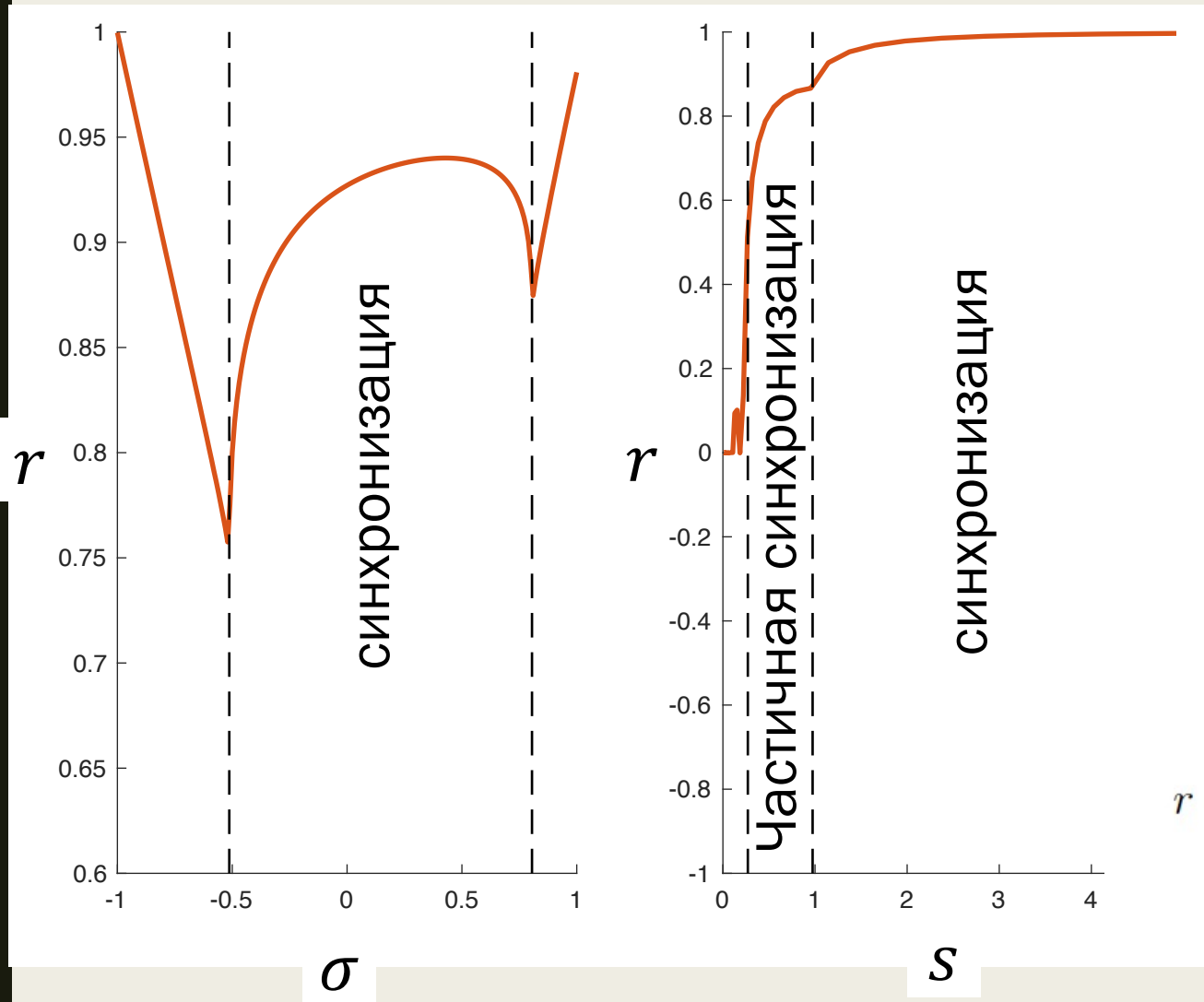
$$r = \frac{q_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + q_2 \cos(\theta_2 - \theta_3)}{|q_1| + |q_2|}$$



Schröder et al. 2017

Параметр порядка и его асимметрия

$$A = |r(\sigma) - r(-\sigma)|$$



Интенсивность связи: Неоднородность связи:

$$s = \max(|k|, |\Delta k|), \quad \sigma = \begin{cases} \frac{\Delta k}{k} & \text{if} \quad s = |k| \\ \frac{k}{\Delta k} & \text{if} \quad s = |\Delta k| \end{cases}$$

$$s > 0, \qquad -1 < \sigma < 1$$

Параметр порядка:

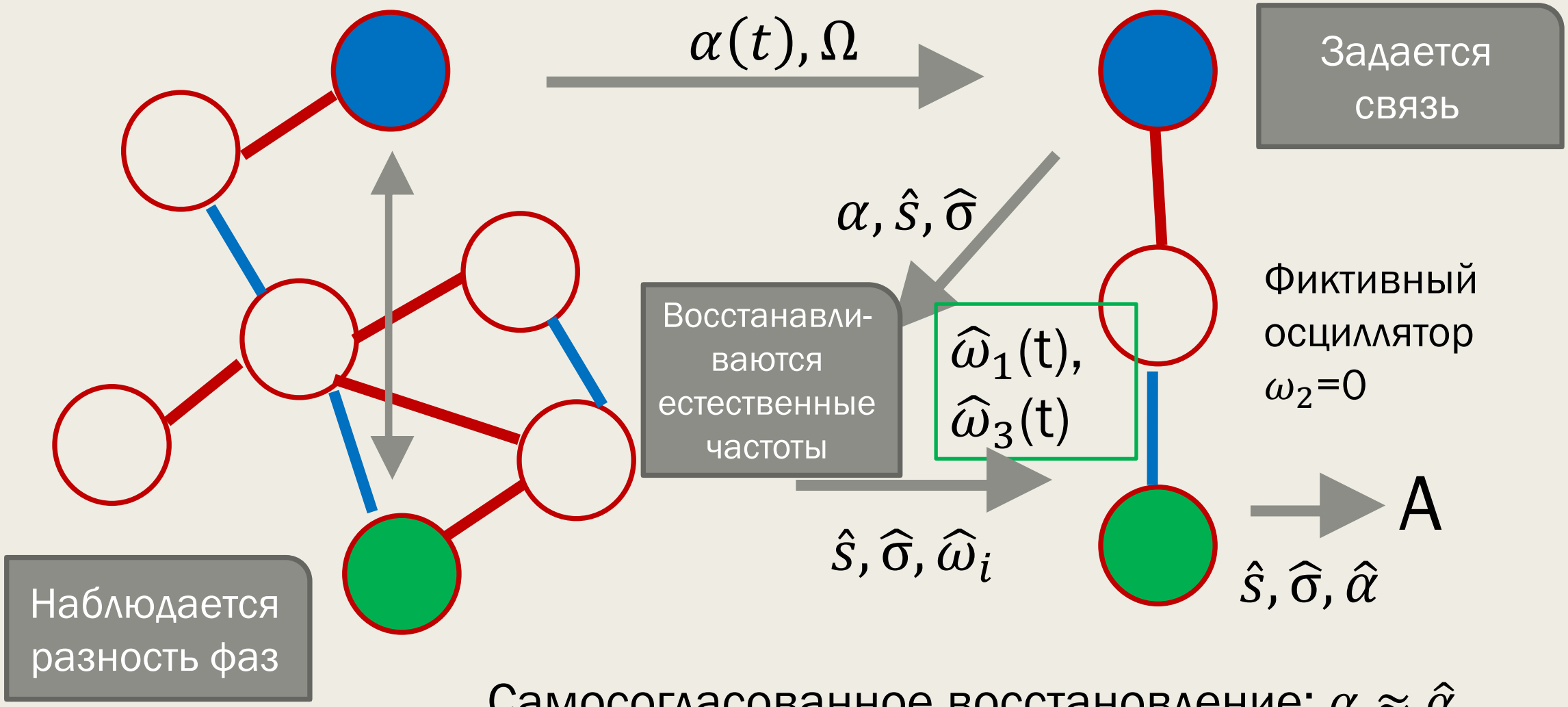
$$r = \begin{cases} \frac{1+\sigma}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1-\sigma}{2}\cos(\alpha-\beta), & s = |k| \\ \frac{1+\sigma}{2}\cos(\alpha+\beta) - \frac{1-\sigma}{2}\cos(\alpha-\beta), & s = |\Delta k| \end{cases}$$

$$\alpha = (\theta_1 - \theta_3)/2\ ,\ \beta = (\theta_1 + \theta_3)/2 - \theta_2$$

Прямая задача:

- Исследована цепочка Курамото с произвольными коэффициентами связи
- Модель реализует три типа поведения: синхронизацию, частичную синхронизацию и десинхронизацию.
- Связь в цепочке описана через интенсивность s и коэффициент неоднородности связи σ
- Обобщен параметр порядка r
- Введена асимметрия параметра порядка A

Асимметрия для двух осциллляторов: описание через воображаемую цепочку



Самосогласованное восстановление: $\alpha \approx \hat{\alpha}$

Восстановление естественных частот

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 + q_1 \sin(\theta_2 - \theta_1)$$
$$\dot{\theta}_2 = \omega_2 + q_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) + q_2 \sin(\theta_3 - \theta_2)$$
$$\dot{\theta}_3 = \omega_3 + q_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)$$

$$\hat{\omega}_1 = \frac{3}{2}\Omega - \frac{\hat{\omega}_2}{2} + \Delta\hat{\omega}, \quad \hat{\omega}_3 = \frac{3}{2}\Omega - \frac{\hat{\omega}_2}{2} - \Delta\hat{\omega}$$

$$\alpha = (\theta_1 - \theta_3)/2\ ,\ \beta = (\theta_1 + \theta_3)/2 - \theta_2$$

$$k = (q_1 + q_2)/2 \qquad \Delta k = (q_1 - q_2)/2$$

Задается как параметр

$$\dot{\alpha} = \Delta\omega - k \sin\alpha \cos\beta - \Delta k \sin\beta \cos\alpha,$$
$$\dot{\beta} = \frac{3}{2}(\Omega - \omega_2) - 3k \sin\beta \cos\alpha - 3\Delta k \sin\alpha \cos\beta$$

Выражается из уравнений в предположении синхронизации

Известно

Интенсивность связи достаточная для само-согласованного восстановления

$$\hat{s}^2 > \begin{cases} \dfrac{(\Omega-\omega_2)^2}{4\left(\cos^2\tilde{\alpha}+\hat{\sigma}^2\sin^2\tilde{\alpha}\right)}\left(1+\left(\dfrac{(1+\hat{\sigma})\sin 2\tilde{\alpha}}{2\left(\hat{\sigma}\sin^2\tilde{\alpha}-\cos^2\tilde{\alpha}\right)}\right)^2\right), & \hat{s}=|\hat{k}| \\ \dfrac{(\Omega-\omega_2)^2}{4\left(\hat{\sigma}^2\cos^2\tilde{\alpha}+\sin^2\tilde{\alpha}\right)}\left(1+\left(\dfrac{(1+\hat{\sigma})\sin 2\tilde{\alpha}}{2\left(\sin^2\tilde{\alpha}-\hat{\sigma}\cos^2\tilde{\alpha}\right)}\right)^2\right), & \hat{s}=|\Delta\hat{k}| \end{cases}$$

$$\hat{s}^2 > \begin{cases} \dfrac{(\Omega-\omega_2)^2}{4\left(\cos^2\tilde{\alpha}+\hat{\sigma}^2\sin^2\tilde{\alpha}\right)}\left(1+\left(\dfrac{(1-\hat{\sigma})\sin 2\tilde{\alpha}}{2\left(\hat{\sigma}\sin^2\tilde{\alpha}+\cos^2\tilde{\alpha}\right)}\right)^2\right), & \hat{s}=|\hat{k}| \\ \dfrac{(\Omega-\omega_2)^2}{4\left(\hat{\sigma}^2\cos^2\tilde{\alpha}+\sin^2\tilde{\alpha}\right)}\left(1+\left(\dfrac{(1-\hat{\sigma})\sin 2\tilde{\alpha}}{2\left(\sin^2\tilde{\alpha}+\hat{\sigma}\cos^2\tilde{\alpha}\right)}\right)^2\right), & \hat{s}=|\Delta\hat{k}| \end{cases}$$

$$s_0^2 = \begin{cases} \dfrac{(\Omega-\omega_2)^2}{4\cos^2\tilde{\alpha}}\left(1+\dfrac{\sin^2 2\tilde{\alpha}}{\cos^2 2\tilde{\alpha}}\right), & \hat{s}=|\hat{k}| \\ \dfrac{(\Omega-\omega_2)^2}{4\sin^2\tilde{\alpha}}\left(1+\dfrac{\sin^2 2\tilde{\alpha}}{\cos^2 2\tilde{\alpha}}\right), & \hat{s}=|\Delta\hat{k}| \end{cases}$$

Обратная задача в применении к кольцу из трех осцилляторов

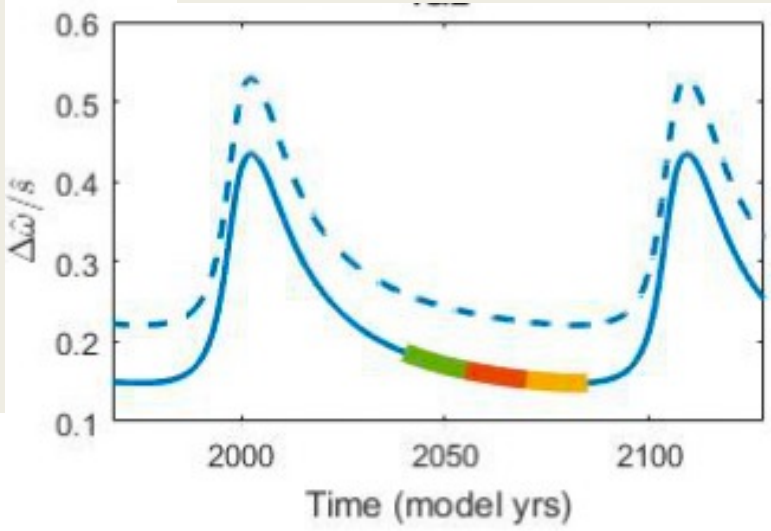
- **Модель:** Рассматривается модель Курамото из трех осцилляторов, где каждый связан с каждым. Выбираются параметры, при которых наблюдается частичная синхронизация.
- **Восстановление:** Для каждой пары осцилляторов решается обратная задача (восстанавливаются естественные частоты) по их разнице фаз в предположении, что они являются крайними в цепочке из трех осцилляторов.
- **Условия:** Восстановление происходит в предположении синхронизации. Используются несимметричные параметры ($\hat{\sigma} \neq 0, \omega_2 \neq \Omega$). Используется достаточно большая интенсивность связи $\hat{s} > s_0$.
- Целью восстановления является определение асимметрии A

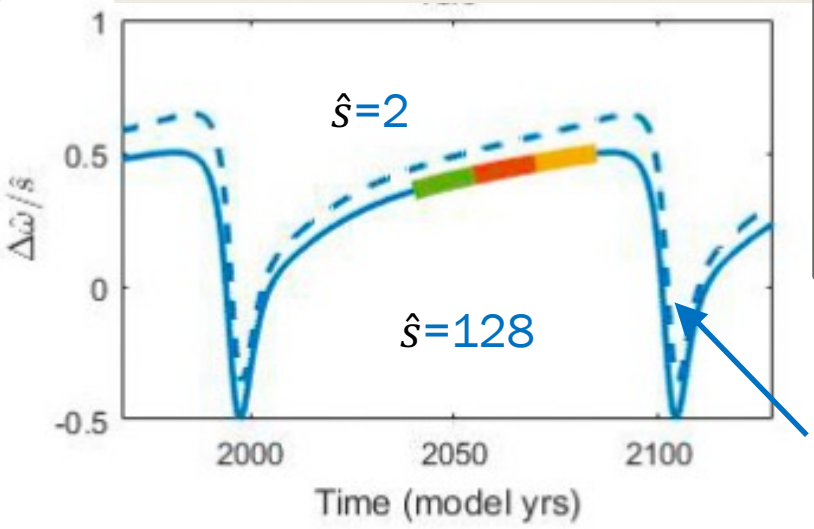
Восстановление в кольце из трех осцилляторов

Синхронизированная пара осцилляторов

Де-синхронизированная пара осцилляторов

Восстановленная разница естественных частот, нормированная на интенсивность связи.

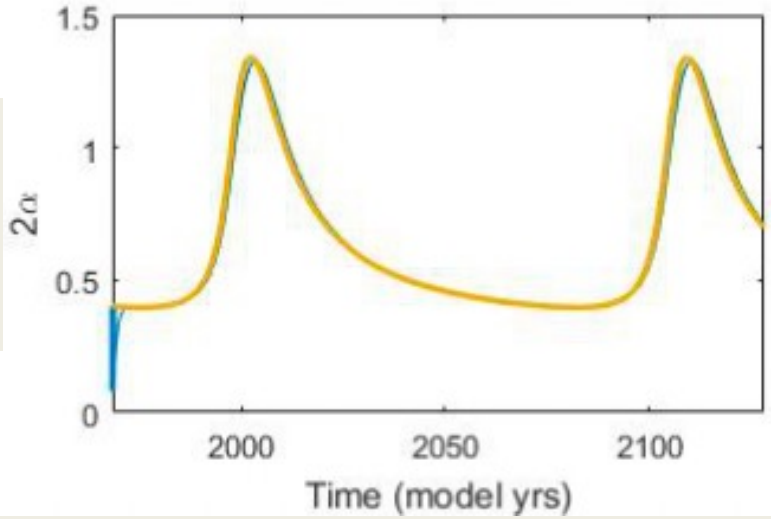


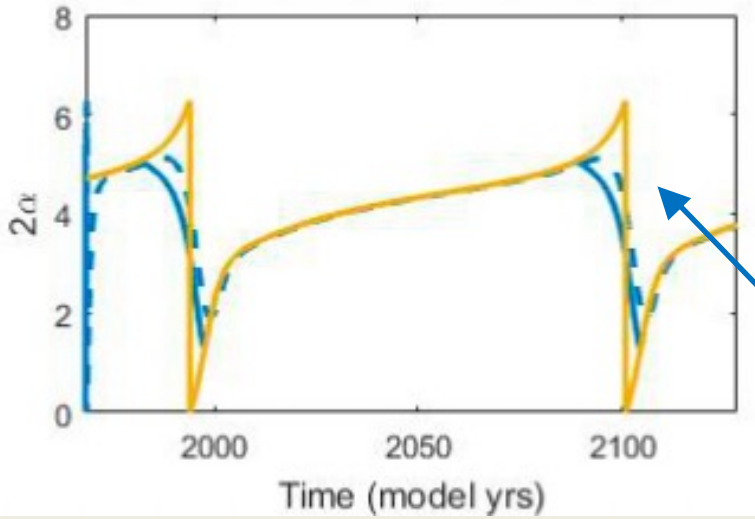


В случае общего положения восстанавливаются переменные естественные частоты

При де-синхронизации меняется знак разницы естественных частот

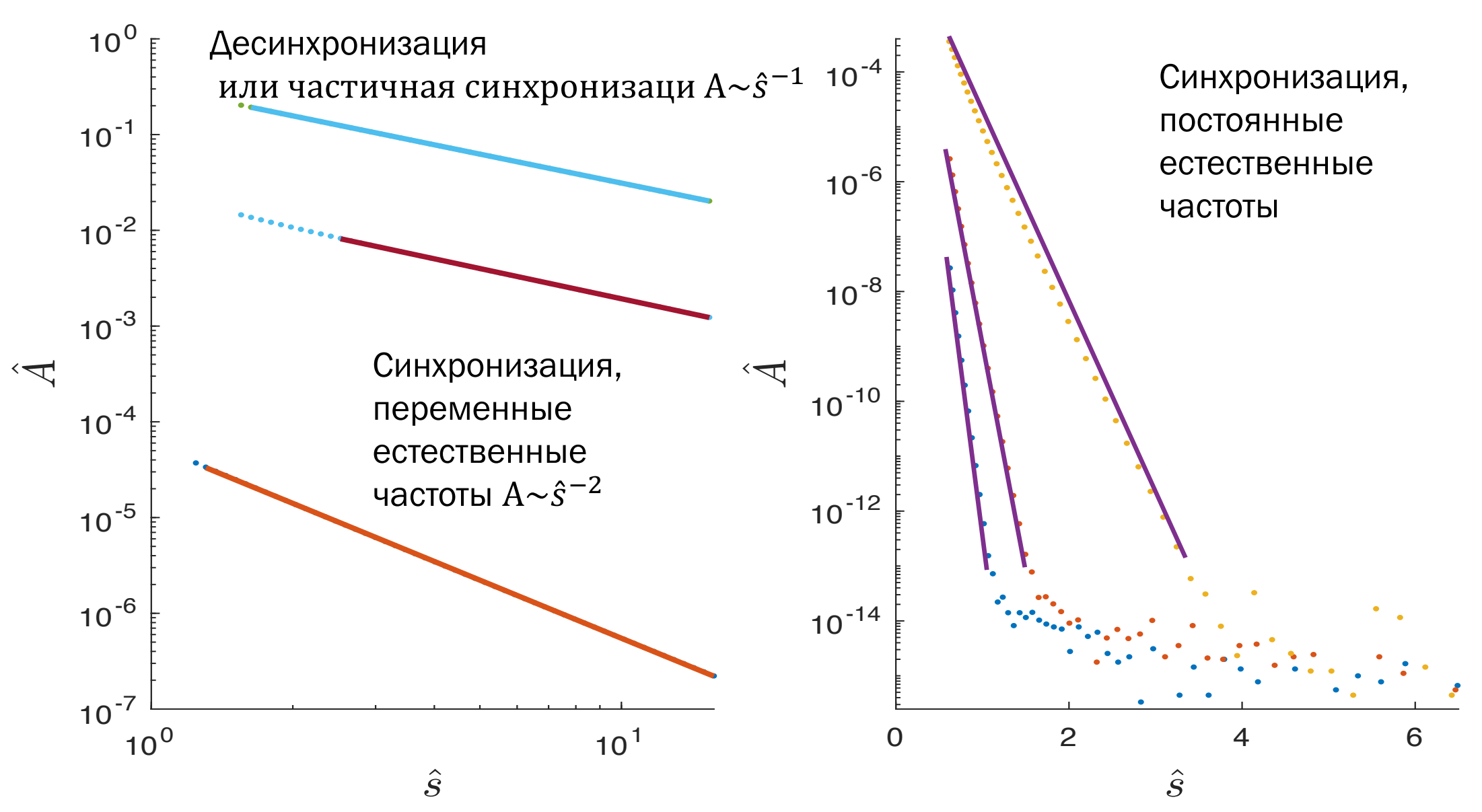
Разность фаз: Наблюдаемая восстановленная



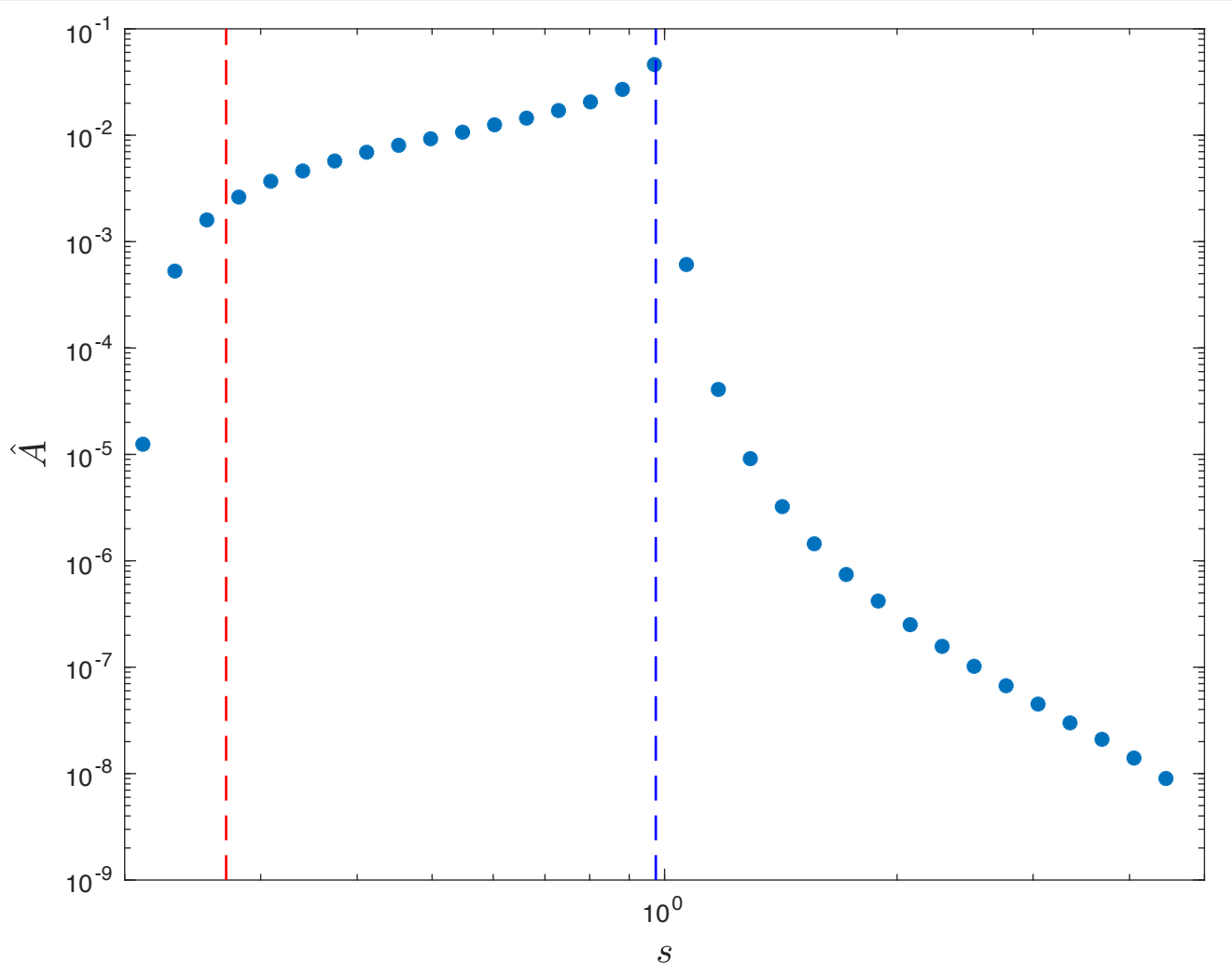


Само-согласованность нарушается при де-синхронизации

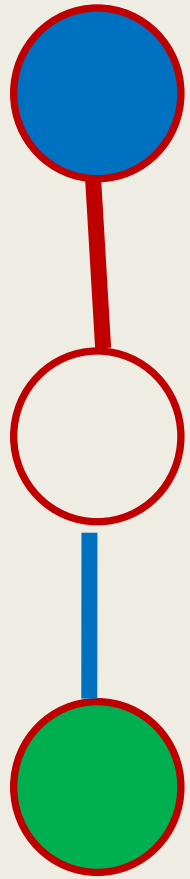
Асимметрия в цепочке из трех осцилляторов



Асимметрия и граница синхронизации



1. Берем цепочку с постоянными естественными частотами и σ, моделируем $\alpha(t)$ при разных s .
2. Самосогласованно восстанавливаем $\hat{\omega}_i(t,s)$ при одних и тех же $\hat{\sigma}$ и $\hat{s}$ (большом)
3. Определяем среднюю асимметрию A(s) по всему интервалу времени моделирования



Инвариантные свойства асимметрии

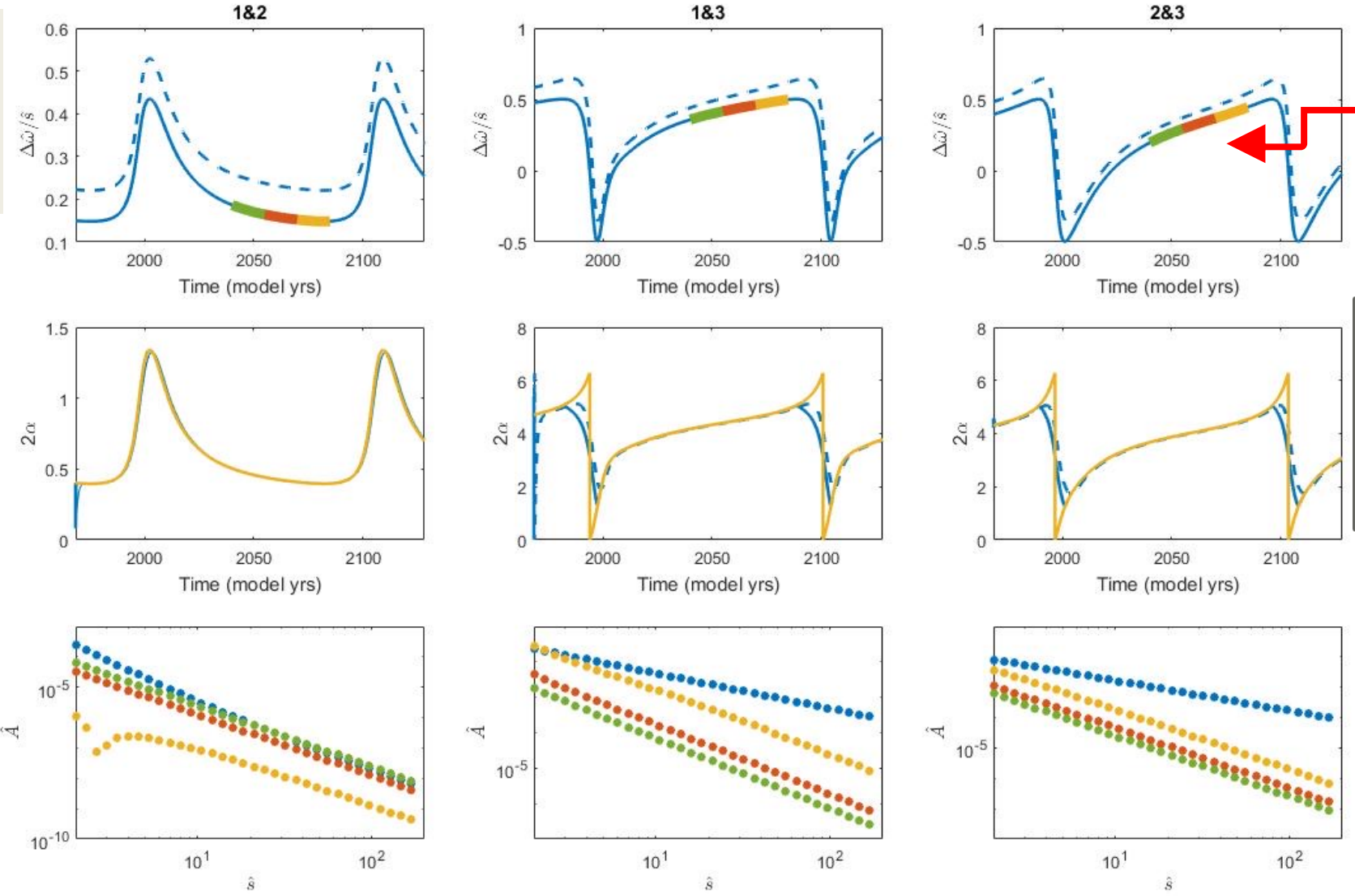
- Асимметрия максимальна на границе синхронизации
- В случае общего положения, с ростом интенсивности связи асимметрия убывает степенным образом
- Если система синхронизирована, то степень убывания асимметрии равна 2
- Если система де-синхронизирована, то степень убывания асимметрии равна 1.

События и асимметрия в модели с частичной синхронизацией

Нормированная разница естественных частот

Разность фаз

Асимметрия в обратной задаче



15-летние интервалы времени перед событием

Скачки разницы фаз возникают при де-синхронизации

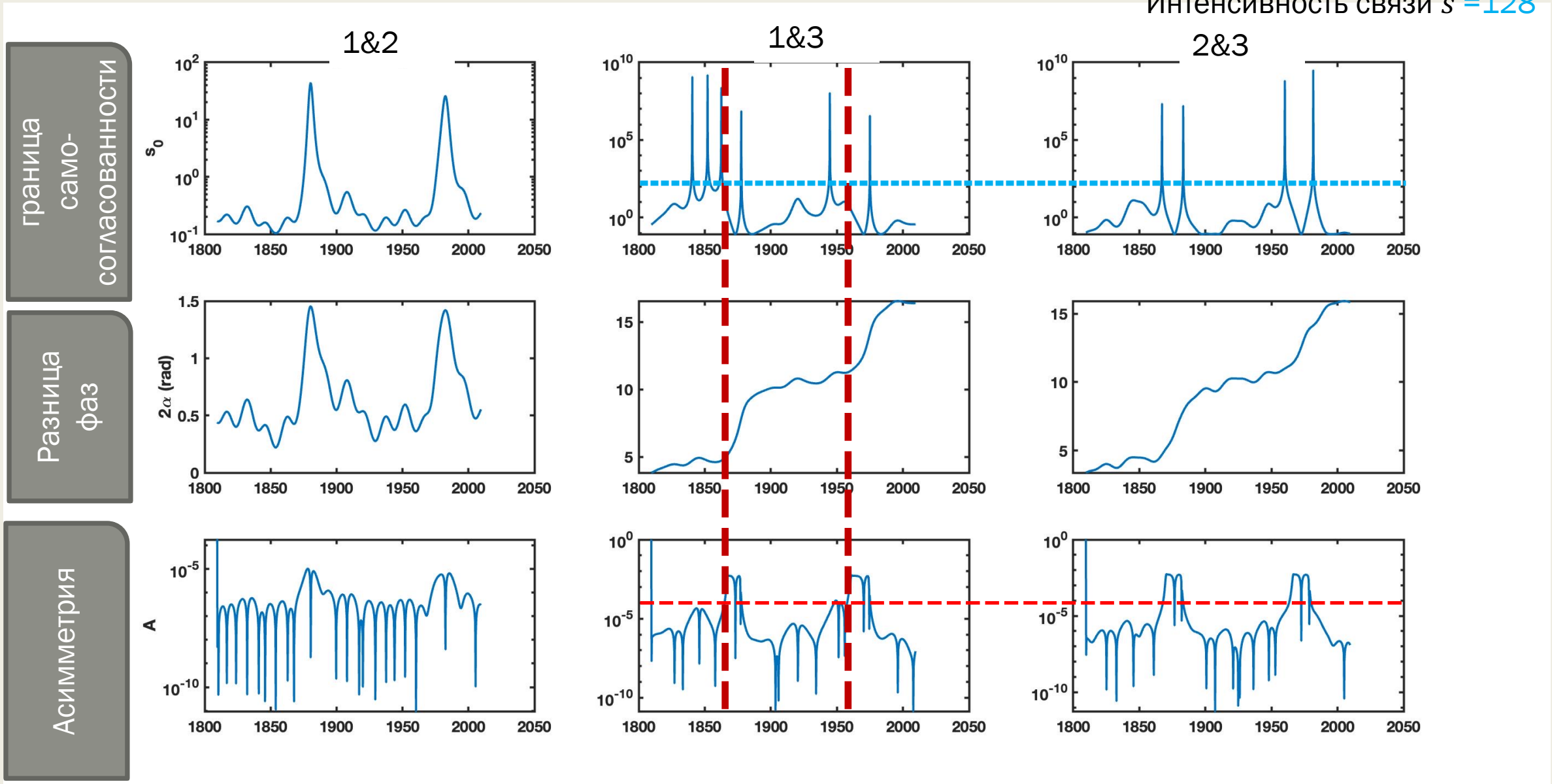
Рост асимметрии по мере приближения к событию

Все наклоны равны 1

Если событие есть – наклон 1, если нет - 2

Прогноз и асимметрия в модели

Интенсивность связи $\hat{s}$ =128

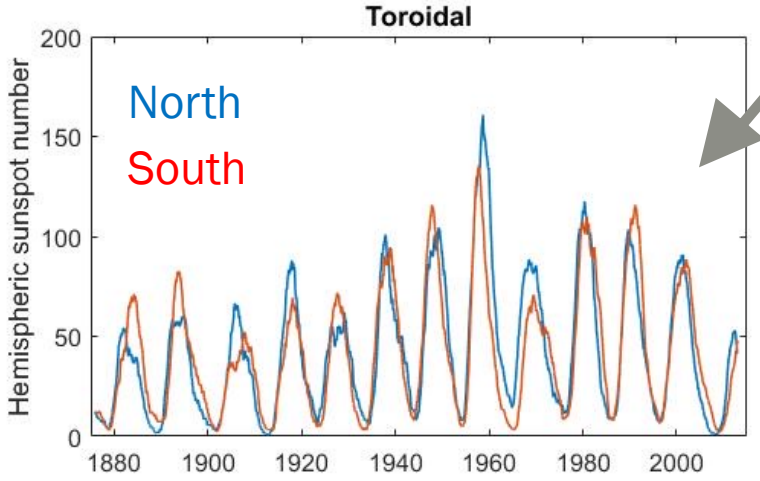


Прогноз в модели

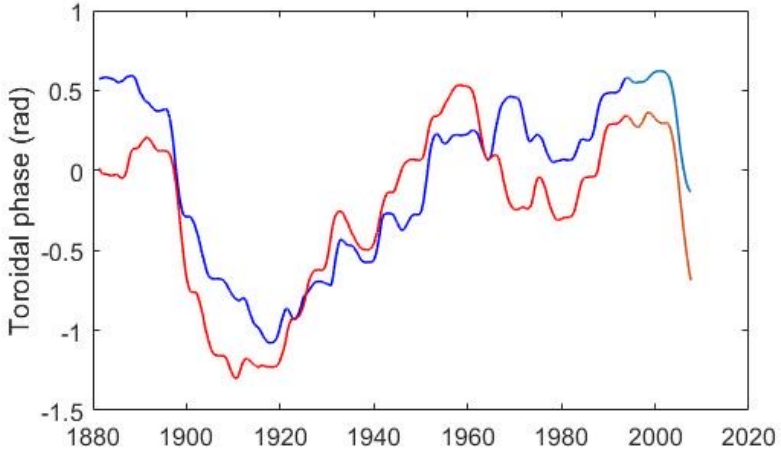
- Рост асимметрии предшествует де-синхронизации
- Аномально большая асимметрия возникает при достаточной интенсивности связи $\hat{s} > s_0$
- Ложных тревог не возникает

Солнечные данные: постановка задачи

11-летний солнечный цикл

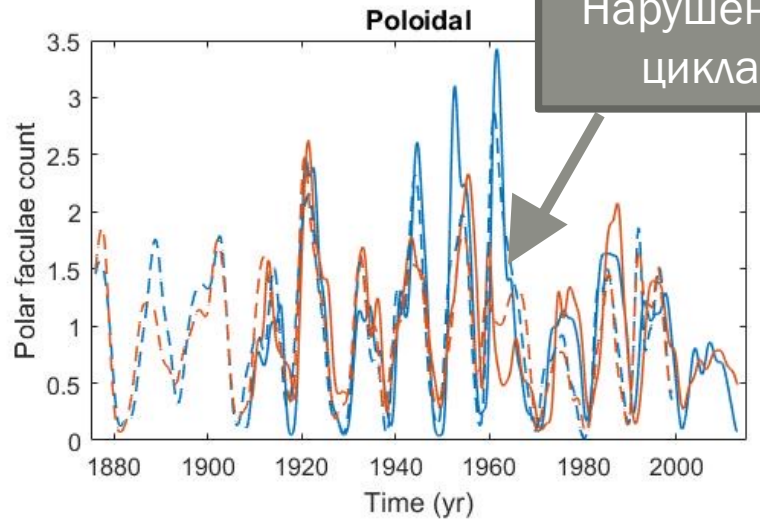


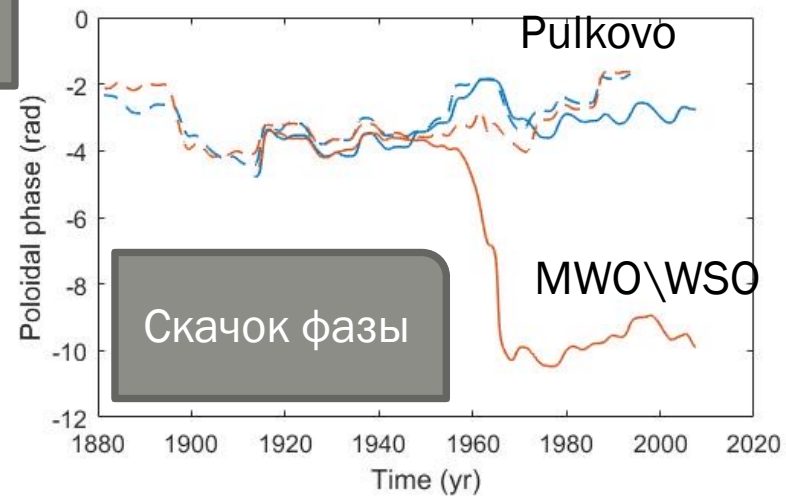
Фаза солнечного цикла



Прогноз следующего цикла по полярному полю предполагает синхронизацию

Нарушение цикла





Скачок фазы

Аномальные циклы могут вызываться де-синхронизацией

Как спрогнозировать де-синхонизацию по фазовым данным?

Приложение к солнечным данным

- Рассматриваются фазовые данные индексов, отражающих магнитное поле Солнца (площади групп солнечных пятен на разных широтах, HSN, индексы полярных факелов MWO\WSO, Пулково, полярное поле WSO)
- Предположение об их связи происходит из теории солнечного динамо
- Предположение о фазовой синхронизации происходит из 11-летнего солнечного цикла
- Данные рассматриваются независимо в северной и южной полусферах

События и асимметрия в Солнце: южная полусфера

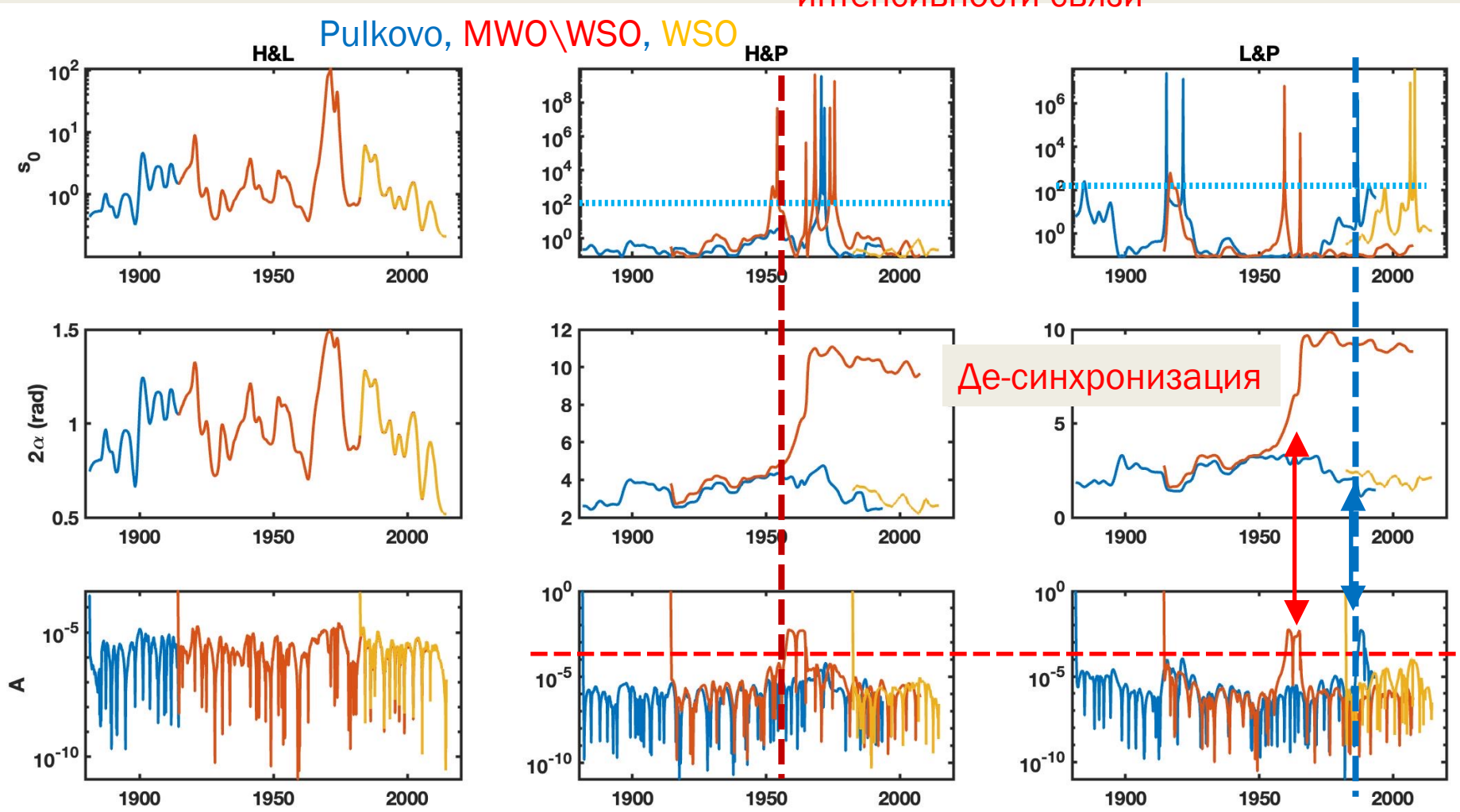
Тревога при недостаточной интенсивности связи

Тревога при достаточной интенсивности связи

граница самосогласованности

Разница фаз

Асимметрия



Скачок фазы

Подъем асимметрии на 3 порядка

Интенсивность связи $\hat{s}$ =128

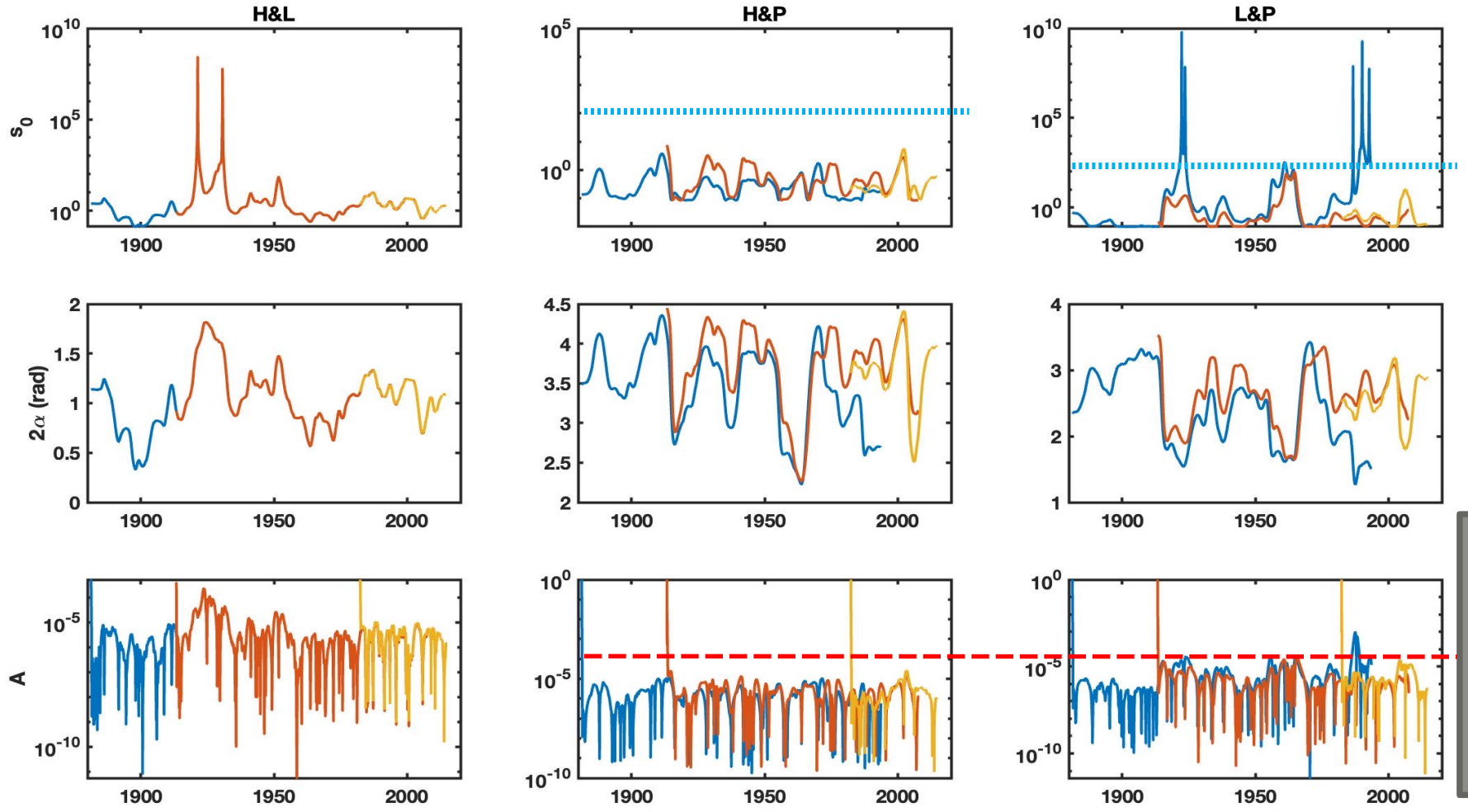
События и асимметрия в Солнце: северная полусфера

Тревога при недостаточной интенсивности связи

граница самосогласованности

Разница фаз

Асимметрия



Подъем асимметрии на 1-2 порядка

Результаты

- Определен новый функционал «асимметрия параметра порядка», аномальный рост которого является предвестником фазовой де-синхронизации
- Асимметрия предсказывает скачки фазовой разницы в модели и в солнечной активности
- Асимметрия потенциально может дать ложную тревогу там, где необходимая интенсивность связи превышает выбранную.

Заключение: открытые вопросы

- Полярное поле – это важные, но «плохие» данные. Важные, потому что по ним прогнозируется следующий цикл (Petrovay, 2021). Как понять, насколько плохие?
- Имеется предвестник, который реагирует на де-синхронизацию, но не только на нее. Можно ли разделить разные типы де-синхронизации по асимметрии?
- Возможное применение к Солнцу: оценка вероятной успешности прогноза максимума солнечного цикла по полярному полю. Как тут ставится задача?
- Возможно ли применение к сейсмичности? Как прогноз события или как оценка прогноза?