

СИЛЬНЕЙШИЙ АФТЕРШОК В СЕЙСМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ЭПИДЕМИЧЕСКОГО ТИПА (ETAS)

Г. Молчан

Задача:

Распределение магнитуды сильнейшего афтершока m_a ,
инициированного событием $m_0 \gg 1$
(или закон Бота для $m_0 - m_a$) в рамках ETAS моделей

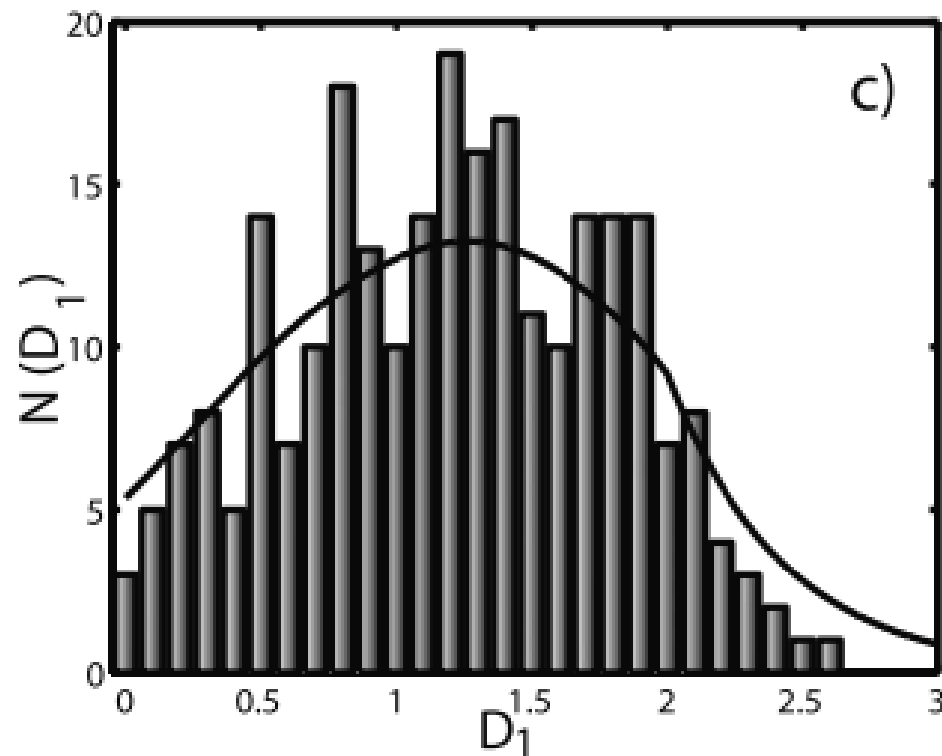
Закон Бота (1965): для неглубоких событий

$$m_0 - \langle m_a \rangle \approx 1.2$$

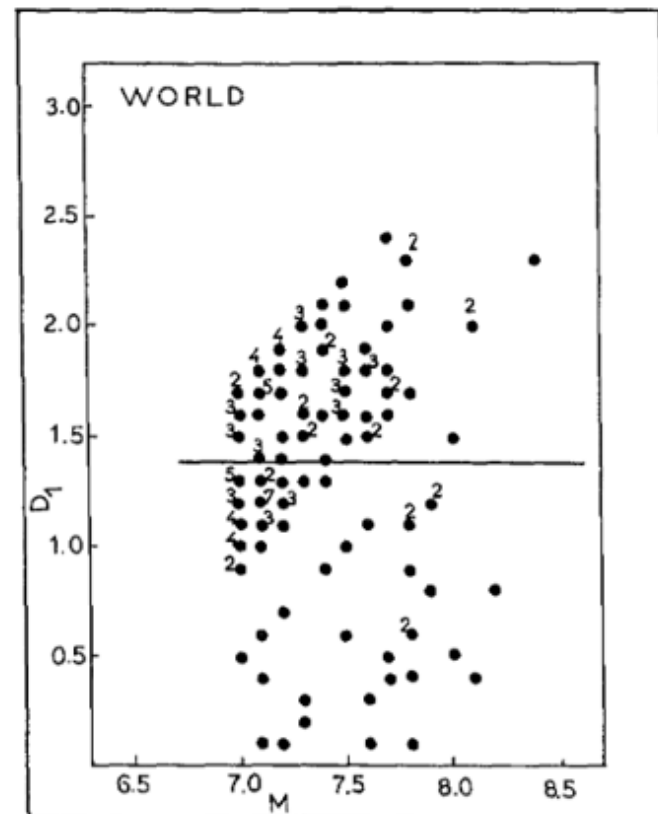
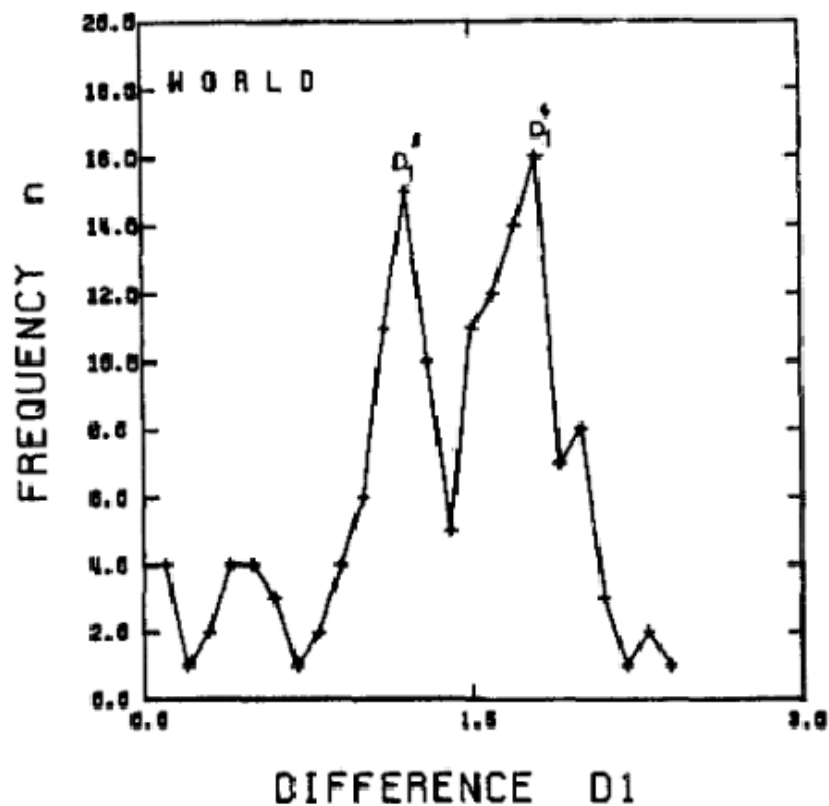
Примеры

(+) Новая Зеландия (Console et al 2003),

1962-99, $h < 33\text{km}$, $M_c = 4$, $m_0 \geq 6$



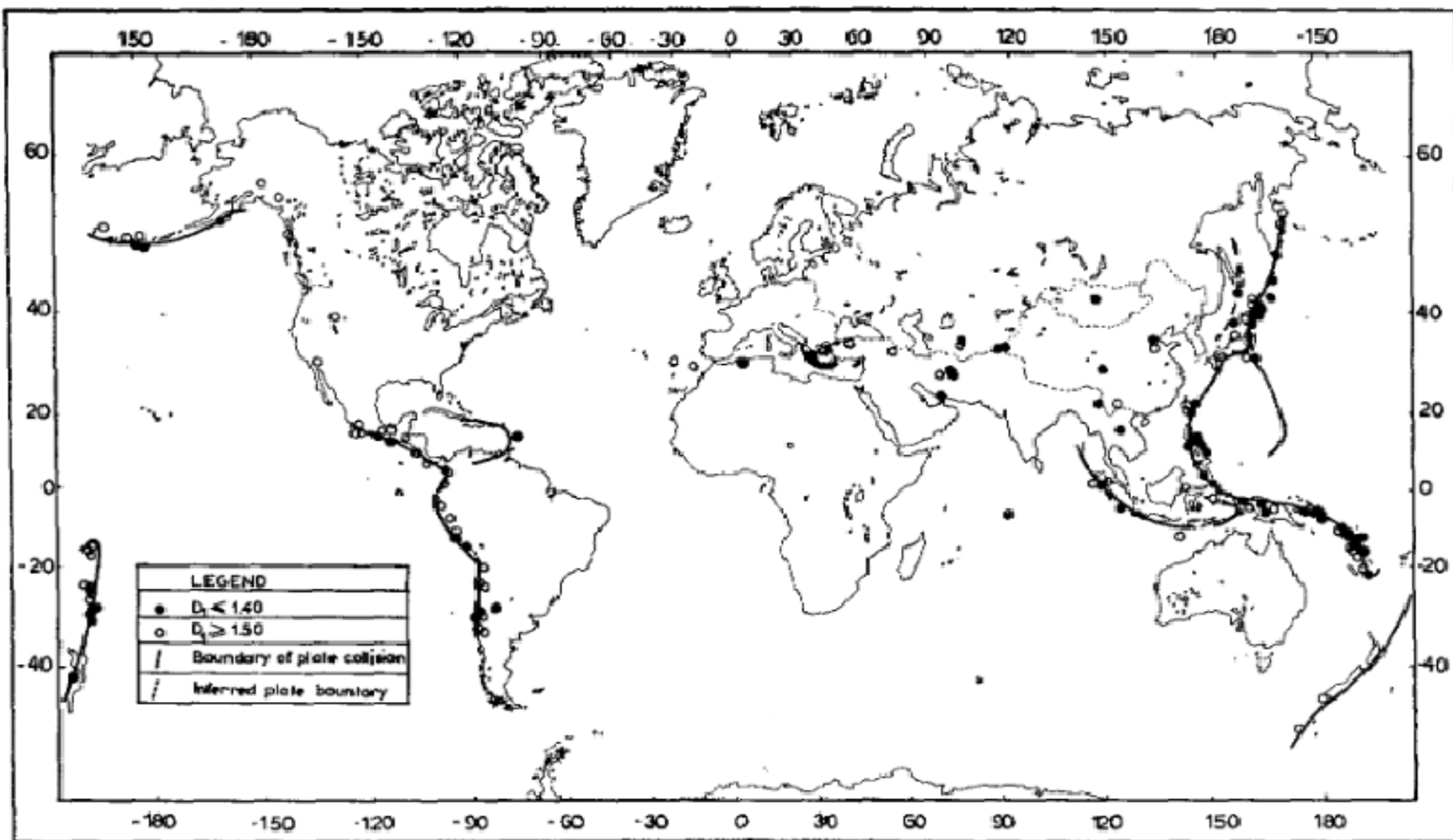
**(-) Kagan and Jackson (1999): 22% M 7.5 (Мир) – дуплеты
($R < \text{длина разрыва}$, $dT < \text{время повторяемости } M$)**



(-) Тихоокеанский пояс (Tsapanos, 1990)

1964-1986 , $N=145$, $m_0 - m_a \approx 1.2 \text{ \& } 1.8$, $h < 50\text{km}$, $M_c=5$, $m_0 \geq 7$

(-) Тихоокеанский пояс (Tsapanos, 1990)



ETAS(F) модель: дерево Гальтона-Ватсона в фаз. пространстве

$$x = (t, g, m) = (\text{время, место, магнитуда})$$

начальное событие

$$x_0 = (t_0, g_0, m_0)$$



1-ое поколение

$$\{(t, g, m)_1 \quad (t, g, m)_2 \quad \dots \quad (t, g, m)_{\nu(m_0)}\} \quad (\text{A})$$



последующие поколения **аналогичны in law и независимы**

$$F: P(\nu(m) = k) = p_k(m)$$

При фиксированном $\nu(m_0)$ события (A) независимы и

распределены согласно:

$$p(x|x_0) = f_1(m) f_2(t - t_0) f_3[(g - g_0)|m]$$

$n = E \nu(m)$ (среднее по ν и m) - параметр критичности

$n \leq 1$ **условие конечности кластера**

Стандартная ETAS модель $\Leftrightarrow$ ETAS($F=Poisson$)

Линейность условной интенсивности:

$$\lambda(x = (t, g, m) | \cup x_i : t_i < t) = \mu(g) f_1(m) + \sum_i \lambda(m_i) p(x | x_i)$$

$$\lambda(m) = E \nu(m) | m = \lambda e^{\alpha \cdot m}, m \geq 0 \quad \text{- закон продуктивности Утсу}$$

$$f_1(m) = \beta \exp(-\beta m), m \geq 0; \beta > \alpha \quad \text{- закон Гутенберга-Рихтера}$$

$$f_2(t) = (p-1)(t/c+1)^{-p} / c \quad \text{-закон Омори}$$

Пуассоновское распределение F скрыто линейностью регрессии

Свойства ETAS (F)

(+) модель позволяет включить большинство законов сейсмичности, а в случае F=P, удобна для моделирования и локального прогноза

(-) идентичность F для всех поколений сомнительна

(-) кластерное родство событий не сохраняется при изменении порога M_c

Выбор F (Shebalin et al,2020):

G модель:
$$p_k(m) = p^k(m)(1 - p(m)), p(m) = \lambda(m)/(1 + \lambda(m))$$

предпочтительнее чем

P модель:
$$p_k(m) = \lambda^k(m)e^{-\lambda(m)} / k!$$

Мотивация: тестирование F через распределение M-интервала Бота

Класс распределений F:

- все распределения $\nu(m)$ имеют одинаковые характеристики $f_1(m)$, $\lambda(m) = E(\nu(m)|m)$

- *Random Thinning* (RT) свойство:

распределение $\nu(m)$ при случайной потере q-ой доли событий меняет среднее на $q\lambda(m)$, но не меняет свой *тип* $\phi_F(\cdot)$:

$$\varphi_F(z|m) := Ez^{\nu(m)} = \phi_F(\lambda(m)(z-1))$$

Пример: Negative Binomial distribution $F = NB(\tau)$,

$$\varphi_F(z|m) = (1 - \lambda(m)(z-1)/\tau)^{-\tau}, 0 < \tau \leq \infty$$

$$\tau = 1 \Rightarrow \textit{Geometric} \quad \tau = \infty \Rightarrow \textit{Poisson}$$

УСЛОВИЯ: ETAS(F) модель

- F имеет RT свойство и тип $\phi_F(\cdot)$
- $P(v(m) = 0) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$,
- $Ev^2(m) < \infty$,
- $\lambda(m) = \lambda e^{\alpha \cdot m}, m \geq 0$,
- $f_1(m) = \beta e^{-\beta m} / (1 - e^{-\beta M_1}), 0 \leq m \leq M_1 = Km_0$,
 $\alpha \leq \beta$, $1 \leq K < \infty$; if $\alpha < \beta$, $K \leq \infty$
- критичность: $n \leq 1$
- тип кластера **DM**: $m_0 > M_{aft}$ и **AM**: m_0 любое

Основной результат

а) Если $m_0 \gg 1$, то

$$m_a = (\alpha / \beta) m_0 + \beta^{-1} \ln(\lambda / (1 - n)) + \zeta / \beta, \quad (\alpha < \beta, n < 1),$$

$$m_a = m_0 + \beta^{-1} \ln(\lambda / (1 - n / K)) + \zeta / \beta, \quad (\alpha = \beta, n \leq 1),$$

где
$$\ln \lambda = \ln n(\beta K)^{-1} - \ln m_0$$

Шумовая компонента регрессии имеет предельное распределение

$$P(\zeta < x) = \phi_F(-e^{-x}), |x| < \infty$$

безотносительно к типу кластера *DM* или *AM*

Случай $\alpha < \beta, n = 1$, зависимость от типа кластера

Кластер AM:

$$m_a = m_0 + \alpha^{-1} \ln V(\lambda) + \zeta / \alpha ,$$

$$P(\zeta < x) = \phi_F(-e^{-x}), |x| < \infty$$

$V(x), x > 0$ определяется уравнением

$$V + (\beta / \alpha - 1)V^{\beta / \alpha} \int_0^V u^{-\beta / \alpha - 1} [\phi_F(-u) - 1 + u] du = x$$

Кластер DM:

$$P(m_a < m_0 - x) = \phi_F(-V(\lambda(1 - e^{-\beta x})e^{\alpha x})), x \geq 0$$

Случай $\alpha < \beta, n = 1$ при малых $\lambda = 1 - \alpha / \beta$

кластер AM

$$P(m_a < m_0 + x) \approx \begin{cases} 1 - \lambda e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ \phi_F(-\lambda e^{-\alpha x}), & x < 0 \end{cases}$$

кластер DM

$$P(m_a < m_0 - x) \approx \phi_F(\lambda(x)(\bar{F}(x) - 1))$$

$= P\{\text{все прямые афтершоки события } m=x \text{ имеют магнитуду } > x\}, \quad x \geq 0$

Следствия

- зависимость $(\bar{m}_a - m_0) \text{ vs. } m_0$ одинакова для RT семейства распределений F ,
линейна при $\alpha < \beta, n < 1$, логарифмическая при $\alpha = \beta$
Пиковая разность Бота в суб-критическом режиме не различает модели F ;
- распределение шумовой компоненты m_a определяется RT типом F .

Для $F=NB(\tau)$:

$$P(\zeta < x) = (1 + e^{-x} / \tau)^{-\tau} = \phi_F(-e^{-x}), |x| < \infty$$

$\tau = 1$ ($F=G$) – Логистический закон; $\tau = \infty$ ($F=P$) -закон Гумбея,

$$P(\zeta < x) = \exp(-e^{-x})$$

Сюрпризы:

-универсальность $\bar{m}_a$ при $n < 1$:

$$\begin{aligned}\bar{m}_a &= \beta^{-1} \ln[\lambda(m_0)/(1-n)] \approx \beta^{-1} \ln \bar{N}(m_0) \\ &= E \max(\mu_1, \dots, \mu_{[\bar{N}(m_0)]})(1 + o(1)), m_0 \gg 1\end{aligned}$$

$\bar{N}(m_0)$ -средний размер кластера с начальным событием m_0

- при $n < 1$ разброс m_a определяется типом F

- $\alpha = \beta$ - как условие независимости распределения $m_0 - m_a$ от m_0
неверно; требуется: $\alpha < \beta$ и $n = 1$

Пример: $F=NB(\tau)$, $\lambda=1-\alpha/\beta$ мало, кластер DM

$$P(m_a - m_0 < x) \approx (1 + \lambda e^{-\alpha x} (1 - e^{\beta x}) / \tau)^{-\tau}, x < 0$$

Сравнение моделей:

Асимметрия хвостов:

$$P(\zeta / \beta > x) = 1 - \phi_F(-e^{-\beta x}) \approx e^{-\beta x}, x \rightarrow \infty$$

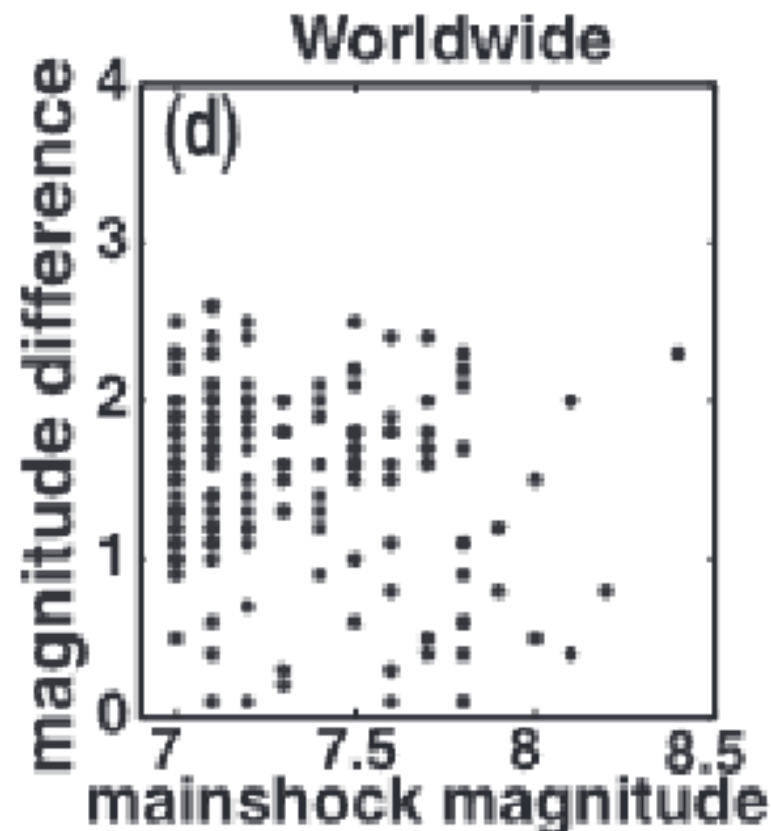
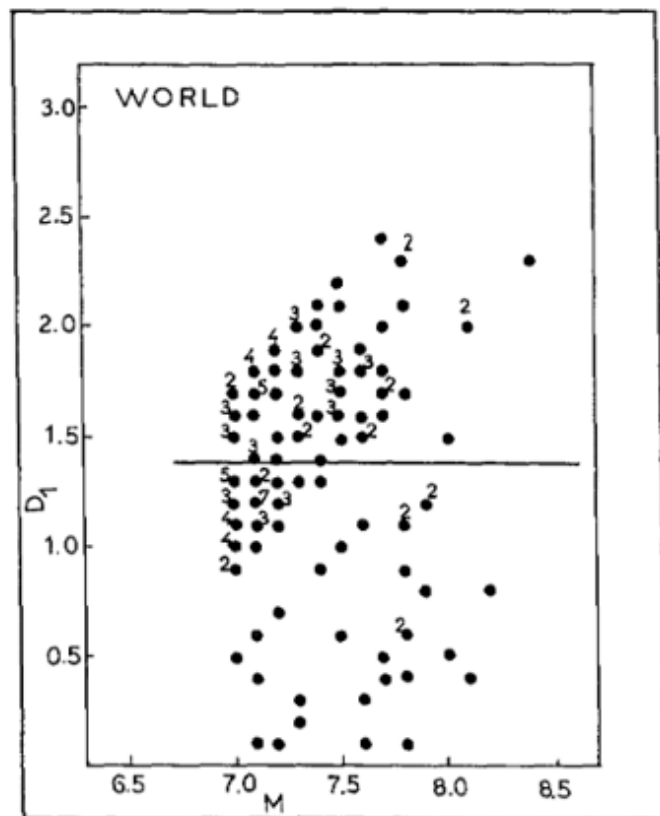
Хвост для малых m_a зависит от типа F:

**Распределение ζ симметрично для F=G, и
асимметрично для F=P**

$$\exp(-|x|) \text{ vs } \exp(-e^{|x|}) \quad x < 0$$

(-) Тихоокеанский пояс (Tsapanos, 1990)

1964-1986 , N=145, $m_0 - m_a \approx 1.2 \text{ \& } 1.8$, $h < 50 \text{ km}$, $M_c = 5$, $m_0 \geq 7$



Felzer, K.R., T.W. Becker, R.E. Abercrombie, G. Ekström and J.R. Rice, Triggering of the 1999 MW 7.1 Hector Mine earthquake by aftershocks of the 1992 MW 7.3 Landers earthquake, J. Geophys. Res., 107, (2002).



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ