ПОЛОСА С ПОСТОЯННЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ НА РАЗРЕЗЕ: ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Кержаев А.П., Yu G

Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва, Россия

Источник: Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P., Yu G. A strip with constant stresses on the cut: Exact solutions // ZAMM-Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 2022, vol. 102, no. 10, art. e202100431. DOI: 10.1002/zamm.202100431.

Введение

- Краевые задачи теории упругости для бесконечной полосы с различными граничными условиями на ее сторонах и с центральным поперечным разрезом, на котором заданы постоянные нормальные напряжения, были предметом многочисленных исследований. Однако точных решений, насколько нам известно, построить не удалось.
- Практически все решения вначале сводились к сингулярным интегральным уравнениям, а затем – к приближенному решению соответствующей бесконечной системы алгебраических уравнений.
- В этой статье, следуя методологии, рассмотренной в предыдущих публикациях авторов, проблема рассматривается как задача о контакте двух полуполос, когда на их стыке задан разрыв продольных перемещений.
- Рассматриваются следующие граничные условия. Длинные стороны полосы: a) свободны, b) жестко защемлены, c) имеют ребра жесткости, работающие только на растяжение-сжатие.
- Все решения представляются рядами по собственным функциям Папковича–Фадля, которые точно удовлетворяют заданным однородным граничным условиям на сторонах полосы.

Свободная полоса с поперечной трещиной

Рассмотрим бесконечную полосу $\{\Pi\colon\ |x| < \infty,\ |y| \le 1\}$ со свободными сторонами,

$$\sigma_y(x, \pm 1) = \tau_{xy}(x, \pm 1) = 0, \tag{1}$$

и с постоянными нормальными напряжениями p на центральном поперечном разрезе $\{\gamma\colon x = 0,\ |y| \le \alpha < 1\}$ (четно-симметричная деформация).

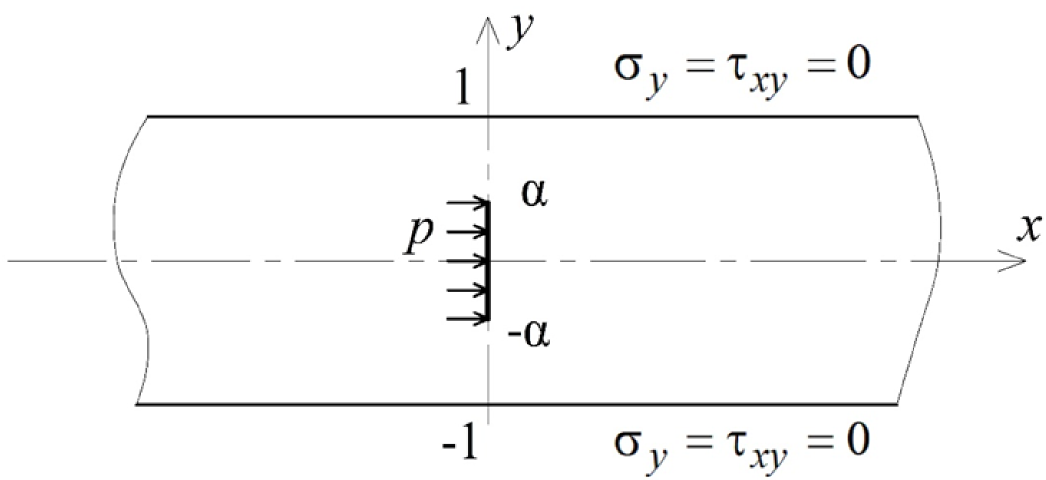

Рис. 1. Свободная полоса с трещиной.

Разложения по функциям Папковича–Фадля в полуполосе (при $x \geq 0$ $\mathrm{Re}\lambda_k < 0$; при $x < 0$, $\mathrm{Re}\lambda_k > 0$)

$$U(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} \xi(\overline{\lambda_k}, y) e^{\overline{\lambda_k} x}, \qquad V(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} \chi(\overline{\lambda_k}, y) e^{\overline{\lambda_k} x},$$

$$\sigma_x(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} s_x(\overline{\lambda_k}, y) e^{\overline{\lambda_k} x}, \qquad (2)$$

$$\sigma_y(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} s_y(\overline{\lambda_k}, y) e^{\overline{\lambda_k} x},$$

$$\tau_{xy}(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} t_{xy}(\overline{\lambda_k}, y) e^{\overline{\lambda_k} x}.$$

Собственные числа λ_k, $\overline{\lambda_k}$ – комплексно-сопряженные нули целой функции экспоненциального типа

$$L(\lambda) = \lambda + \sin\lambda\cos\lambda.$$

Обозначения: $U(x,y) = Gu(x,y)$, $V(x,y) = Gv(x,y)$; G – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона; $u(x,y)$ – продольные перемещения вдоль оси x, $v(x,y)$ – поперечные перемещения вдоль оси y.

Функции Папковича–Фадля имеют вид:

$$\xi(\lambda_k, y) = \left(\frac{1-\nu}{2} \sin\lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos\lambda_k \right) \cos\lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin\lambda_k \sin\lambda_k y,$$

$$\chi(\lambda_k, y) = \left(\frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos\lambda_k + \sin\lambda_k \right) \sin\lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin\lambda_k \cos\lambda_k y,$$

$$s_x(\lambda_k, y) = (1+\nu)\lambda_k \{ \left(\sin\lambda_k - \lambda_k \cos\lambda_k \right) \cos\lambda_k y - \lambda_k y \sin\lambda_k \sin\lambda_k y \}, \quad (3)$$

$$s_y\left(\lambda_k, y\right) = (1+\nu)\lambda_k \{ \left(\sin\lambda_k + \lambda_k \cos\lambda_k \right) \cos\lambda_k y + \lambda_k y \sin\lambda_k \sin\lambda_k y \},$$

$$t_{xy}\left(\lambda_k, y\right) = (1+\nu)\lambda_k^2 \{ \cos\lambda_k \sin\lambda_k y - y \sin\lambda_k \cos\lambda_k y \}.$$

Введем две функции:

$$\Phi(\lambda_k, y) = \Phi^S(\lambda_k, y) + i\Phi^C(\lambda_k, y),$$
$$F(\lambda_k, y) = F^S(\lambda_k, y) + iF^C(\lambda_k, y), \tag{4}$$

где

$$\Phi^S(\lambda_k, y) = -t_{xy}(\lambda_k, y),\ \Phi^C(\lambda_k, y) = (1+\nu)\frac{d\chi(\lambda_k, y)}{dy} + \frac{1-\nu}{2} s_x(\lambda_k, y),$$
$$F^S(\lambda_k, y) = -(1+\nu)\frac{d\xi(\lambda_k, y)}{dy} - \frac{1-\nu}{2} t_{xy}(\lambda_k, y),\ F^C(\lambda_k, y) = -s_x(\lambda_k, y). \tag{5}$$

Подставляя в (4) выражения (5), получим

$$\Phi(\lambda_k, y) = -i(1+\nu)\lambda_k^2(-\cos\lambda_k + iy\sin\lambda_k)e^{\lambda_k iy},$$
$$F(\lambda_k, y) = -i(1+\nu)\lambda_k[-(\lambda_k\cos\lambda_k - \sin\lambda_k) + \lambda_k iy\sin\lambda_k]e^{\lambda_k iy}. \tag{6}$$

Функциям (5) поставим в соответствие аналитические функции переменной $z = x + iy$

$$\Phi(\lambda_k, z) = -i(1+\nu)\lambda_k^2(-\cos\lambda_k + z\sin\lambda_k)e^{\lambda_k z},$$
$$F(\lambda_k, z) = -i(1+\nu)\lambda_k[-(\lambda_k\cos\lambda_k - \sin\lambda_k) + \lambda_k z\sin\lambda_k]e^{\lambda_k z} \tag{7}$$

Основная идея решения задачи

Рассмотрим ряд Лагранжа:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k F(\lambda_k, y) + \bar{A}_k F(\bar{\lambda}_k, y) = \begin{cases} \dfrac{-2y}{\sqrt{\alpha^2 - y^2}} & (y \in \gamma), \\ 0 & (\alpha < |y| < 1) \end{cases} \qquad (8)$$

с некоторыми коэффициентами A_k (коэффициенты Лагранжа).

Будем рассматривать функцию, стоящую справа в (8), как скачок функции $\frac{-z}{\sqrt{z^2+\alpha^2}}$ на разрезе γ.

Тогда сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} A_k F^C(\lambda_k, y) + \bar{A}_k F^C(\bar{\lambda}_k, y)$ будет равна некоторой постоянной *p* в силу того, что собственные функции Папковича–Фадля $F^C(\lambda_k, y) = -s_x(\lambda_k, y)$ самоуравновешены на отрезке $|y| \leq 1$.

Биортогональные функции

Уравнения для определения биортогональных функций:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda, y)\Phi_k(y)dy = \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda, y)F_k(y)dy = \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Уравнения (9) можно переписать в таком виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi^S(\lambda, y)\Phi_k^S(y)dy = \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^C(\lambda, y)\Phi_k^C(y)dy = \frac{\lambda\lambda_k L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \quad \Phi_k(y) = \Phi_k^S(y) - i\Phi_k^C(y),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^S(\lambda, y)F_k^S(y)dy = \frac{\lambda_k L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} F^C(\lambda, y)F_k^C(y)dy = \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \quad F_k(y) = F_k^S(y) - iF_k^C(y). \tag{10}$$

Соотношения биортогональности:

$$\int_T \Phi^S(\lambda_k, t)\Phi_k^S(t)dt = \int_T \Phi^C(\lambda_k, t)\Phi_k^S(t)dt = \begin{cases} \lambda_k M_k & (\lambda_k = \lambda_m), \\ 0 & (\lambda_k \neq \lambda_m), \end{cases}$$

$$\int_T F^S(\lambda_k, t)F_k^S(t)dt = \int_T F^C(\lambda_k, t)F_k^C(t)dt = \begin{cases} M_k & (\lambda_k = \lambda_m), \\ 0 & (\lambda_k \neq \lambda_m), \end{cases}$$

$$M_k = \frac{L'(\lambda_k)}{2} = \cos^2 \lambda_k. \tag{11}$$

Финитные части биортогональных функций $\Phi_k^S(y), \Phi_k^C(y)$, $F_k^S(y)$ и $F_k^C(y)$ имеют следующий вид:

$$\varphi_k^S(y) = \frac{\sin \lambda_k y}{2(1+\nu)\sin \lambda_k}, \varphi_k^C(y) = -\frac{\cos \lambda_k y}{2(1+\nu)\sin \lambda_k},$$

$$f_k^S(y) = \frac{\sin \lambda_k y}{2(1+\nu)\lambda_k \sin \lambda_k},\ f_k^C(y) = -\frac{\cos \lambda_k y}{2(1+\nu)\lambda_k \sin \lambda_k}. \qquad (12)$$

Замечание 1. Рассмотрим разложение Лагранжа целой функции $F^S(\lambda, y)$, считая параметр λ вещественным:

$$F^S(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{\lambda_k L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}\,\frac{F^S(\lambda_k, y)}{M_k}\right]. \qquad (13)$$

Этот ряд не сходится. Его сходимость можно улучшить, добавив к нему нетривиальное разложение нуля (проверяется с помощью теоремы о вычетах)

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{F^S(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k}\right] = 0 \quad (|\,y\,| < 1). \qquad (14)$$

В результате получим ряд Лагранжа, равномерно сходящийся при всех $|y| \le 1$ и любых вещественных λ:

$$F^S(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{\lambda^2 L(\lambda)}{(\lambda^2 - \lambda_k^2)\lambda_k}\,\frac{F^S(\lambda_k, y)}{M_k}\right]. \qquad (15)$$

Поэтому функции $f_k^S(y)$ будем определять из уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^S(\lambda, y) F_k^S(y)\,dy = \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{(\lambda^2 - \lambda_k^2)\lambda_k}. \qquad (16)$$

Замечание 2. Ряды Лагранжа по системе собственных функций $\xi(\lambda_k, y)$ могут не сходиться к раскладываемым функциям, отличаясь от них на некоторую постоянную. Это связано с тем, что финитные части биортогональных функций

$$u_k(y) = \frac{1}{1+\nu}\left\{\frac{\lambda_k \cos\lambda_k y}{\sin\lambda_k} - \left[\delta(y-1)+\delta(y+1)\right]\right\} \tag{17}$$

ортогональны к любой постоянной. Чтобы определить эту постоянную, введем биортогональную функцию с нулевым индексом следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda, y) U_0(y)\, dy = -\frac{\nu}{2} L(\lambda). \tag{18}$$

Финитная часть биортогональной функции $U_0(y)$:

$$u_0(y) = \frac{\nu}{2(1+\nu)}\left[\delta(y-1)+\delta(y+1)\right]. \tag{19}$$

Финитные части биортогональных функций $f_k^S(y)$ и $u_k(y)$ связаны равенством

$$\frac{df_k^S(y)}{dy} = \frac{u_k(y)}{2\lambda_k}. \tag{20}$$

Определение коэффициентов разложений

Коэффициенты разложений a_k в формулах (2) определяются из условий на разрезе как решение задачи сопряжения двух функций, аналитических в правой и в левой полуполосах.

Пусть $\pm u^*(y)$ – формы профилей соответственно правой и левой сторон разреза γ. Сформулируем математически задачу для полосы с разрывом продольных перемещений $2u^*(y)$. Из условий сопряжения при $x = 0$ получим два уравнения:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}[a_k^+ F(\lambda_k, y)] - \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}[a_k^- F(-\lambda_k, y)] = 2\dfrac{du^*(y)}{dy}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}[a_k^+ \Phi(\lambda_k, y)] - \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}[a_k^- \Phi(-\lambda_k, y)] = 0, \end{cases} \tag{21}$$

или

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}[(a_k^+ + a_k^-) F^S(\lambda_k, y)] + i\sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}[(a_k^+ - a_k^-) F^C(\lambda_k, y)] = 2\dfrac{du^*(y)}{dy}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}[(a_k^+ + a_k^-) \Phi^S(\lambda_k, y)] + i\sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}[(a_k^+ - a_k^-) \Phi^C(\lambda_k, y)] = 0. \end{cases} \tag{22}$$

$$2\,\mathrm{Re}[a_k^+ F(\lambda_k, y)] = a_k^+ F(\lambda_k, y) + \overline{a}_k^+ F(\overline{\lambda}_k, y)$$

Проектируя вещественные части уравнений (22) на биортогональные векторы $F_m^S(y) + F_m^C(y)$ и $\Phi_m^S(y) + \Phi_m^C(y)$ соответственно, на основании соотношений биортогональности (11), для каждого номера $k = 1,2,\ldots$ получим систему из двух алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_k M_k + \bar{a}_k \bar{M}_k = u_k^* + \bar{u}_k^*, \\ a_k \lambda_k M_k + \bar{a}_k \bar{\lambda}_k \bar{M}_k = 0, \end{cases} \tag{23}$$

$$u_k^* = \int_{-1}^{1} 2\frac{du^*(y)}{dy} f_k^S(y)dy = -\frac{1}{\lambda_k}\int_{-1}^{1} u^*(y)u_k(y)dy. \tag{24}$$

Определив отсюда коэффициенты a_k и подставив их в формулы, после выделения нуль-рядов получим окончательные формулы для перемещений и напряжений.

Решение для свободной полосы с трещиной

$$U(x,y)=u_0^*+\sum_{k=1}^{\infty}2\,\mathrm{Re}\left(u_k^*\frac{\mathrm{Im}(-\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{\mathrm{Im}\,\lambda_k}\frac{\xi(\lambda_k,y)}{\lambda_k M_k}\right),$$

$$V(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}2\,\mathrm{Re}\left(\frac{u_k^*}{\lambda_k}\frac{\mathrm{Im}(-\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{\mathrm{Im}\,\lambda_k}\frac{\chi(\lambda_k,y)}{M_k}\right),$$

$$\sigma_x(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}2\,\mathrm{Re}\left(\frac{u_k^*}{\lambda_k}\frac{\mathrm{Im}(-\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{\mathrm{Im}\,\lambda_k}\frac{s_x(\lambda_k,y)}{M_k}\right), \qquad (25)$$

$$\sigma_y(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}2\,\mathrm{Re}\left(u_k^*\bar{\lambda}_k\frac{\mathrm{Im}(-\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\mathrm{Im}\,\lambda_k}\frac{s_y(\lambda_k,y)}{\lambda_k^2 M_k}\right),$$

$$\tau_{xy}(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}2\,\mathrm{Re}\left(u_k^*\bar{\lambda}_k\frac{\mathrm{Im}(-e^{\lambda_k x})}{\mathrm{Im}\,\lambda_k}\frac{t_{xy}(\lambda_k,y)}{\lambda_k M_k}\right),$$

$$u_0^*=C+\int_{-1}^{1}[u^*(y)-C]u_0(y)dy=C-\frac{C\nu}{1+\nu}=\frac{C}{1+\nu},\quad C=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}u^*(y)dy. \qquad (26)$$

Пример

Пусть

$$2\frac{du^*(y)}{dy}=\begin{cases}\dfrac{-2y}{\sqrt{\alpha^2-y^2}} & (y\in\gamma),\\ 0 & (\alpha<|y|<1).\end{cases} \qquad (27)$$

Тогда,

$$u_k^*=\frac{\alpha\pi J_1(\alpha\lambda_k)}{(1+\nu)\sin\lambda_k},\ C=\frac{\pi\alpha^2}{4},\ u_0^*=\frac{\pi\alpha^2}{4(1+\nu)}, \qquad (28)$$

где $J_1(\alpha\lambda_k)$ – функция Бесселя первого рода, первого порядка.

Из условия самоуравновешенности напряжений $\sigma_x(0,y)$ на отрезке $|y|\le 1$ найдем величину *p* постоянных нормальных напряжений $\sigma_x(0,y)$ на γ:

$$2\alpha p+2\int_{\alpha}^{1}\sigma_x(0,y)dy=0. \qquad (29)$$

Полоса с жестко защемленными сторонами (задача 2)

Рассмотрим бесконечную полосу $\{\Pi\colon\ |x| < \infty,\ |y| \leq 1\}$ с защемленными сторонами:

$$U(x, \pm 1) = V(x, \pm 1) = 0. \tag{30}$$

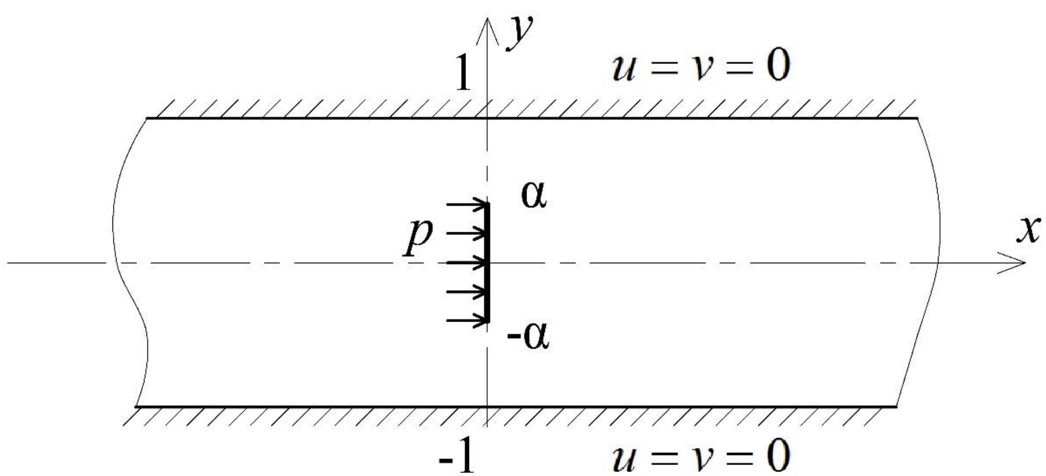

Рис. 2. Защемленная полоса с трещиной.

Собственные функции Папковича–Фадля имеют вид:

$$\xi(\lambda_k, y) = \left(\frac{3-\nu}{4\lambda_k}\sin\lambda_k - \frac{1+\nu}{4}\cos\lambda_k\right)\cos\lambda_k y - \frac{1+\nu}{4} y\sin\lambda_k \sin\lambda_k y,$$

$$\chi(\lambda_k, y) = \frac{1+\nu}{4}(\cos\lambda_k \sin\lambda_k y - y\sin\lambda_k \cos\lambda_k y),$$

$$s_x(\lambda_k, y) = \left(\frac{3+\nu}{2}\sin\lambda_k - \frac{1+\nu}{2}\lambda_k\cos\lambda_k\right)\cos\lambda_k y - \frac{1+\nu}{2}\lambda_k y\sin\lambda_k \sin\lambda_k y, \qquad (31)$$

$$s_y(\lambda, y) = \left(\frac{\nu-1}{2}\sin\lambda_k + \frac{1+\nu}{2}\lambda_k\cos\lambda_k\right)\cos\lambda_k y + \frac{1+\nu}{2}\lambda_k y\sin\lambda_k \sin\lambda_k y,$$

$$t_{xy}(\lambda_k, y) = \left(-\sin\lambda_k + \frac{1+\nu}{2}\lambda_k\cos\lambda_k\right)\sin\lambda_k y - \frac{1+\nu}{2}\lambda_k y\sin\lambda_k \cos\lambda_k y.$$

Собственные числа λ_k являются нулями целой функции

$$L(\lambda) = \frac{3-\nu}{8\lambda}\sin 2\lambda - \frac{1+\nu}{4}, \qquad (32)$$

причем есть два вещественных корня $\pm\lambda_1 = \pm 0{,}9477$ при $\nu = \frac{1}{3}$.

Решение для защемленной полосы с трещиной

$$
\begin{aligned}
U^{s}(x,y) &= -U^{1}(x,y) - \sum_{k=2}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left\{ u_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{\mathrm{Im}(\overline{\lambda_k} e^{\lambda_k x})}{\mathrm{Im}\,\lambda_k} \right\},\\
V^{s}(x,y) &= V^{1}(x,y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left\{ \frac{u_k}{\lambda_k} \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{\mathrm{Im}(\overline{\lambda_k} e^{\lambda_k x})}{\mathrm{Im}\,\lambda_k} \right\},\\
\sigma_x^{s}(x,y) &= -\sigma_x^{1}(x,y) - \sum_{k=2}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left\{ \frac{u_k}{\lambda_k} \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{\mathrm{Im}(\overline{\lambda_k} e^{\lambda_k x})}{\mathrm{Im}\,\lambda_k} \right\},\\
\sigma_y^{s}(x,y) &= -\sigma_y^{1}(x,y) - \sum_{k=2}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left\{ \frac{u_k}{\lambda_k} \frac{s_y(\lambda_k, y)\lambda_k \overline{\lambda_k}}{M_k \lambda_k^2} \frac{\mathrm{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\mathrm{Im}\,\lambda_k} \right\},\\
\tau_{xy}^{s}(x,y) &= -\tau_{xy}^{1}(x,y) - \sum_{k=2}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left\{ u_k \overline{\lambda_k} \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{\mathrm{Im}(e^{\lambda_k x})}{\mathrm{Im}\,\lambda_k} \right\}.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

$$U^1(x,y)=u_1\frac{\xi(\lambda_1,y)}{\lambda_1 M_1}(\lambda_1 x-1)e^{\lambda_1 x},\ V^1(x,y)=\frac{u_1}{\lambda_1}\frac{\chi(\lambda_1,y)}{M_1}(\lambda_1 x-1)e^{\lambda_1 x},$$

$$\sigma_x^1(x,y)=\frac{u_1}{\lambda_1}\frac{s_x(\lambda_1,y)}{M_1}(\lambda_1 x-1)e^{\lambda_1 x}, \tag{34}$$

$$\sigma_y^1(x,y)=u_1\lambda_1\frac{s_y(\lambda_1,y)}{\lambda_1^2 M_1}(\lambda_1 x+1)e^{\lambda_1 x},\ \tau_{xy}^1(x,y)=u_1\lambda_1\frac{t_{xy}(\lambda_1,y)}{\lambda_1 M_1}xe^{\lambda_1 x}.$$

Здесь

$$M_k=\frac{L'(\lambda_k)}{2},\ u_k(y)=-\frac{\lambda_k\cos\lambda_k y}{2\sin\lambda_k},\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi(\lambda,y)U_k(y)dy=\frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2-\lambda_k^2}, \tag{35}$$

$$u_k^*=-\frac{\alpha\pi J_1(\alpha\lambda_k)}{2\sin\lambda_k},\ u_0^*=0.$$

Функции $s_x(\lambda_k,y)$ на этот раз не самоуравновешены. Поэтому постоянные напряжения p на γ будут определяться из следующего условия:

$$2\alpha p+2\int\limits_{\alpha}^{1}\sigma_x(0,y)dy-2\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{xy}(x,1)dx=0. \tag{36}$$

Полоса с ребрами жесткости (задача 3)

Рассмотрим бесконечную полосу $\{\Pi:\ |x| < \infty,\ |y| \leq 1\}$ с ребрами жесткости вдоль горизонтальных сторон:

$$D\frac{\partial^2 U(x,\pm 1)}{\partial x^2} - \tau_{xy}(x,\pm 1) = 0, \quad \sigma_y(x,\pm 1) = 0, \quad D = \frac{E_1 f}{Gt}. \tag{37}$$

Параметр D учитывает относительную жесткость ребра и пластины; E_1 – модуль упругости для ребра, f – площадь поперечного сечения ребра, t – толщина пластины (далее считается, что $t = 1$), G – модуль сдвига для пластины. Коэффициенты Пуассона для ребра и пластины считаются одинаковыми.

Собственные функции Папковича–Фадля имеют вид:

$$\xi(\lambda_k, y) = -\left(\frac{1+\nu}{2}\lambda_k \sin\lambda_k y + \cos\lambda_k\right)\cos\lambda_k y + \frac{1+\nu}{2}\lambda_k y\cos\lambda_k \sin\lambda_k y,$$

$$\chi(\lambda_k, y) = \left(\frac{\nu-1}{2}\cos\lambda_k + \frac{1+\nu}{2}\lambda_k \sin\lambda_k\right)\sin\lambda_k y + \frac{1+\nu}{2}\lambda_k y\cos\lambda_k \cos\lambda_k y,$$

$$s_x(\lambda_k, y) = (1+\nu)\lambda_k\left[-(\lambda_k \sin\lambda_k + 2\cos\lambda_k)\cos\lambda_k y + \lambda_k y\cos\lambda_k \sin\lambda_k y\right], \tag{38}$$

$$s_y(\lambda, y) = (1+\nu)\lambda_k^2\left(\sin\lambda_k \cos\lambda_k y - y\cos\lambda_k \sin\lambda_k y\right),$$

$$t_{xy}(\lambda_k, y) = (1+\nu)\lambda_k\left[(\lambda_k \sin\lambda_k + \cos\lambda_k)\sin\lambda_k y + \lambda_k y\cos\lambda_k \cos\lambda_k y\right].$$

Собственные числа λ_k – комплексные нули целой функции экспоненциального типа

$$L(\lambda) = D\cos^2\lambda + (1+\nu)\left(1 + \frac{\sin 2\lambda}{2\lambda}\right). \tag{39}$$

$$u_k(y) = -\frac{\cos\lambda_k y}{\cos\lambda_k}, \quad u_k^* = -\frac{\alpha\pi J_1(\alpha\lambda_k)}{\lambda_k \cos\lambda_k},$$

$$u_0(y) = \frac{1}{D+2(1+\nu)}, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\xi(\lambda, y)U_0(y)dy = -\frac{L(\lambda)}{D+2(1+\nu)}, \quad u_0^* = \frac{\pi\alpha^2}{4[D+2(1+\nu)]}.$$

Влияние граничных условий на сторонах полосы

Примем $\alpha = 0.5, \nu = 1/3$ для всех трех задач и $D = 4$ в задаче 3.

Сплошным кривым отвечает решение для свободной полосы, прерывистым – для жестко защемленной полосы, точечным – решение для полосы с ребрами жесткости.

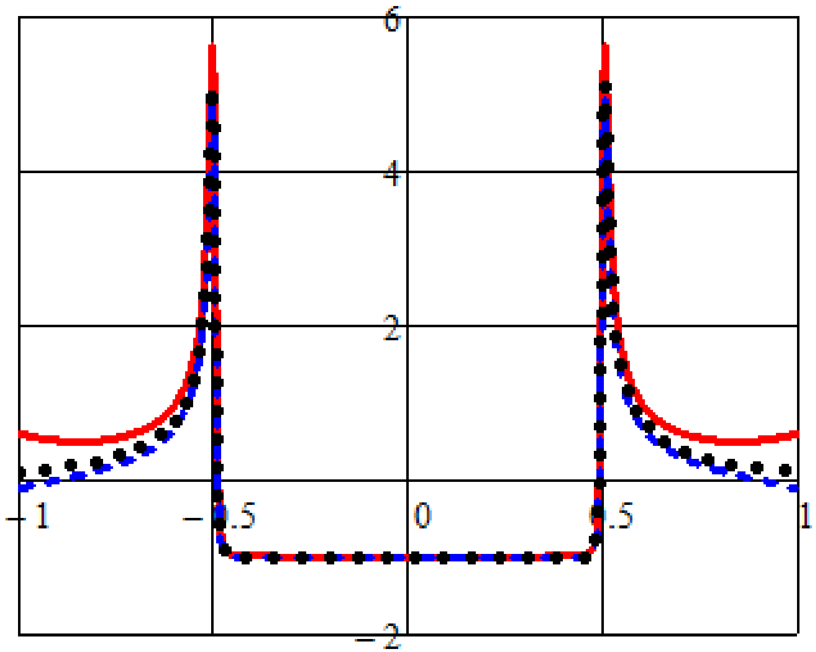

Рис. 3. Распределение нормальных напряжений $\sigma_x(0.01, y)/|p|$.

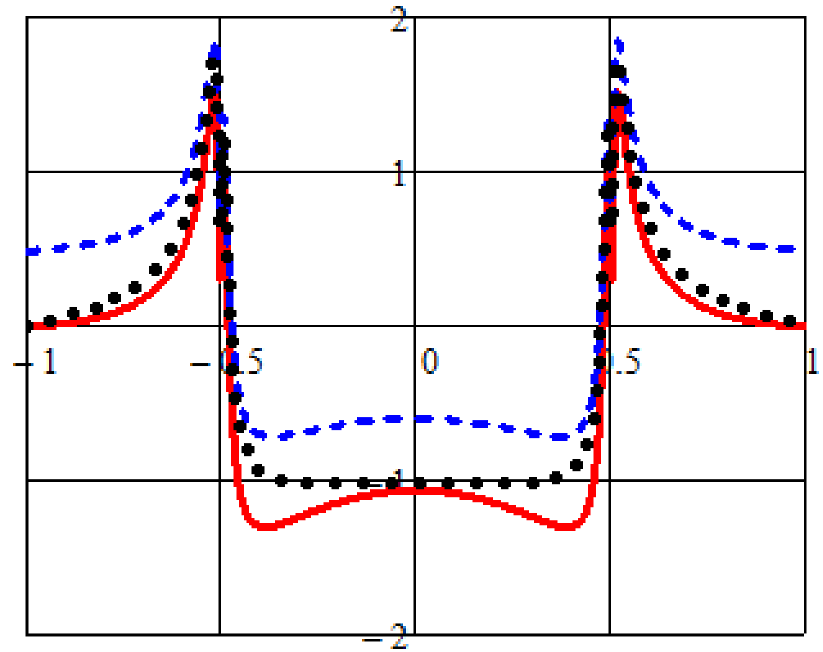

Рис. 4. Распределение нормальных напряжений $\sigma_y(0.01, y)/|p|$.

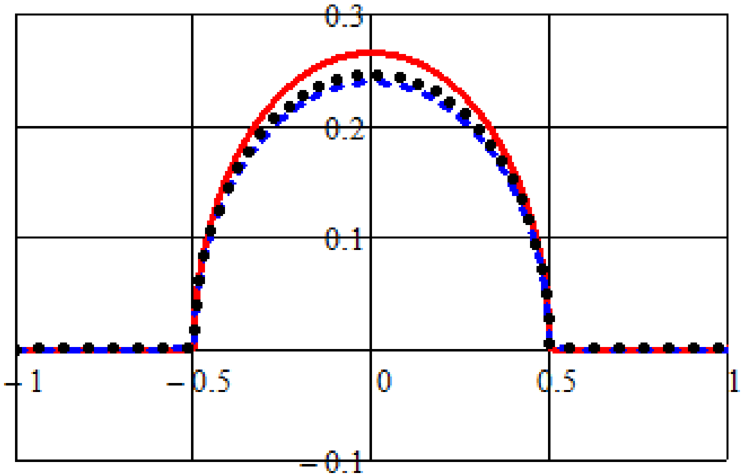

Рис. 5. Распределение продольных перемещений $U(0,y)/|p|$.

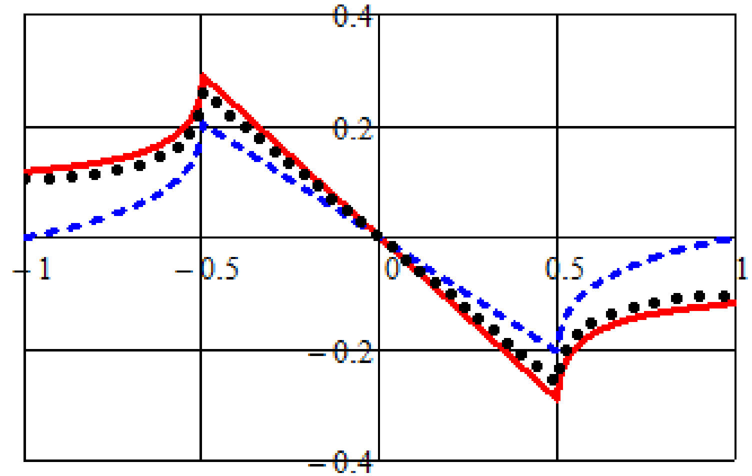

Рис. 6. Распределение поперечных перемещений $V(0,y)/|p|$.

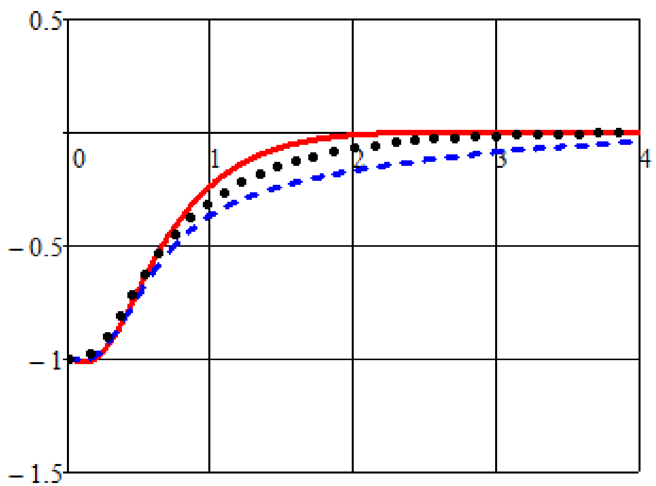

Рис. 7. Нормальные напряжения $\sigma_x(x,0)/|p|$ в правой полуполосе.

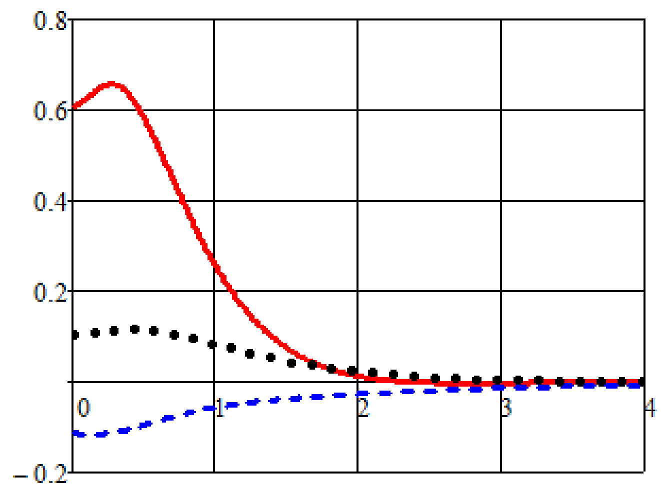

Рис. 8. Нормальные напряжения $\sigma_x(x,1)/|p|$ в правой полуполосе.

Влияние формы разрыва

Рассмотрим три типа разрывов продольных перемещений в защемленной полосе:

$$u_1(y)=\begin{cases}\sqrt{\alpha^2-y^2}, & |y|<\alpha<1;\\ 0, & 1\ge|y|>\alpha,\end{cases}\quad u_2(y)=\begin{cases}2(\alpha^2-y^2), & |y|<\alpha<1;\\ 0, & 1\ge|y|>\alpha,\end{cases}\quad u_3(y)=\begin{cases}8(\alpha^2-y^2)^2, & |y|<\alpha<1;\\ 0, & 1\ge|y|>\alpha.\end{cases}$$

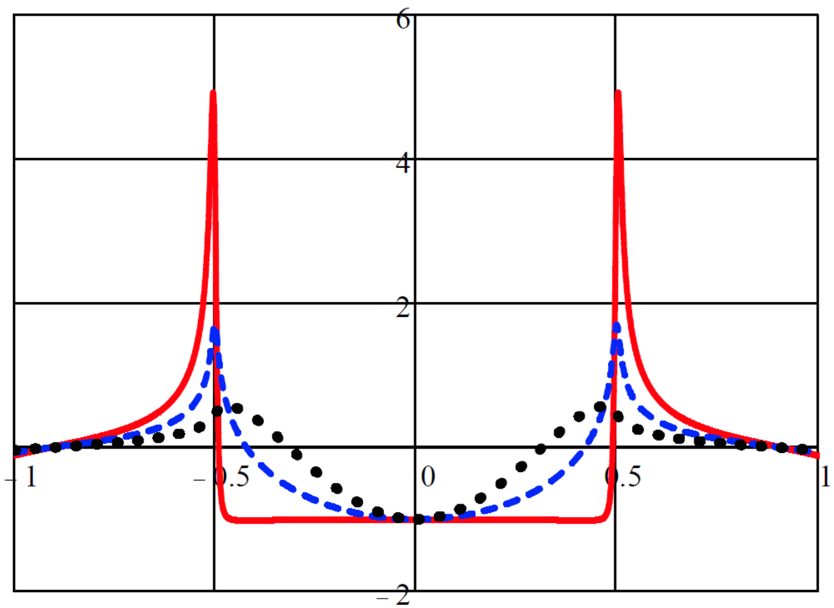

Рис. 9. Распределение нормальных напряжений $\sigma_x(0.01,y)/|p|$ для каждого типа разрыва.

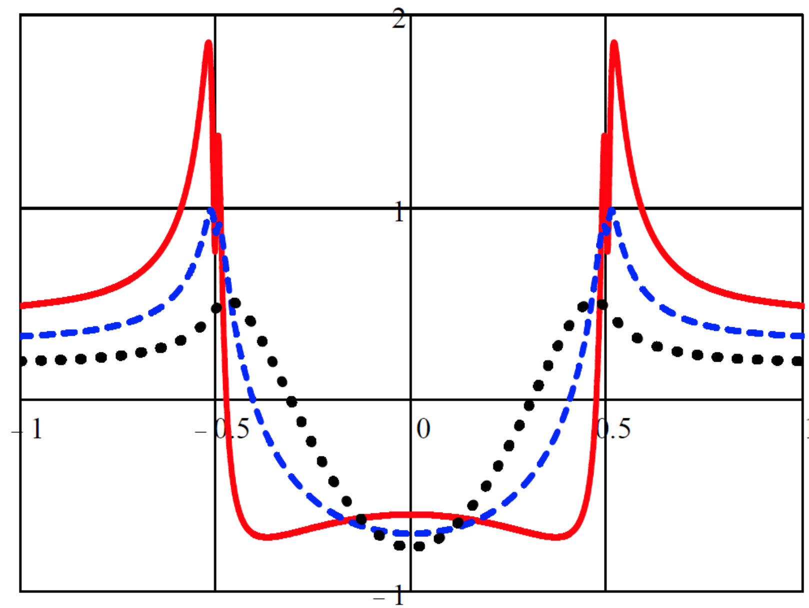

Рис. 10. Распределение нормальных напряжений $\sigma_y(0.01,y)/|p|$ для каждого типа разрыва.

Выводы

- Можно заметить, что кривые, соответствующие решению для полосы с ребрами жесткости, занимают промежуточное положение между решениями для свободной и жестко защемленной полос.
- По мере удаления от трещин решения затухают экспоненциально.
- Вне зависимости от граничных условий на длинных сторонах полосы, решения вблизи горизонтальной оси полосы довольно близки.
- Можно показать, что в третьем случае, когда гладкость контура разрыва максимальна, что соответствует точке возврата, напряжения конечны при приближении к вершине разреза, во втором случае, когда кончик контура разрыва острый, напряжения имеют логарифмическую особенность, а в первом случае, когда вершина контура разрыва имеет характер эллиптической кривой, напряжения имеют степенную особенность.
- В статье была рассмотрена упрощенная модель подкрепленной полосы с поперечной трещиной, у которой ребра жесткости работают только на растяжение-сжатие. Можно учесть также изгибную жесткость ребра.

Спасибо за внимание!