БИГАРМОНИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА,

ЕЕ СЛЕДСТВИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ В ГЕОФИЗИКЕ

Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук (ИТПЗ РАН), г. Москва, Россия

<u>Меньшова И.В.</u>,
Коваленко М.Д.,
Кержаев А.П.

Цель работы – точные решения классических краевых проблем теории упругости в областях с угловыми точками границы, в частности, в прямоугольнике, с точками смены типа граничных условий, разрывами сплошности, температурными деформациями и др., развитие теории остаточных напряжений, приложения в геофизике.

Актуальность проводимых исследований обусловлена важностью 2
аналитических решений в теоретических и прикладных исследованиях. Именно точные решения позволяют, с одной стороны, глубоко разобраться в природе изучаемого явления, а с другой – являются базисом для развития инженерных (прикладных), в том числе численных, методов решения краевых задач.

Теоретическим фундаментом проводимых исследований служат:

- теория целых и квазицелых функций экспоненциального типа;
- классическая теорема Пэли-Винера-Шварца и ее обобщение для квазицелых функций;
- теория базиса функций;
- теория функций комплексного переменного и теория краевых задач для них.

ИСТОРИЯ ВОПРОСА

Направления и школы, которые сложились в 1940-1980 годы в Советском Союзе. Их представителями были крупнейшие математики и механики тех лет:

- **Ленинградская школа**: Папкович П.Ф., Лурье А.И., Гринберг Г.А., Джанелидзе Г.И., Прокопов В.К., Костарев А.В., Гуревич С.Г., Нуллер Б.М. и другие.
- **Московское направление**: Гусейн-Заде М.И., Лурье С.А., Васильев В.В. и многие другие.
- **Ростовская-на-Дону школа** под руководством акад. Воровича И.И.: Копасенко В.В., Ковальчук В.Е., Устинов Ю.А., Юдович В.И. и другие.
- **Украинская школа** математиков и механиков: Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Гомилко А.М., Мелешко В.В. и многие другие.
- Сильные и яркие работы публиковались в Докладах Азербайджанской, Армянской, Грузинской АН ССР.

Наиболее значимые работы зарубежных авторов - Benthem J.P., Bogy D.B., Brahtz J.N.A., Dougall J., Flugge W., Kelkar V.S., Little R.W., Smith R.C.T., Shiff P.A.

Meleshko, V.V. Selected topics in the history of two-dimensional biharmonic problem. Appl. Mech. Revs. **56** (2003) 33-85.

Формулировка краевой проблемы (классическая постановка)

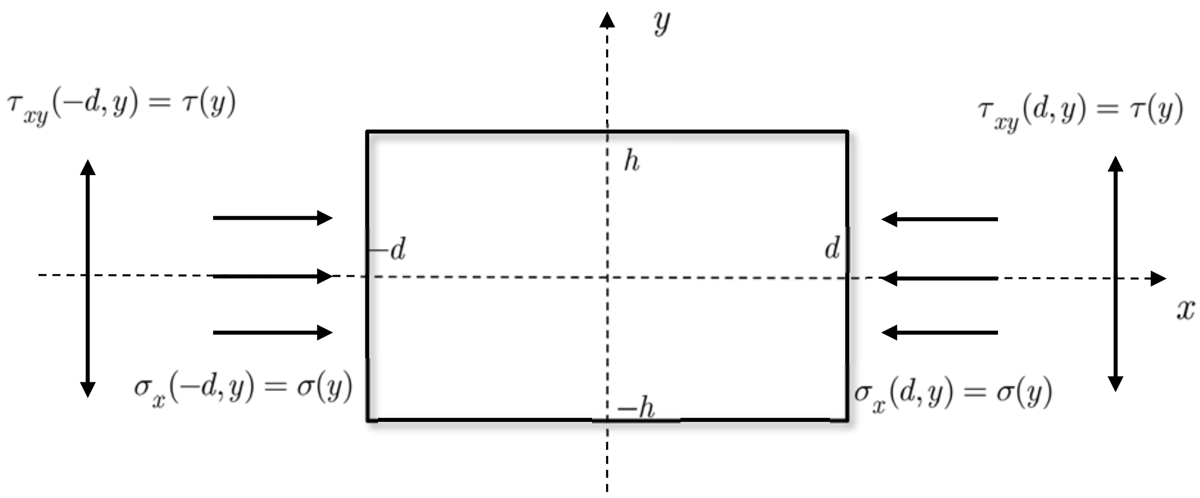


Рис. 1. К задаче для прямоугольника.

Граничные условия:

$$\sigma_y(x,\pm h)=\tau_{xy}(x,\pm h)=0 \qquad (1)$$

$$\sigma_x(\pm d,y)=\sigma(y),\tau_{xy}(\pm d,y)=\tau(y) \quad (2)$$

Бигармоническое уравнение

$$\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}+2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial x^2}=0 \qquad (3)$$

Все перемещения и напряжения выражаются через бигармоническую функцию $F(x,y)$

Краевая проблема

$$\begin{cases} \sigma(y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left\{a_k s_x\left(\lambda_k, y\right) + \overline{a_k} s_x\left(\overline{\lambda_k}, y\right)\right\}, \\ \tau(y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left\{a_k t_{xy}\left(\lambda_k, y\right) + \overline{a_k} t_{xy}\left(\overline{\lambda_k}, y\right)\right\} \end{cases} \qquad (4)$$

Функции Папковича-Фадля в случае симметричной деформации прямоугольника

$(|\, y \,| \leq h)$

$$s_x\left(\lambda_k, y\right) = \left(\nu + 1\right)\lambda_k\left[\left(\lambda_k h\cos\lambda_k h - \sin\lambda_k h\right)\cos\lambda_k y + \lambda_k y\sin\lambda_k h\sin\lambda_k y\right], \qquad (5)$$

$$t_{xy}\left(\lambda_k, y\right) = \left(\nu + 1\right)\lambda_k^2\left(-h\cos\lambda_k h\sin\lambda_k y + y\sin\lambda_k h\cos\lambda_k y\right)$$

a_k, $\overline{a_k}$ – неизвестные коэффициенты разложений, $\left\{\pm\lambda_k, \pm\overline{\lambda_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ – корни *характеристического уравнения*

$$L(\lambda) = \lambda h + \sin\lambda h\cos\lambda h = 0 \qquad (6)$$

1. *Коробейник Ю.Ф.* Представляющие системы. УМН, 1981. Т.36, вып. 1. С. 73-126.

2. *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976. 536с.

3. *Pfluger A.* Uber eine Interpretation gewisser konvergenz – und Fortsetzungseigenschaften Dirichletscher Reichen. Comment. Math. Helv. Vol. 8. 89-129 (1935/36)

4. *Kerzhaev A.P., Kovalenko M.D., Menshova I.V.* Borel transform in the class W of quasi-entire functions. Complex Anal. Oper. Theory 12(3), 571-587 (2017).

Соотношения биортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_x(\lambda, y) X_m(y) dy = \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_m^2},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t_{xy}(\lambda, y) T_m(y) dy = \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_m^2},\ m = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

$\left\{X_m(y)\right\}_{m=1}^{\infty}$ и $\left\{T_m(y)\right\}_{m=1}^{\infty}$ – функции, биортогональные к функциям Папковича-Фадля $s_x(\lambda_k, y)$ и $t_{xy}(\lambda_k, y)$.

Коваленко М. Д. Разложения Лагранжа и нетривиальные представления нуля по однородным решениям. Доклады РАН. 1997. Т. 352. № 4. С. 480-482.

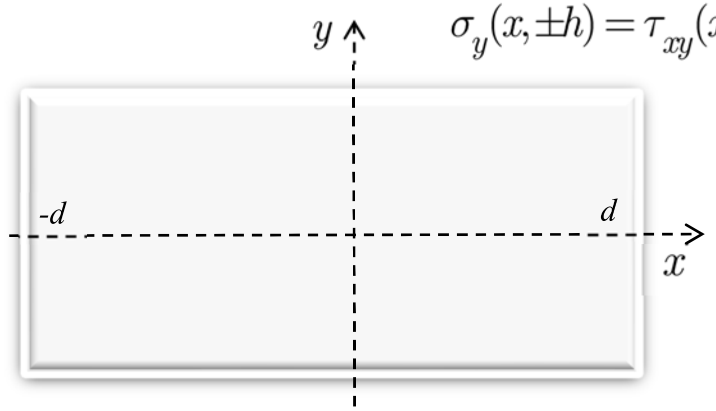
При решении краевых задач, используются только *простые финитные части биортогональных функций*:

$$x_m(y) = \frac{\cos \lambda_m y}{2\left(\nu + 1\right) \lambda_m h \sin \lambda_m h},\ t_m(y) = -\frac{\sin \lambda_m y}{2\left(\nu + 1\right) h \cos \lambda_m h}. \tag{8}$$

РЕШЕНИЕ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА $(|\, x \,|\leq d,\ |\, y \,|\leq h)$

$\sigma_y(x,\pm h)=\tau_{xy}(x,\pm h)=0$

$\sigma_x(-d,y)=\sigma(y)$
$\tau_{xy}(-d,y)=0$



$\sigma_x(d,y)=\sigma(y)$
$\tau_{xy}(d,y)=0$

$$\sigma_x(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}2\,\mathrm{Re}\left\{\sigma_k\,\frac{s_x(\lambda_k,y)}{M_k}\,\frac{\mathrm{Im}(\overline{\lambda_k}\,\mathrm{sh}\,\overline{\lambda_k}a\,\mathrm{ch}\,\lambda_k x)}{\mathrm{Im}(\overline{\lambda_k}\,\mathrm{sh}\,\overline{\lambda_k}a\,\mathrm{ch}\,\lambda_k a)}\right\},$$

$$\sigma_y(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}2\,\mathrm{Re}\left\{\sigma_k\,\frac{s_y(\lambda_k,y)}{M_k\lambda_k^2}\,\frac{\mathrm{Im}(\lambda_k^2\overline{\lambda_k}\,\mathrm{sh}\,\overline{\lambda_k}a\,\mathrm{ch}\,\lambda_k x)}{\mathrm{Im}(\overline{\lambda_k}\,\mathrm{sh}\,\overline{\lambda_k}a\,\mathrm{ch}\,\lambda_k a)}\right\}, \quad (9)$$

$$\tau_{xy}(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}2\,\mathrm{Re}\left\{\sigma_k\,\frac{t_{xy}(\lambda_k,y)}{\lambda_k M_k}\,\frac{\mathrm{Im}(\lambda_k\overline{\lambda_k}\,\mathrm{sh}\,\overline{\lambda_k}a\,\mathrm{sh}\,\lambda_k x)}{\mathrm{Im}(\overline{\lambda_k}\,\mathrm{sh}\,\overline{\lambda_k}a\,\mathrm{ch}\,\lambda_k a)}\right\}$$

Для решения краевых задач с разрывами и точками смены типа граничных условий вводятся две функции – аналоги потенциалов Мусхелишвили:

$$\Phi(\lambda, y) = -t_{xy}(\lambda, y) + \frac{i}{2}[s_y(\lambda, y) - s_x(\lambda, y)],$$
$$\Psi(\lambda, y) = (1+\nu)\frac{d\xi(\lambda, y)}{dy} - \frac{3+\nu}{2}t_{xy}(\lambda, y) + is_y(\lambda, y) \qquad (10)$$

Их можно рассматривать, как обобщение систем экспонент с комплексными показателями

$$\Phi(\lambda, y) = (1+\nu)\lambda^2(ih\cos\lambda h + y\sin\lambda h)e^{i\lambda y},$$
$$\Psi(\lambda, y) = (1+\nu)\lambda[i(\lambda h\cos\lambda h + \sin\lambda h) + \lambda y\sin\lambda h]e^{i\lambda y}$$

Физическая сторона рассматриваемых задач теории упругости

ПРИЛОЖЕНИЯ В ГЕОФИЗИКЕ

1) Задачи для прямоугольника (плиты) с разными граничными условиями на его сторонах. Эти условия должны моделировать реальные условия контакта плит, например, свободный край, отсутствие перемещений, скольжение с трением или без, прослойка – раздробленная среда (рис.2).

Рис. 2.

2) Задачи со смешанными граничными условиями, например, часть плиты свободна, а часть контактирует с другой плитой. Самые важные события, с точки зрения напряженно-деформированного состояния плиты, происходят в окрестности точек смены типа граничных условий (рис.3). Их можно выяснить только аналитически.

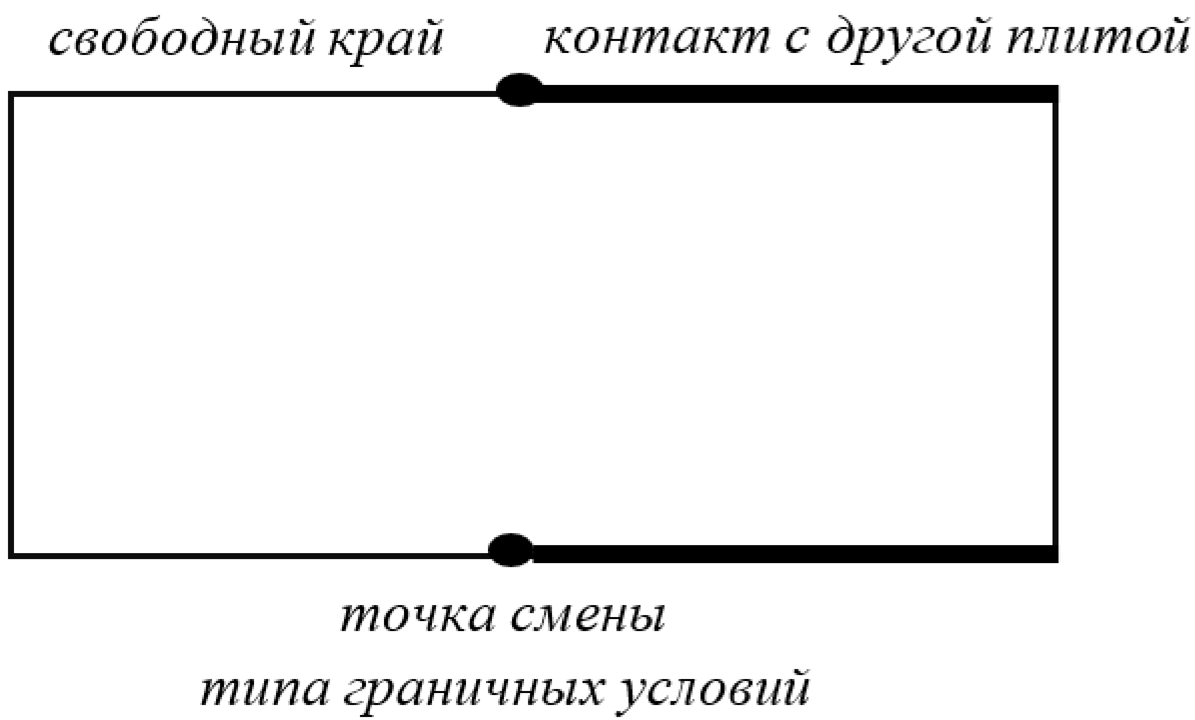
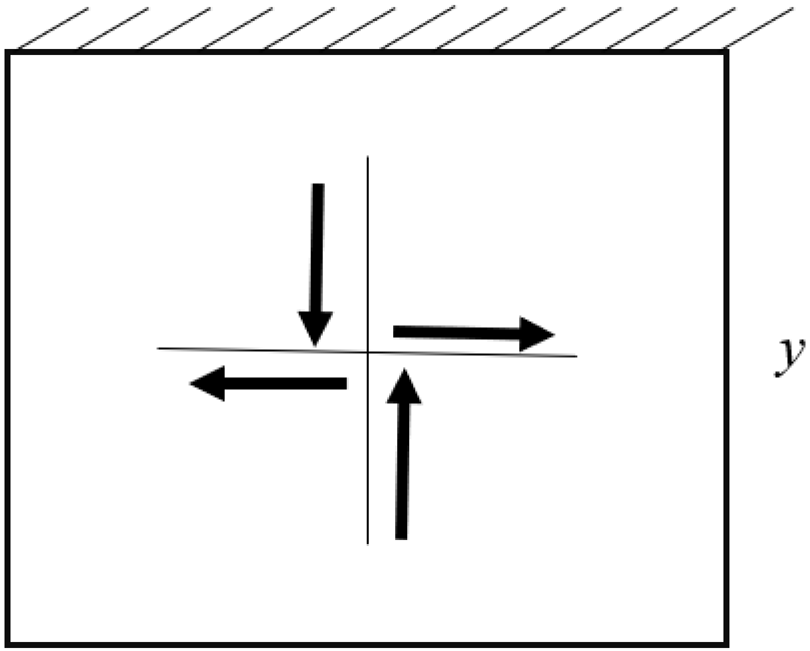


Рис. 3.

3) Неоднородные задачи в конечной области – прямоугольник с точечным источником (Касахара) того или другого типа, например (рис. 4), и разными граничными условиями на его сторонах.



Две пары сил,
у которых моменты равны по величине,
но противоположны по знаку

Рис. 4.

4) Температурные задачи для прямоугольника с разными ГУ на его сторонах.

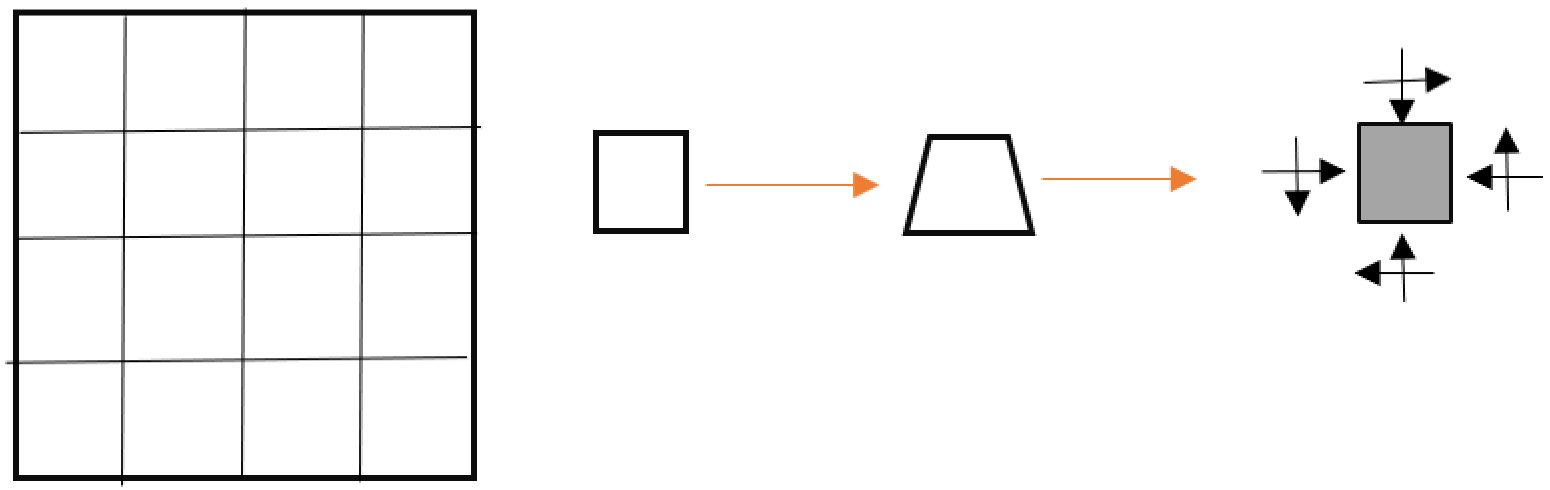


Рис. 5. Модель остаточных напряжений.

Выводы:

1) остаточные напряжения могут быть очень большими;

2) они быстро меняющиеся, поэтому их трудно диагностировать, тем более, измерить;

3) они самоуравновешены, т.е. знакопеременны, и, следовательно, быстро затухают от границ стыков областей, так что на небольшом расстоянии от границ плиты их практически нет;

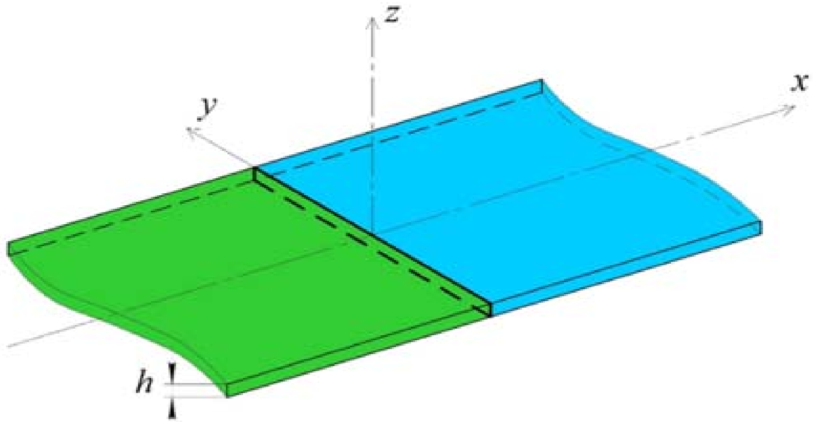
4) сброс остаточных напряжений сопровождается деформациями границ области, образованием трещин разного масштаба или разрушением, он также сопровождается перемещениями и вращениями фрагментов области, как абсолютно жестких.

Признаки существования остаточных напряжений:

- ✓ большие значения субгоризонтальных напряжений в земной коре;
- ✓ знакопеременность (самоуравновешенность) этих напряжений;
- ✓ быстрое затухание по мере удаления от границ области.

Kovalenko M.D., Abrukov D.A., Menshova I.V., Kerzhaev A.P., Yu G. Exact solutions of boundary value problems in the theory of plate bending in a half-strip: basics of the theory. Z. Angew. Math. Phys. **70**, 98 (2019).

Полученное решение описывает сброс остаточных напряжений при изгибе литосферных плит вследствие образования разрыва и физические проявления этого явления: остаточные деформации и перемещения фрагментов плиты как абсолютно жестких.



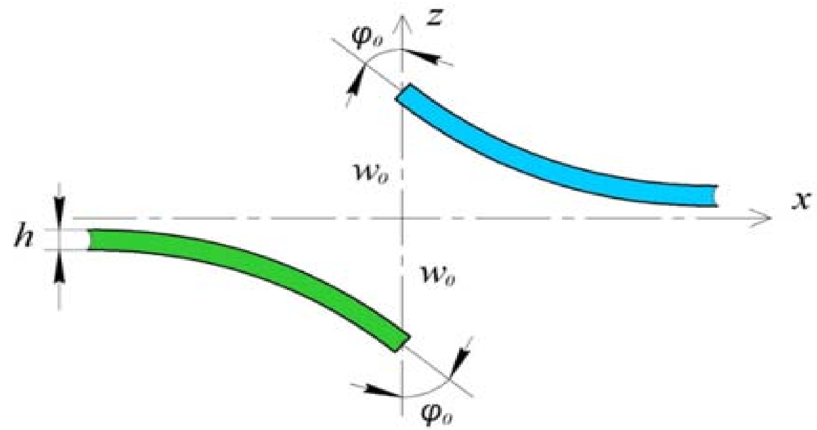


Рис. 6. Положение плит: слева – до разрыва, а справа – после разрыва и сброса остаточных напряжений. w_0– перемещение концов разрыва, φ_0 – угол поворота.

1. *Айтматов И.Т., Тажибаев К.Т., Казакбаева Г.О.* Исследование остаточных напряжений в горных породах на основе поляризационно-оптического метода моделирования. Вестник КРСУ. Геомеханика, 2006, Т. 6, № 7, С. 13-18
2. *Тажибаев К.Т.* Напряжения, процессы деформации и динамического разрушения горных пород. Бишкек. Алтын Принт, 2016

СЛЕДУЮЩИЙ ЭТАП ПРОВОДИМЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Аналогичная теория в косоугольной и полярных системах координат (треугольник, трапеция и т.п.).

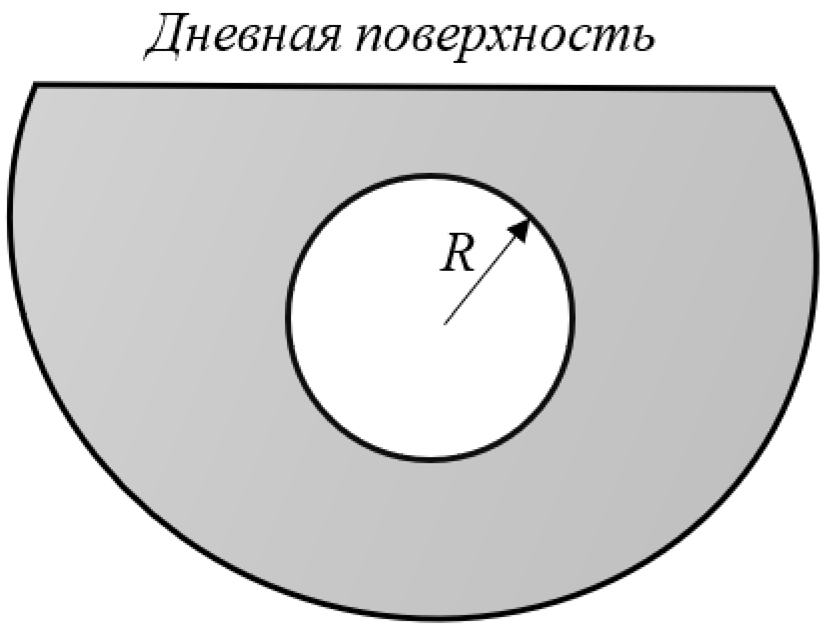


Рис. 7.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!