

4. *Cornel C.A.* Applicability of the Poisson earthquake - occurrence model. Sun Francisco. 1986. 66 p. (Prep./EPRI NP-4770; Project P.101-38).
5. *Nishenko S.P.* Circum - Pacific seismic potential 1989-1999. USGS, Open File Report 89-86. 1989. 126 p.
6. *Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация. М: Мир, 1969. 236 с.
7. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1964. 498 с.
8. *Гусев А.А.* Прогноз землетрясений, основанный на статистике сейсмичности // Сейсмичность и сейсмический прогноз. Свойства верхней мантии и их связь с вулканизмом на Камчатке. Новосибирск: Наука, 1974. С.109-119.
9. *Aki K.* A probabilistic synthesis of precursory phenomena // Maurice Ewing. Ser.4. 1981. P.566-574.
10. *Кокс Д., Оукс Д.* Анализ данных типа времени жизни // М.: Фиансы и статистика, 1988. 190 с.
11. *Grandori E., Grandori G.* Some probabilistic aspects of earthquake prediction // Meccanica. 1983. Vol. 18. P.246-253.
12. *Feng D., Gu J., Lin M. et all.* Assessment of earthquake hazard by simultaneous of the statistical method and the method of fuzzy mathematics // PAGEOPH. 1984. Vol.122, N 6. P.982 - 997.
13. *Zhuang K.Y., Wang W., Huang B-S.* MYCIN inexact inference and its application to earthquake synthesis prediction // The 25-th General Assembly of IASPEI. Abstracts, Istanbul: Turkey. 1989. 697 p.
14. *De Mare J.* Optimal prediction of catastrophes with applications to Gaussian processes // Ann. Probab. 1980. Vol. 8, N 4. P.841-850.

УДК 550.341

*Г.М.Молчан, О.Е.Дмитриева*

#### ИДЕНТИФИКАЦИЯ АФТЕРШОКОВ: ОБЗОР И НОВЫЕ ПОДХОДЫ

*G.M.Molchan, O.E.Dmitrieva*

#### IDENTIFICATION OF AFTERSHOCKS: METHODS AND NEW APPROACH

The problem of aftershock identification in earthquake catalogs is studied. Some empirical methods are considered and quantitatively analysed. Game theory approach is applied to formulate the problem which allows for the whole class of optimal methods of aftershock identification. Each method is optimal dependently on the goals and gives the best trade off between the number of missed aftershocks and the number of failurely identified ones. Some illustrations of the new approach to aftershock identification problem are presented.

## Введение

Сейсмические события склонны к группированию по пространству и времени. Наиболее распространенный тип группирования - афтершоки, т.е. толчки, следующие за главным землетрясением, с меньшей магнитудой. По разным оценкам они составляют 30-40% всех событий и несут важную информацию о процессе разрушения. Согласно гипотезе Омори интенсивность афтершоков в начальный период спадает по закону

$$\lambda_A(t) = \lambda t^{-p}, \quad t > t_0 \quad (1)$$

с  $p \approx 1$ . Дальнейший ход интенсивности неясен, его либо экстраполируют согласно (1), либо считают экспоненциально затухающим. Решению вопроса о затухании препятствуют два обстоятельства: отсутствие единой физической концепции афтершоков и статистические трудности. Удаленные по времени и/или по пространству афтершоки с трудом идентифицируются среди фона, имеющего тоже свои локальные особенности. Отсюда разнообразие существующих практических методов выделения афтершоков. Эта операция неизбежно присутствует при изучении землетрясений и сейсмического режима и естественно оказывает влияние на физические выводы. Поэтому нам представляется важным сделать обзор существующих методов выделения афтершоков и обсудить новые подходы к этой проблеме.

Главные результаты работы: количественный анализ "динамического алгоритма" Прозорова; математическая постановка задачи локальной идентификации афтершоков, ее теоретическое и практическое решения.

### 1. Обзор методов

Не претендуя на полноту, остановимся на нескольких наиболее распространенных методах идентификации афтершоков.

Ручной метод - способ визуальной идентификации ранних афтершоков обычно у сильных, хорошо обследованных землетрясений. Помимо каталогов событий он может опираться на дополнительные данные - геометрию разломов, механизмы землетрясений. Метод субъективен для поздних афтершоков и требует формализации при рутинной обработке данных.

Оконный метод - простейшая формализация ручного метода. Пусть определено основное событие  $t_0, \sigma_0, M_0$ , где  $t_0$  - время,  $\sigma_0$  - координаты эпицентра,  $M_0$  - магнитуда. Афтершоками основного события объявляются более слабые события из пространственно-временного окна:

$$t_0 < t < t_0 + T, \quad |g - g_0| < D, \quad M < M_0. \quad (2)$$

Иногда накладываются дополнительные требования, например, о том, чтобы число событий в окне значимо превышало ожидаемое там число фоновых событий с  $M < M_0$ .

При анализе каталогов событий принимается либо естественный временной порядок, либо магнитудный (сверху вниз). Тогда первое порядковое событие по определению становится основным. Удаляя его с собственными афтершоками, приходим к рекуррентному правилу определения основных событий. Если фор- и афтершоки выделяются одновременно, массив основных событий может зависеть от выбора порядка каталога.

В оконном методе пороги  $D$  и  $T$  зависят от магнитуды. Примеры зависимостей по работам Кнопова с соавторами [1-3], Прозорова [4] и др. [5, 6] даны на рис.1. Пространственные пороги частично согласуются между собой: при  $M < 6$  они соответствуют точности определения эпицентров, а при  $M > 6$  отвечают (по нашим собственным оценкам) средним размерам афтершоковых зон сильных землетрясений мира. Однако все пороги существенно больше размеров, вытекающих из известного соотношения Утсу-Секи [6], для площади ранних афтершоков

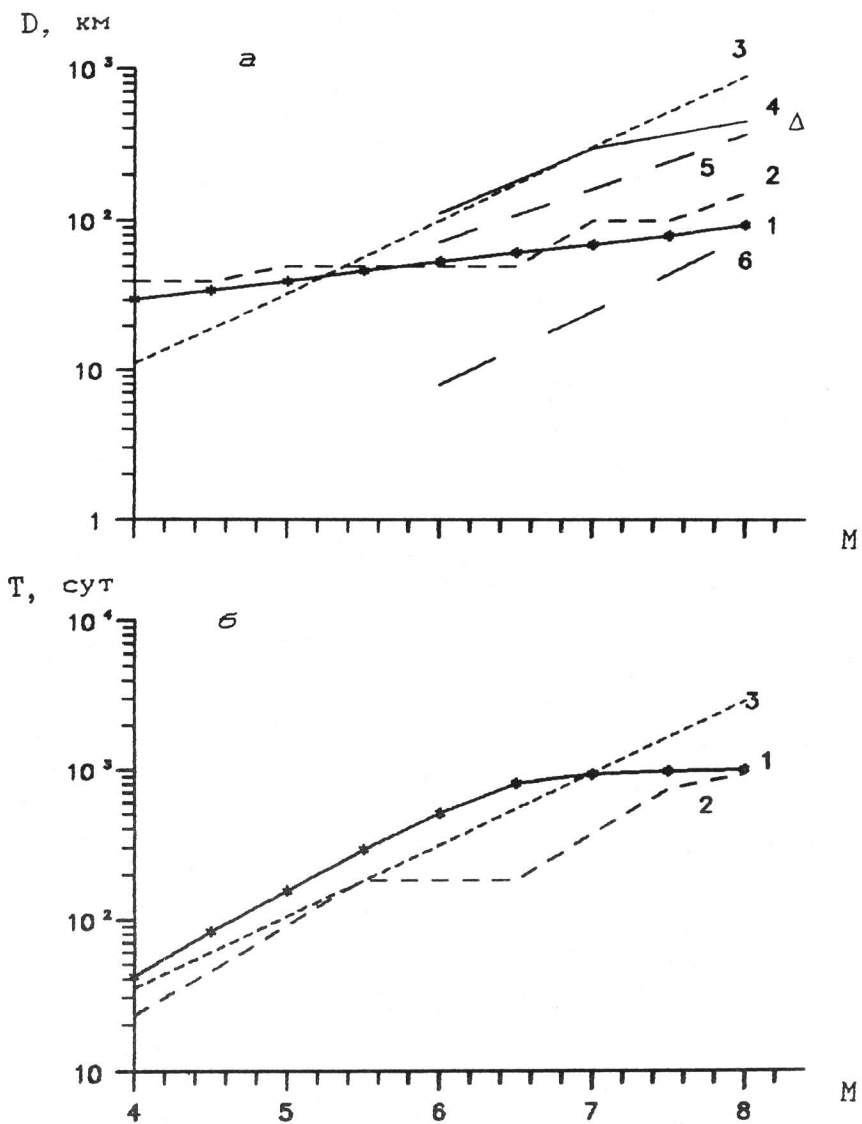
$$\lg S = M - 4, \quad M \geq 6.$$

На рис.1 это соотношение пересчитано на большую полуось афтершоковой зоны при соотношении осей 2:1.

Цели и выбор окон в [1-3] в определенной мере взаимосвязаны. В [1] ставилась задача проверки пуассоновости основных событий. Здесь пороги по времени наибольшие. Это позволяет сильнее ослабить временные связи между событиями, а следующая операция - проектирование потока событий только на временную ось - приводит к известной математической модели: суммированию слабо зависимых (здесь изреженных) потоков событий. При весьма общих ограничениях такое суммирование приводит к пуассоновскому потоку.

В задачах, связанных с прогнозом землетрясений [2, 7], пороги по времени существенно ниже, чем в предыдущем случае. Сужение порогов естественно, поскольку оно позволяет сохранить прогностические свойства очищенного каталога. Но тогда столь же естественным в этих условиях является исследование роли остаточных афтершоков в прогнозе, например, парных землетрясений. Насколько нам известно, такой анализ не проводился.

В [3] стояла задача проверки равенства наклонов частотно-магнитудных кривых для фор- и афтершоков. Результаты [3] показывают,



Р и с. 1. Пространственные (а) и временные (б) окна афтершоков согласно работам [1-6]. Номер кривой соответствует номеру литературного источника; треугольником отмечено Аляскинское землетрясение 1964г. [26]

что гипотеза о равенстве наклонов естественно тем более значима, чем шире пространственно-временные окна.

Метод окон удобен для автоматической обработки каталогов, но из-за фиксированных порогов не позволяет учесть локальные особенности пространственно-временной локализации афтершоков. В частности, центр афтершоков сильных событий обычно смещен относительно

эпицентра главного толчка. По нашим данным (см. разд.5) при  $M_0=6,5$  смещение составляет 3 - 30 км, а размер рекомендованного в [2] окна  $D = 50$  км. Поэтому при осторожных пространственных окнах может теряться заметная часть афтершоков из-за неправильного центрирования. В работах по прогнозу это может приводить к явлению ложной активизации.

**Кластерные методы.** Здесь вводятся понятия близости для пары событий (метрика  $d$ ), а иногда и для пары множеств событий. На этой основе выделяются компактные группы или кластеры близких событий, в которых сильнейшее объявляется основным, а остальные по отношению к нему фор- и афтершоками. Методы отличаются большим разнообразием в определении понятия "близости" а также в использовании априорной физической информации.

В *формальных методах* землетрясения рассматриваются как однородные пространственно-временные объекты или точки  $(g, t) = x$ , которые необходимо разбить на "хорошо" рассеянные группы с "высокой" внутригрупповой концентрацией элементов. На задачах подобного рода сформировалась целая научно-прикладная дисциплина - кластерный анализ. Содержательный обзор ее можно найти в книге [8]. Один из наиболее ранних методов теории - метод кратчайшего пути [9] или "Single-Link Cluster Analysis" (SLC) недавно стал интенсивно использоваться и в сейсмостатистике для изучения свойств афтершоков, [10-12]. В этом методе исходная совокупность точек превращается в связный неориентированный граф с минимальной суммарной длиной ребер. Под длиной ребра понимается расстояние между точками в смысле выбранной метрики  $d$ . После выбрасывания ребер длиной больше порога  $d_0$  граф распадается на точки и искомые кластеры. Полученное разбиение обладает некоторыми свойствами оптимальности [8], в частности, кратчайшее расстояние между точками двух кластеров  $K$  (межкластерное расстояние) всегда больше внутрикластерного расстояния:

$$d(K) = \max_{x_i \in K} \min_{x_j \in K} d(x_i, x_j).$$

В работах [10-12] метрика конкретизирована для землетрясений в виде

$$d^2 = |g_1 - g_2|^2 + c^2 |t_1 - t_2|^2, \quad (3)$$

где  $c$  - параметр. Она не зависит от магнитуды, что физически не очень естественно, и инвариантна относительно сдвига по пространству и времени. Последнее не очень согласуется с законом Омори. Эти узкие места метода необходимо учитывать, если кластеры интер-

претировать как фор- и афтершоки. Работа [11] показывает, что SLC-метод тем не менее может быть эквивалентен оконным и другим методам в интегральном смысле. Речь идет о близости оптимизированных показателей кластеризации "s" в модельных примерах, где

$s = (\text{доля афтершоков, которые правильно присоединены к своим основным событиям}) + (\text{доля правильно идентифицированных основных событий}).$

К сожалению, интегральный показатель s не дает представления о качестве выделения афтершоковых последовательностей для сильных и слабых землетрясений порознь. В то же время пример Аляскинского землетрясения 1964 г. ( $M = 8,4$ ) показывает, что параметры  $s, d_0$  не позволили авторам [12] настроить SLC-метод одинаково хорошо на основные толчки разной силы. Продолжительные афтершоки указанного землетрясения SLC-метод расщепляет на множество кластеров (два из них достаточно мощные). Однозначного ответа на вопрос хорошо это или плохо нет. Однако, чем слабее событие, тем труднее отличить любые его афтершоки от "шума". Поэтому кажется естественным предъявлять повышенные требования прежде всего к выделению наиболее очевидных афтершоковых последовательностей сильных событий.

В неформальных методах учитываются магнитуда событий и статистические свойства фор- и афтершоков, а сам кластер понимается как временная цепочка причинно-связанных событий, либо как ветвящееся дерево, где каждое событие параллельно генерирует свои "прямые" афтершоки. Статистические свойства прямых афтершоков и афтершоков в целом могут существенно отличаться. Первые пока изучены недостаточно, поэтому методы кластеризации опираются на свойства афтершоков в целом.

Остановимся на методе Сэведжа-Ризенберга [13,14]. В нем для определения близости сейсмических событий использован оконный метод. Пространственный порог  $d$  локальной близости к событию магнитуды  $M$  (USGS Coda-магнитуда) определен соотношением

$$\lg d \text{ [km]} = 0,4 M - 1,945 + k,$$

где  $k$  - параметр. При  $k=0$  величина  $d$  ассоциируется с радиусом плоской зоны разрыва, где произошел сброс касательных напряжений в 30 бар (такова средняя оценка по натурным измерениям). Из модельной задачи круговой трещины находится сейсмический момент:  $16/7 \Delta \sigma d^3$  [15]. Отсюда возникает зависимость  $d$  от момента или магнитуды.

Очередное событие считается пространственно близким к любому дереву-кластеру, сформированному к моменту  $t$ , если оно "близко" к

одному из двух его элементов: сильнейшему (с магнитудой  $M_* = \max$ ) либо наиболее позднему (с моментом  $t^* = \max$ ). Параметр близости "k" может выбираться разным для указанных представителей кластера ( $k=1$  и  $0$  соответственно).

Очередное событие  $(t, g, M)$  присоединяется к таким кластерам, к которым оно близко по пространству и времени:

$$t - t^* < \min(\tau, 10 \text{ сут})$$

Пересекающиеся кластеры сливаются в один. Порог  $\tau_g$  устанавливается с помощью закона Омори; он зависит от времени, чтобы учесть спадание афтершоковой активности.

Пусть  $\lambda(u | M_*)$  - закон Омори для основного толчка магнитуды  $M_*$ , где  $u$  - время от сильнейшего события в кластере. Считая поток афтершоков пуассоновским, момент следующего (после  $t^*$ ) события распределен согласно формуле:

$$P\{t > t^* + \tau\} = \exp\left(-\int_0^{\tau} \lambda(u + t^* - t_* | M_*) du\right),$$

где  $t_*$  - время события с магнитудой  $M_*$ .

Из условия  $P\{t > t^* + \tau\} < \varepsilon$  находится порог  $\tau_g$ :

$$\int_0^{\tau} \lambda(u + t^* - t_* | M_*) = -\ln \varepsilon, \quad \varepsilon = 0,05.$$

В работах Ризенберга и Л.Джонс [14,16] интенсивность афтершоков не зависит от точки пространства, т.е. едины и закон Омори и среднее число афтершоков  $\lambda_A(M_0)$ , как функция магнитуды основного толчка  $M_0$ . Величина  $\lambda(u | M_0)$  является интегральной характеристикой магнитудно-временной интенсивности афтершоков  $\lambda(u, M | M_0)$ , которая для Калифорнии определена соотношением [16]

$$\lambda(u, M | M_0) = 10^{\frac{a+b(M_0-M)}{M_0}} (u + t_0)^{-p}, \quad M < M_0. \quad (4)$$

где  $a = -1,76$ ,  $b = 0,91$ ,  $t_0 = 0,05$ ,  $p = 1,07$ .

Кластерные методы не фиксируют пространственную структуру распределения афтершоков и поэтому особенно удобны для учета миграции событий.

В целом достоинства и недостатки любых методов зависят от конечных целей. В методе Ризенберга декластеризованный каталог в некотором смысле должен походить на каталог некоррелированного однородного точечного поля. К сожалению, такие цели не ограничивают роста числа ложных афтершоков.

Методы моделирования и статистического оценивания. Имеются в виду методы изучения общих статистических свойств фор- и афтер-

шоков, минуя субъективную стадию выделения кластерных событий. Они опираются на феноменологическое описание сейсмического режима с помощью вероятностных моделей (см. [17-19]). Свойства афтершоков закладываются в модель в параметрическом виде, а параметры оцениваются статистическими методами, например, методом максимального правдоподобия (если правдоподобие удастся выписать хотя бы приближенно). Такой подход наиболее естественный. Однако он неизбежно связан с потерей детальности в описании режима. В содержательных, многопараметрических ситуациях задача оценивания становится неустойчивой; область максимума функции правдоподобия оказывается очень широкой [18]. Стабильность задачи оценивания связана со снижением размерности модели, т.е. с узконаправленным изучением отдельных свойств сейсмического режима.

Метод Прозорова ([4], см. также [20, 21]) - во многом формализует ручной метод, т.е. автоматически формирует пространственную зону рассеяния афтершоков, в которой события выделяются до тех пор, пока их интенсивность не станет сравнимой с локальной фоновой интенсивностью. Метод задуман и использовался для разделения каталога на основные толчки и афтершоки. Для определения основных толчков здесь используется магнитудная упорядоченность событий (от сильных к слабым).

Идентификация афтершоков основного события  $(t_0, g_0, M_0)$  представляет многоступенчатую процедуру. На первой стадии идет поиск основных событий с афтершоками; цель - выделить не все афтершоки, а хотя бы часть, показав их статистическую значимость. Для этого используются пространственные окна  $S$  размера  $D(M_0)$  (см. рис.1), в которых ведется последовательный (по времени) анализ событий. А именно, очередное событие  $(t, g, M)$ ,  $t > t_0$ ,  $g \in S$  идентифицируется как афтершок, если

$$n(S \times \Delta_t) \geq R \lambda_{\Phi}(S) \cdot |\Delta_t|, \quad (5)$$

где  $n(S \times \Delta_t)$  - число событий в объеме  $S \times \Delta_t$ ;

$\Delta_t = (t_0 + \alpha(t - t_0), t)$  - временной интервал, составляющий  $(1-\alpha)$  - долю текущего интервала времени  $(t_0, t)$ ;

$\lambda_{\Phi}(S)$  - ожидаемое число фоновых событий в  $S$  на единицу времени;

$R$  - порог (в работах автора варьируется от 3 до 100).

Величина  $R-1$  играет роль отношения сигнал/шум, поскольку  $n(S \times \Delta_t)$  складывается из афтершоков и фоновых событий, а  $\lambda_{\Phi} |\Delta_t|$  определяет оценку фона в  $S \times \Delta_t$ ;



$\alpha$  - параметр (используется значение  $\alpha = 0$ ). Выбор  $\alpha \neq 0$  предпочтителен. Дело в том, что вопрос об идентификации события в момент  $t$  зависит от интенсивности потока афтершоков в  $S$  в этот момент. Понятно, что величина  $n(S \times \Delta_t) / |\Delta_t|$  лучше оценивает интенсивность при  $\alpha > 0$ . Идея выбора интервала  $\Delta_t = (t_1, t)$ ,  $t_1 > t_0$  реализована в [21] иначе:  $t_1$  таково, что  $\Delta_t$  содержит 50% событий из  $(t_0, t)$ . Это решение неудачно, поскольку основная доля событий выпадает на первые часы-дни.

Идентификация афтершоков в  $S$  прекращается при первом нарушении условия (5) либо когда время идентификации превышает порог  $T$ :

$M_0$ .....	4	5	6	6,5	8
$T$ , год .....	1	2	3	4	5

Последующие стадии выделения афтершоков связаны с уточнением афтершоковой зоны  $S$ . Если число первичных афтершоков не мало,  $n > 10$ , и они значимы по отношению к пуассоновской гипотезе, то априорное окно  $S$  заменяется эллиптическим и временная динамика идентификации афтершоков повторяется заново.

Новое окно  $S$  определяется эллипсом рассеяния предварительно выделенных афтершоков:

$$S_k = \{ \mathbf{g} : \hat{\rho}^2 = (\mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}}_*) \hat{\mathbf{B}}^{-1} (\mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}}_*)' \leq k^2 \} .$$

Здесь  $\hat{\mathbf{g}}_* = \sum \mathbf{g}_i / n$  - афтершоковый центр;

$\hat{\mathbf{B}} = \sum (\mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}}_*)' (\mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}}_*) / n$  - эмпирическая матрица ковариации  $\{\mathbf{g}_i\}$ , где  $\mathbf{g}$  записывается как вектор-строка;

$k$  - размер эллипса рассеяния.

Афтершоки ищутся сразу в нескольких эллиптических зонах разных размеров  $k_i$ . Поэтому афтершоки в конечном счете принадлежат пирамиде  $V = \{S_k \times \Delta t_i\}$ , в которой при меньшем основании, как правило, больше временной интервал  $\Delta t_i$ . Впрочем, типична ситуация, когда  $V$  - цилиндр, поскольку при уменьшении размера зоны существенно продвинувшись по времени не удается.

Если принять закон рассеяния афтершоков гауссовым, то размеры  $k$  можно выбрать, исходя из заданного уровня значимости зоны  $S_k$ , т.е. величины  $\varepsilon_k = P\{\mathbf{g} \in S_k\}$ . При точно известных  $\mathbf{g}_*$  и  $\mathbf{B}$  статистика  $\hat{\rho}^2$  имеет распределение  $\chi^2_2$ , поэтому  $k^2_{\varepsilon} = 2 \ln 1/\varepsilon$ . В рамках гауссовской гипотезы нетрудно учесть также разброс  $\hat{\mathbf{g}}_*$  и  $\hat{\mathbf{B}}$  [5]. Пусть  $n$  - число наблюдений, использованных для оценивания  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{B}$ , тогда  $2 \hat{\rho}^2 (n-1) / (n-2)$  имеет распределение Фишера со степенями свободы  $(2, n-1)$ . Отсюда получаем связь

$$k_s^2 = (s^{-2/(n-1)} - 1) \frac{(n-1)^2}{n-2}.$$

Типично используемые размеры эллипсов: 2, 3 и 4, что примерно соответствует уровням значимости 0,1, 0,01 и 0,001 при  $n > 40$ . Приведенные соображения полезны для обоснованного выбора максимального размера эллипса. Мотивы выбора остальных размеров неясны.

Метод Прозорова хорошо приспособлен для учета пространственной локализации афтершоков и, как все оконные методы, позволяет апостериори судить (но не контролировать) о количестве ложных афтершоков. К сожалению, он зависит от очень чувствительного параметра  $R$  [4], роль которого требует специального анализа. При высоких порогах  $R$  афтершоки теряются, либо их серии разбиваются на самостоятельные подпоследовательности ранних и поздних событий. Если процедуру идентификации не сочетать с выделением форшоков, то при любых  $R$  форшоки становятся либо основными событиями, либо афтершоками форшоков. Эти замечания важны при оценке статистической однородности афтершоковых данных.

## 2. Количественный анализ метода Прозорова

Чтобы оценить роль параметра  $R$  в методе Прозорова, рассмотрим модельную ситуацию: стационарный пуассоновский поток событий в области  $S$ . Область играет роль афтершоковой зоны, а поток может отвечать чистому фону либо смеси фона и афтершоков с постоянной интенсивностью. Последнее допущение естественно для поздних афтершоков на финальном отрезке времени, когда решается вопрос о прекращении их выделения.

**У т в е р ж д е н и е 1.** Для смеси пуассоновских потоков с интенсивностями  $\lambda_\Phi$ ,  $\lambda_A$  процедура (5) с параметрами  $(\alpha, R)$  выделит случайное число событий  $\nu$  с распределением  $P(\nu=n) = p_n(\mu)$ ,  $n \geq 0$ , указанным ниже. Здесь  $\mu = R_0/R$  и  $R_0 = (\lambda_A + \lambda_\Phi)/\lambda_\Phi$  - истинный аналог априорной величины  $R$ .

**С л у ч а й  $\alpha = 0$ .** Распределение величины  $\nu$  имеет вид

$$p_n = \frac{[\mu(n+1)]^n}{(n+1)!} e^{-(n+1)\mu} =$$

$$= \frac{e^{1-\mu}}{\sqrt{2\pi}} \frac{[\mu e^{1-\mu}]^n}{(n+1)^{3/2}} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Оно идентично распределению численности пуассоновской популяции с параметром  $\mu$ . (Популяция начинается с одной частицы, размножается и состоит из потомков всех поколений; каждая частица  $i$ -го поколения независимо от других порождает пуассоновское число потомков  $(i+1)$ -го поколения с параметром  $\mu$ .) При  $\mu > 1$  распределение (6) надо дополнить ненулевой вероятностью  $p_* = p(n=\infty)$ . Она определяется уравнением

$$\mu = \frac{1}{p_*} \ln \frac{1}{1 - p_*}, \quad 0 < p_* < 1 \quad (7)$$

и имеет асимптотики

$$p_* \cong \begin{cases} 2(\mu - 1), & \mu \downarrow 1 \\ 1 - \exp(-\mu), & \mu \rightarrow \infty. \end{cases}$$

При  $\mu < 1$  среднее  $E\nu = \mu(1-\mu)^{-1}$ , а стандартное отклонение

$$\sigma(\nu) = \mu^{1/2}(1-\mu)^{-3/2}.$$

С л у ч а й  $\alpha = 1/2$ . Первые две вероятности  $p_0, p_1$  совпадают со случаем  $\alpha = 0$ , остальные получены явно для  $n = 2$  и  $3$ :

$$p_2 = 0,5 \mu \exp(-2\mu)(1+\mu-\exp(-2\mu)), \quad (8)$$

$$p_3 = 0,5 \mu \exp(-2\mu) [(1+\mu)/2 + \mu^2/3 - (1+2\mu-4\mu^2)\exp(-2\mu)/2].$$

Доказательство утверждения вынесено в приложение.

З а м е ч а н и е. Тип асимптотики (6):  $p_n \propto n^{-\theta}$ ,  $\theta = 3/2$ , при  $\mu \cong 1$  универсален для общих моделей размножения Гальтона-Ватсона и использовался Вир-Джонсом [22] для "вывода" параметра наклона "b" в частотно-магнитудном законе для процессов разрушения (частица ассоциируется с микротрещиной, популяция - с трещиной). Предложенная им связь  $b = A(\theta - 1)$ , где  $A$  - параметр связи энергии с магнитудой  $E \propto 10^{A_M}$ , вытекает из соотношения  $p(\nu > n) \propto n^{1-\theta}$  и допущения  $\nu$  пропорционально энергии. По-видимому, эта связь требует корректировки на дробную размерность  $D$ ,  $0 < D \leq 3$ , пространственного ветвления микротрещин. Пусть  $\nu \propto L^D$ , где  $L$  - линейный размер объема, занимаемого популяцией микротрещин. Принимая обычную связь  $E \propto V$  и  $A = 1,5$ , получим  $b \cong A(\theta-1)D/3 \leq A(\theta-1) \cong 0,75$ . Эти рассуждения указывают на ограниченность ветвящейся модели для вывода параметра "b" в законе повторяемости, поскольку  $b \cong 1$ .

Найденные распределения (6), (8) удобнее анализировать, пользуясь таблицей вероятностей  $P(\nu \geq n)$ .

Распределение  $P(\nu \geq n) \cdot 100\%$  числа афтершоков, выделенных методом Прозорова при разных порогах  $R$

n	Н о р м и р о в а н н ы й п о р о г , $R/R_0$											
	1		2		5		10		15		20	
	a	б	a	б	a	б	a	б	a	б	a	б
1	63	63	39	39	18	18	9,5	9,5	6,4	6,4	4,9	4,9
2	50	50	21	21	4,7	4,7	1,3	1,3	0,6	0,6	0,35	0,35
3	42	37	13	10	1,4	1,2	0,22	0,18	0,07	0,06	0,03	0,02
4	37	28	8	5	0,5	0,3	0,04	0,02	0,008	0,005	0,003	0,002

П р и м е ч а н и е. а, б - значения параметра  $\alpha$ : 0(а); 0,5(б).  $R_0-1$  - истинное отношение "сигнал/шум".

Чтобы извлечь из нее практические выводы следует помнить, что в реальности интенсивность  $\lambda_A$  затухает, процедура Прозорова с  $\alpha = 1/2$  постоянно забывает события первой половины текущего интервала времени, а величины  $R_0(t)$  и  $\mu = R_0/R$  постоянно уменьшаются. Поэтому найденные распределения  $\nu$  дают представления о приросте выделяемых событий в переменных условиях. При этом полностью изученный случай  $\alpha = 0$  служит аппроксимацией случая  $\alpha = 1/2$ .

Из таблицы следует, что распределения  $\nu$  с  $\alpha=0$  и  $1/2$  близки при  $R/R_0 > 5$ ; при  $\alpha = 1/2$

$$P(\nu > 3) \leq 5\% , \quad R/R_0 \geq 2. \quad (9)$$

Последнее означает, что процедура выделения афтершоков быстро останавливается, как только истинное отношение сигнал/шум  $R_0(t)$  достигнет уровня  $R/2$ .

В [4] содержится фактическое подтверждение этому: при уменьшении порога  $R$  в 5 раз ( $R_1=100$ ,  $R_2=20$ ) продолжительность выделения афтершоков увеличилась примерно в 5-6 раз ( $t_1 = 1+3$  года,  $t_2 = 10+12$  лет). Действительно,  $R_0(t_1):R_0(t_2) \cong (R_1/2):(R_2/2)$ . В условиях закона Омори с  $p = 1$   $R_0(t)$  пропорционально  $t$ , поэтому  $R_1:R_2 \cong t_2:t_1$ .

Если заботиться о чистоте каталога афтершоковых последовательностей, то величина  $R$  должна быть выше относительных вариаций фона  $\lambda_\Phi$ . Фоновая сейсмичность изменяется в пространстве и времени, а оценки  $\lambda_\Phi$  получаются осреднением локальной сейсмичности за максимальный отрезок времени (для мировых каталогов пространственная ячейка осреднения составляет 50-100 км, а время - 60 лет). При объеме статистики основных толчков в ячейке  $n = 10$  отношение 95% доверительных границ  $\lambda_\Phi$  составляет величину 3, а при  $n = 50$  - око-

ло 2. Ризенберг [14] приводит интересный, но, вероятно, редкий пример, когда  $\lambda_{\phi}$  после сильного землетрясения изменилось в 250 раз. Поэтому для массового анализа афтершоков величины  $R \approx 10 + 20$ , вероятно, можно считать наиболее приемлемыми. При указанных порогах теряются афтершоки с  $R_0(t) = 5+10$ .

Наши расчеты показывают, что  $R_0(t)$  для первых 10 дней имеет порядок  $10^2 - 10^3$ . Данные относятся к событиям с  $M > 6$ . Если считать, что число фоновых событий пропорционально площади, а число афтершоков и занимаемая ими площадь пропорциональны  $10^{bM_0}$  (см. (4)), где  $b$  - наклон в законе повторяемости, то величина  $R_0(t)$  должна слабо зависеть от магнитуды. При малых  $M$  сказанное может осложняться точностью определения эпицентров.

### 3. Новые подходы к выделению афтершоков

Будем исходить из того, что афтершоковые последовательности конечны, их элементы концентрируются во времени и пространстве и смешаны с фоном. Поэтому безошибочная идентификация афтершоковых последовательностей невозможна. Расширяя пространственно-временной поиск афтершоков у фиксированного основного толчка, мы захватываем больше ложных событий (из фона и чужих афтершоков  $n_A^-$ ), а сужая - пропускаем истинные кластерные события (в количестве  $n_A^+$ ). Поиск компромисса между ошибками двух родов:  $\Lambda_A^{\pm} = E n_A^{\pm}$  представляется нам естественной основой для точной постановки задачи выделения афтершоков.

Суммарный объем афтершоков с  $M > M_{\min}$  для всех основных событий фиксированной магнитуды  $M_0$ , по-видимому, слабо зависит от  $M_0$ . при  $M_0 - M_{\min} > 2$  (см. (4)). Однако афтершоковая последовательность сильного события более многочисленна, легче идентифицируется и поэтому имеет больший приоритет при изучении афтершоков.

Учитывая это, мы локализуем задачу. А именно, рассмотрим типичную идеальную ситуацию, когда в некоторой пространственно-временной области  $G \times T$  локализована смесь независимых фоновых событий и одной афтершоковой последовательности известного основного толчка  $(M_0, \sigma_0, t_0)$ . Явно или неявно такая локализация всегда присутствует в большинстве неформальных методов отбора афтершоков. Идентифицируем афтершоки в этой простейшей ситуации. Для этого необходимо сформулировать качество идентификации, например, в терминах некоторой функции "потерь"  $\gamma = f(\Lambda_A^+, \Lambda_A^-)$ , зависящей от ошибок  $\Lambda_A^{\pm}$ . Тогда цель идентификации сводится к минимизации потерь  $\gamma$ , а математическая задача - к поиску правила, на котором достигается ми-

нимум  $\gamma$ . Такая задача решена ниже; наиболее полно она решена в условиях пуассоновости потоков фона и афтершоков.

В качестве функции потерь нам представляются интересными две:  $\gamma = \alpha \Lambda_A^+ + \beta \Lambda_A^-$  и  $\gamma = \max(\alpha \Lambda_A^+, \beta \Lambda_A^-)$ . Оптимальный принцип выделения афтершоков, отвечающий им, назовем соответственно *игровым*:

$$\alpha \Lambda_A^+ + \beta \Lambda_A^- = \min, \quad (10)$$

где  $\alpha$  - "потери" от пропуска одного афтершока, а  $\beta$  - "потери" от объявления фонового события афтершоком,

и *минимаксным*:

$$\max(\alpha \Lambda_A^+, \beta \Lambda_A^-) = \min. \quad (11)$$

При  $\alpha = \beta$  минимаксный принцип приводит к принципу компенсации ошибок:  $\Lambda_A^+ = \Lambda_A^-$ , т.е. в среднем число выделенных событий совпадает с истинным. В общем случае условие (11) контролирует (см. ниже) соотношение между ошибками:  $\Lambda_A^- / \Lambda_A^+ = \alpha / \beta$ .

**У т в е р ж д е н и е 2.** (Пуассоновский случай). Если потоки фоновых и афтершоковых событий пуассоновские с функциями интенсивности  $\Lambda_\Phi(g, t)$  и  $\Lambda_A(g, t)$  соответственно, то  $\gamma$ -оптимальное решающее правило идентификации афтершоков для случаев (10, 11) имеет вид

$$\pi(g, t) = \begin{cases} \text{афтершок, если} & L(g, t) > c, \\ \text{фоновое событие, если} & L(g, t) < c, \end{cases} \quad (12)$$

где  $L = \Lambda_A(g, t) / \Lambda_\Phi(g, t)$ .

Для игрового принципа  $c = \beta / \alpha$ , в минимаксном принципе порог  $c$  определяется уравнением  $\alpha \Lambda_A^+ = \beta \Lambda_A^-$ .

В частности, пусть  $T = (0, \infty)$ ,  $G = R^2$ ,

$$\Lambda_\Phi(g, t) = \lambda, \quad \Lambda_A(g, t) = \Lambda_A p(g) f(t), \quad (13)$$

где  $\lambda$  - среднее число событий в афтершоковой последовательности,  $f(t)$  - нормированный закон Омори после момента  $t > t_0$ :

$$f(t) = (t/t_0)^{-\theta} \frac{\theta-1}{t_0}, \quad t > t_0 \quad (14)$$

и  $p(g)$  - гауссова плотность распределения афтершоковых событий по пространству

$$p(g) = (2\pi \det B)^{-1} \exp(-r^2(g - g_x)/2), \quad (15)$$

где  $r^2(g) = g'V^{-1}g$  - квадратичная форма,  $g_x$  - центр, а  $V$  - матрица рассеяния афтершоков.

Тогда  $\gamma$ -оптимальный метод объявляет афтершоками все события, для которых

$$1/2 r^2(g-g_x) + \theta \ln t/t_0 < c, \quad t > t_0. \quad (16)$$

В случае (10)

$$c = c_0 = \ln \frac{\alpha}{\beta} \frac{\theta-1}{2} \frac{\Lambda_A}{\Lambda_\Phi}, \quad (17)$$

где  $\Lambda_\Phi = t_0 |S_1| \lambda_\Phi$  - среднее число фоновых событий в эллиптической зоне  $S_1 = \{g: r(g-g_x) < 1\}$  размера 1 за время  $t_0$ . В минимаксном случае  $c$  определяется уравнением

$$c + \ln \left[ 1 - \frac{c/\theta}{\exp(c/\theta)-1} \right] = c_0 - \ln \theta. \quad (18)$$

*Общий случай.* Рассмотрим общие потоки фоновых и афтершоковых событий, но с интенсивностями специального вида (13), где  $f(t) \geq 0$ ,  $\int f = 1$ , а  $p(g) = (2\pi \det V)^{-1} \psi(r(g-g_x))$ , где  $\psi \geq 0$  - убывающая функция, нормированная условием  $\int_0^\infty \psi(x) x dx = 1$ . Ограничимся классом решающих правил  $X$ , которые объявляют афтершоками события из областей вида

$$\{ (g, t) : r(g-g_x) < u(t) \}, \quad (19)$$

где  $u$  - произвольные неотрицательные функции. Тогда правило (12) принадлежит  $X$  и является в этом классе оптимальным относительно потерь (10) и (11). В частности, для  $\psi = \exp(-x^2/2)$  и  $f$  вида (14) оно приводит к критериям (16)-(18).

**З а м е ч а н и я:** 1) Первая часть утверждения, как и его доказательство, важны с точки зрения анализа динамических методов Прохорова и Ризенберга. Они показывают, что в рамках пуассоновской гипотезы, на чем базируются оба метода, нельзя извлечь дополнительных выгод от введения динамики (последовательного анализа) в процесс идентификации.

2) Процедура (12) отвечает по существу целому классу методов идентификации в зависимости от целей и априорных представлений об афтершоках. Простейшие представления заложены в параметризации интенсивностей (13). Здесь учтены маргинальные распределения афтершоков по пространству (эллиптическое рассеяние) и по времени (закон Омори). Нетрудно с помощью модели  $\Lambda_A(g, t)$  учесть миграцию либо диффузию афтершоков. Весь вопрос в том, насколько эти особенно-

З.Зак. I304

сти поведения афтершоков типичны и интересны при изучении афтершоков в целом.

*Доказательство.* Пусть  $(g_i, t_i)$  – реализация смеси независимых пуассоновских потоков в  $G \times T$  с интенсивностями  $\Lambda_\Phi(g, t)$  и  $\Lambda_A(g, t)$ . Она может быть получена следующим образом: с вероятностями  $p_n = \Lambda^n e^{-\Lambda} / n!$ ,  $\Lambda = \Lambda_\Phi + \Lambda_A$  – среднее число событий смеси в  $G \times T$ , разыгрывается число точек  $v = n$ ; каждая точка получается независимо согласно распределению  $P_\Phi(g, t) = \Lambda_\Phi(g, t) / \Lambda$  либо  $P_A(g, t) = \Lambda_A(g, t) / \Lambda$ . Выбор распределения осуществляется случайным бросанием  $\xi$  с вероятностями  $\mu_\Phi = \Lambda_\Phi / \Lambda$ ,  $\mu_A = \Lambda_A / \Lambda$  исходов  $\Phi$  и  $A$ . Иначе говоря, в условной ситуации  $v = n$  осуществляется  $n$  независимых байесовских экспериментов, в каждом из которых случайно реализуется одна из гипотез  $H_\Phi : P = P_\Phi$  или  $H_A : P = P_A$ . Соответственно на каждом шагу необходимо построить решающее правило классификации наблюдения в пользу одной из гипотез. В силу условной независимости экспериментов, решающие правила достаточно рассматривать тоже условно независимыми.

Пусть  $\pi(g, t)$  – правило идентификации одной точки,  $\pi = \Phi$  или  $A$  с некоторым распределением. Если  $\alpha, \beta$  – цены ошибок, то в игровом принципе цена одного решения есть

$$\begin{aligned} & \alpha P\{\xi = A, \pi = \Phi\} + \beta P\{\xi = \Phi, \pi = A\} = \\ & = \alpha \mu_A P(\pi = \Phi | H_A) + \beta \mu_\Phi P(\pi = A | H_\Phi). \end{aligned}$$

Пришли к линейной функции потерь в задаче проверки гипотез  $H_A$  и  $H_\Phi$ . Оптимальное решающее правило для нее описывается критической зоной принятия  $H_A$ :

$$P_A(g, t) / P_\Phi(g, t) > \beta \mu_\Phi / \alpha \mu_A$$

(см. [23]). Учитывая принятые обозначения, получим

$$L = \Lambda_A(g, t) / \Lambda_\Phi(g, t) \geq \beta / \alpha.$$

Оптимальная цена ошибки не зависит от  $n$ . Поэтому найденное правило оптимально и в безусловной ситуации,  $v$  – любое. Минимаксный случай сводится к оптимальной проверке гипотез  $H_A$  и  $H_\Phi$  относительно потерь

$$\max(\alpha \mu_A P(\pi = \Phi | H_A), \beta \mu_\Phi P(\pi = A | H_\Phi)).$$

В статистике [23] эта задача традиционно решается для случая  $\alpha = \beta$ . Случай произвольных функций потерь  $\gamma$  рассмотрен в [24]. В указанном примере приходим к уравнению  $\alpha \Lambda_A^+ = \beta \Lambda_A^-$ . Решение задачи описано в утверждении 2.



Рассмотрим случай непуассоновских потоков событий. При выборе критической зоны (19) (точки, попавшие в нее, идентифицируются как афтершоки) среднее число пропущенных афтершоков имеет вид

$$\Lambda_A^+ = \int \left[ \int_{r(g-g_x) > k(t)} \Lambda_A p(g) dg \right] f(t) dt = \Lambda_A \int_0^\infty \left[ \int_{k(t)} p(r) r dr \right] f(t) dt .$$

Среднее число ложных афтершоков при равномерной плотности эпицентров фона есть

$$\Lambda_A^- = \lambda |S_1| \int_0^\infty k^2(t) dt .$$

В игровом и минимаксном случаях (10), (11) остается решить относительно  $k(t)$  вариационные задачи:  $\alpha \Lambda_A^+ + \beta \Lambda_A^- = \min_{k(t)}$  или  $\Lambda_A^- = \min_{k(t)}$  при условии  $\alpha \Lambda_A^+ = \beta \Lambda_A^-$ . Нетрудно проверить, что решение этих задач совпадает с правилом (12).

#### 4. Практические аспекты метода

Изложенный выше подход к идентификации афтершоков основан на локальном моделировании интенсивностей фона и афтершоков и их отношении. Для краткости назовем его методом локального отношения интенсивностей (ЛОИ). Для практического применения метода надо знать в окрестности основного толчка интенсивность фона  $\lambda_\Phi$  и параметры его афтершоковой последовательности:  $\Lambda_A$  - среднее число афтершоков; центр  $g_x$  и матрицу рассеяния афтершоков  $B$ ; параметр закона Омори  $p$ . С подобными трудностями столкнулся метод Прозорова и здесь естественно использовать уже накопленный опыт. Он сводится к тому, что все необходимые параметры уточняются итеративно.

Для определения основных толчков используется магнитудная упорядоченность событий: сильнейшее событие в каталоге на любом этапе анализа объявляется основным. После удаления его с афтершоками и форшоками определяется следующий основной толчок. Фоновая интенсивность определяется по всему каталогу, а в дальнейшем уточняется по каталогу основных толчков путем осреднения по времени и пространственным ячейкам, зависящим от региона.

На первом шаге итерации выделяются предварительные афтершоки любым способом, например с помощью умеренных окон. Возможно использование и самого ЛОИ-метода с априорными параметрами: круговое рассеяние ( $B = D(M) I$ , где  $I$  - единичная матрица) вокруг основного толчка  $g_x = g_0$  с табличным средним числом афтершоков

$$\Lambda_A = \Lambda(M_0) \alpha 10^{(M_0 - M_{min})b} - 1$$

(см. (4)), где "b" - параметр наклона в законе повторяемости, а  $M_{min}$  - нижний порог представительных магнитуд. Параметр закона Омори естественно считать фиксированным  $p = p_0$  (например,  $p_0 = 1,5$ ) до тех пор пока не выделится достаточное количество афтершоков для его оценивания.

Предварительные афтершоки должны быть значимыми. (По отношению к пуассоновской гипотезе процедура проверки значимости стандартная: в используемом виде описана в [5].)

Если число выделенных событий не мало,  $n_A \geq 10$ , то оцениваются параметры рассеяния афтершоков  $\sigma_*$  и  $B$ , а  $\Lambda$  полагается  $\Lambda = n_A$ . Процедура идентификации (16) повторяется после каждого уточнения параметров метода. Для сильных землетрясений с  $M > 7,5$  процедура сходилась за 5-7 шагов, для меньших магнитуд достаточно было трех итераций. Речь идет о минимаксном принципе с равными ценами ошибок, т.е. о компенсационном принципе.

Главная опасность первого шага - ошибка в определении центра рассеяния афтершоков. Реально критическая зона афтершоков (16) урезалась. Пространственное окно совпадало с зоной рассеяния афтершоков уровня  $\alpha = 0,001$ . Эта мера естественна и направлена на изоляцию предполагаемых афтершоков от других кластеров.

Форшоки выделялись после того, как у основного толчка находилась афтершоковая зона (см. [5]). Отсутствие симметрии в процедуре выделения форшоков связано с их малочисленностью.

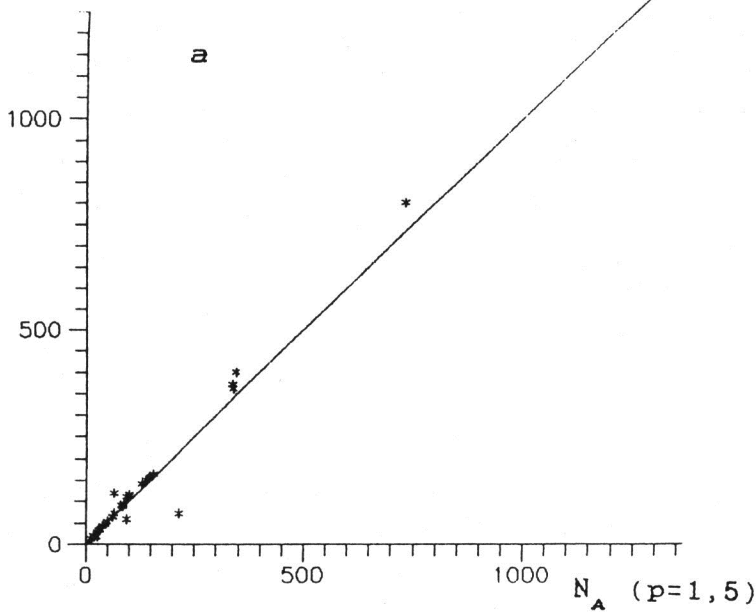
## 5. Предварительный анализ

Минимаксный принцип выделения афтершоков был опробован на мировом каталоге NOAA за 1964-1980 гг. для событий с параметрами  $M \geq 4$ ,  $h < 100$  км. Афтершоки выделены для основных событий с  $M \geq 6$ . Результаты предварительного анализа "минимаксных" афтершоков представлены рисунками 2-7. Приведем некоторые выводы, вытекающие из представленной графики:

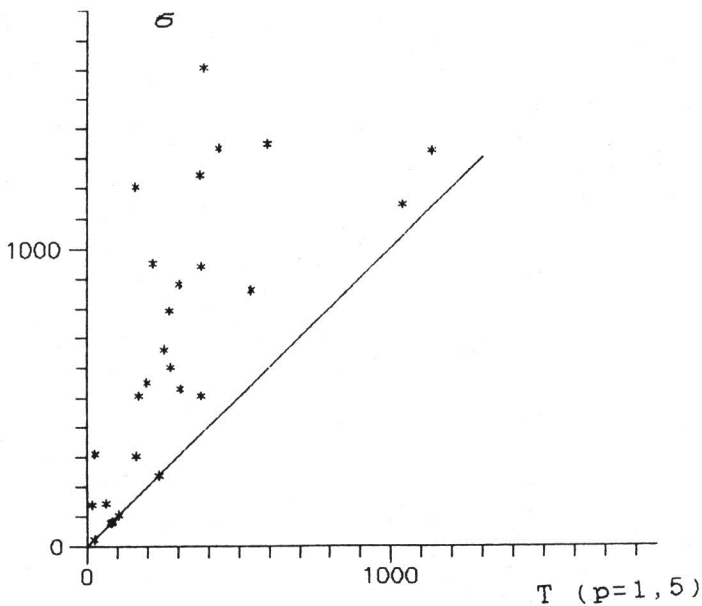
1. Изменение параметра закона Омори с 1,5 на 1,1 естественно приводит к росту статистики выделенных афтершоков. Согласно рис. 2, а рост невелик, однако он сопровождается присоединением событий, значительно поздних по времени (рис. 2, б).

2. Пространственные структуры афтершоков, выделенных минимаксным и ручным способами хорошо согласуются между собой. На рис. 3 такое сопоставление дано для Южно-Курильских землетрясений. Эмпирическим зонам афтершоков [25] соответствуют эллиптические зоны рассеяния 90 - 95% уровня. Интересен в этом отношении пример афтер-

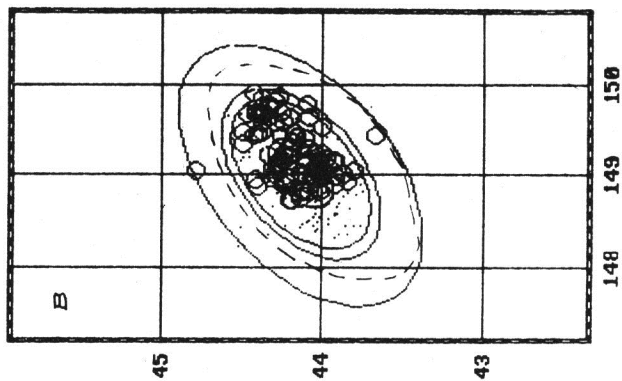
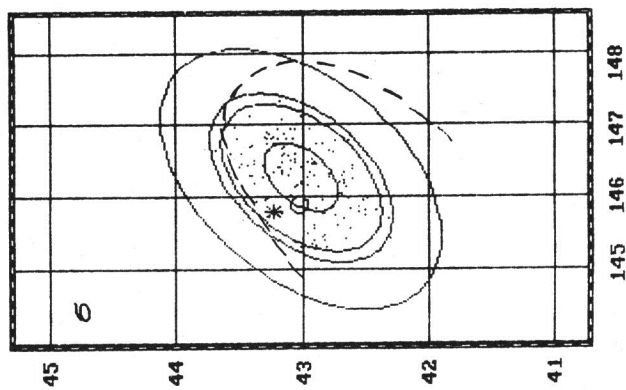
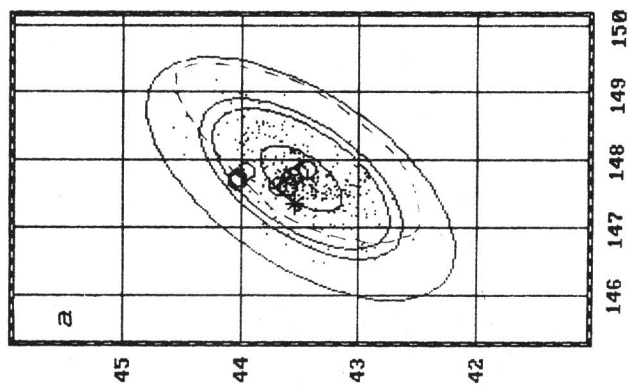
$N_A (p=1,1)$



$T (p=1,1)$



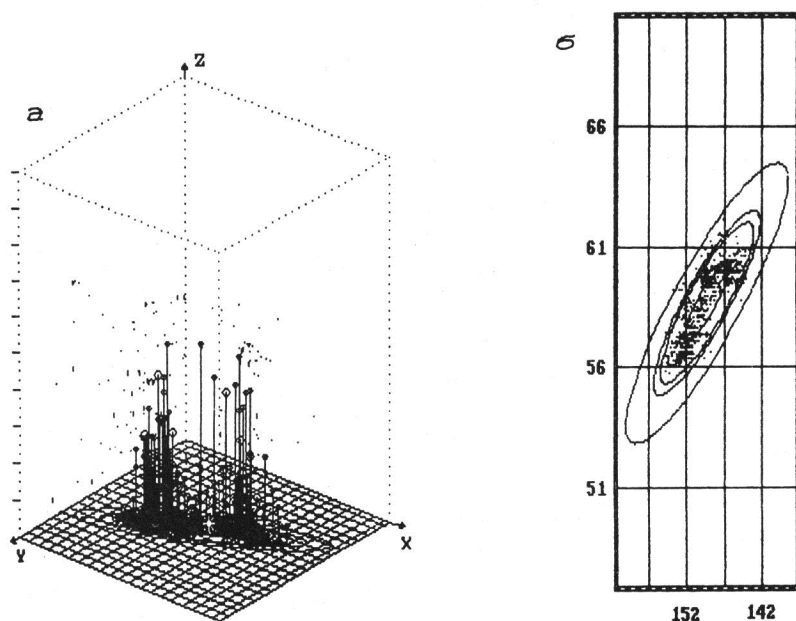
Р и с. 2. Число (а) и продолжительность в днях (б) афтершоков в зависимости от параметра  $p = 1,1$  и  $1,5$  в законе Омори



Р и с. 3. Афтершоковые зоны для Южно-Курильских землетрясений

а - Шикотанское землетрясение 11.8.69г.,  $M = 7,9$ ; б - землетрясение 17.6.73г.,  $M = 7,7$  (по NOAA); в - Итурупский рой 1978г. Обозначения: звездочка - основной толчок; кружок - форшок за 10 дней до основного события; пунктир - афтершоковая зона, выделенная вручную в [25], сплошная линия - эллипсы рассеяния размера  $k = 1, 2, 3, 4$

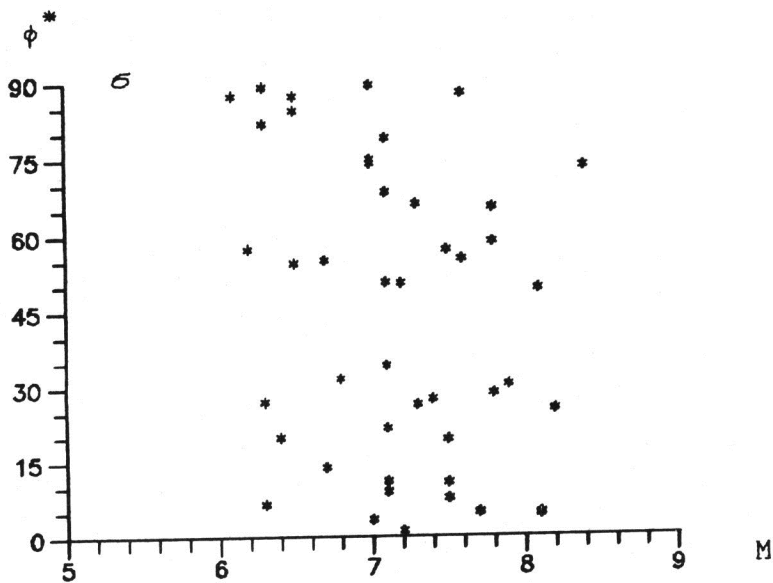
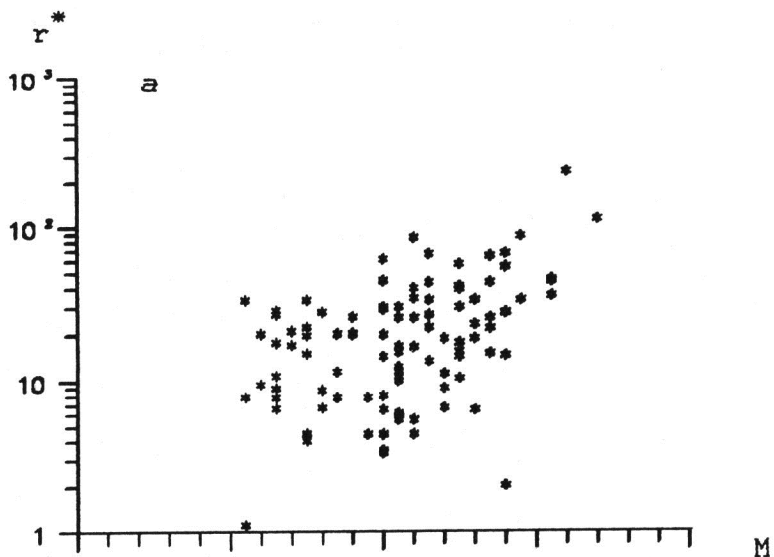
шоков катастрофического Аляскинского землетрясения 1964 г.  $M=8,4$  (рис. 4). Кластерный метод SLC [12] разбивает все явление на серию самостоятельных групп событий даже при сильных вариациях подгоночных параметров ( $c, d_0$ ) (см. выше). В то же время минимаксный метод автоматически выделил явление целиком. Всего в афтершоковую последовательность вошло 801 событие с  $M \geq 4$  (по каталогу NOAA), последнее идентифицированное событие имеет временную задержку  $\Delta t = 942$  дня, 95% эллипс рассеяния афтершоков очерчивает зону площади  $Q = 137$  тыс. км<sup>2</sup> или  $\lg Q = 5,14$ . Аналогичная эмпирическая оценка  $\lg Q = 5,15$  дана в работе Канамори [26]. Эти примеры иллюстрируют гибкость и способность к адаптации ЛОИ-метода к пространственным особенностям сейсмического режима и силе главного события.



Р и с. 4. Афтершоки Аляскинского землетрясения 1964 г..  $M = 8.4$  (согласно минимаксному принципу с  $p = 1,1$ )

а - пространственно-временное изображение (афтершокам отвечают временные отрезки, фону - точки), клетка на плоскости  $XY$  соответствует  $1^\circ \times 1^\circ$ , шаг по времени (интервал между рисками)  $\Delta t=180$  дней; б - эпицентры афтершоков

3. Как отмечалось выше, эпицентр основного события смещен относительно центра рассеяния афтершоков, смещение растет с ростом магнитуды и сопоставимо с линейным размером очага (рис. 5, а). Однако направление смещения относительно большей оси афтершоковой зоны совершенно случайно для всего диапазона магнитуд  $M \geq 6$ . Об этом позволяет судить рис. 5. б. где специально отобраны афтершоко-



Р и с. 5. Смещение эпицентра основного толчка относительно центра рассеяния афтершоков

а - зависимость расстояния  $r^*$  от магнитуды; б - зависимость азимута  $\phi^*$  от магнитуды. отобраны зоны с отношением осей не меньше двух, построенные по выборкам с числом афтершоков  $N_A \geq 20$

вые зоны, построенные по статистике объема  $N_A \geq 20$  с отношением осей не меньше 2.

4. Число афтершоков  $N_A(M)$  и площадь афтершоковой зоны  $Q_A(M)$  экспоненциально растут с магнитудой (рис.6). С разных точек зрения интересен вопрос о соотношении магнитудных показателей роста  $\beta_N$  и  $\beta_Q$  для указанных величин. Например, зависит ли от магнитуды число афтершоков (с  $M > M_{min}$ ), нормированное на единицу площади афтершоковой зоны. Для определенности мы рассмотрели афтершоковые зоны уровня 95% (рис. 6,б, 7,а, 7,б). Выбор уровня не должен влиять на зависимость от магнитуды. При очень большом разбросе  $lg(N_A/Q_A)$  рис.7,б указывает на небольшой отрицательный тренд этих величин по магнитуде: оценка  $\hat{\beta}_Q - \hat{\beta}_N = 0,19$ . Она получена с учетом разброса в магнитуде,  $\sigma_M = 0,2$ ; пуассоновости  $N_A$  и зависимости оценки площади  $Q_A$  от числа точек, по которым она построена (см. приложение 2). Разброс данных  $lg(N_A/Q_A)$  требует специального анализа магнитуд и региональных особенностей. Пока можно сказать, что наши данные с  $M = 6+7$  и  $M > 7$  хорошо рассеяны по миру, что исключает влияние на тренд (рис. 7,б) отдельной области.

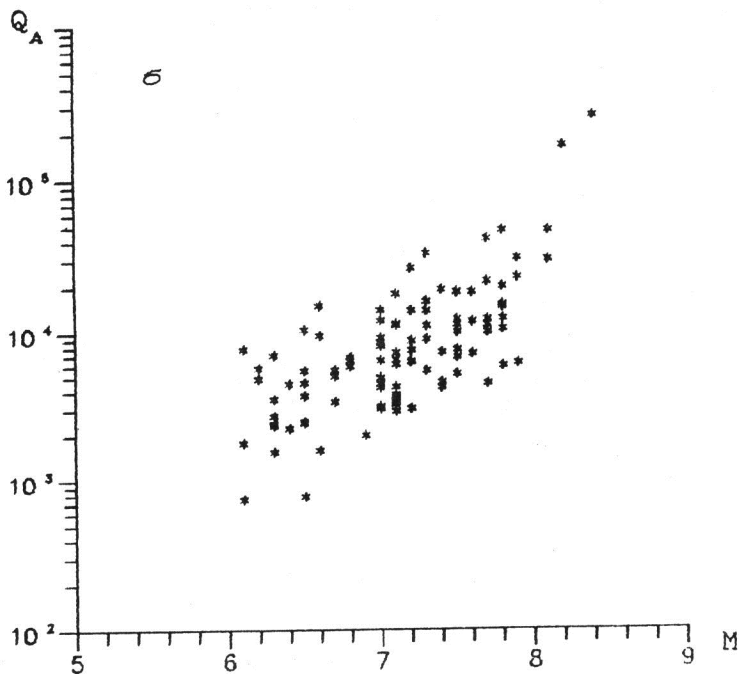
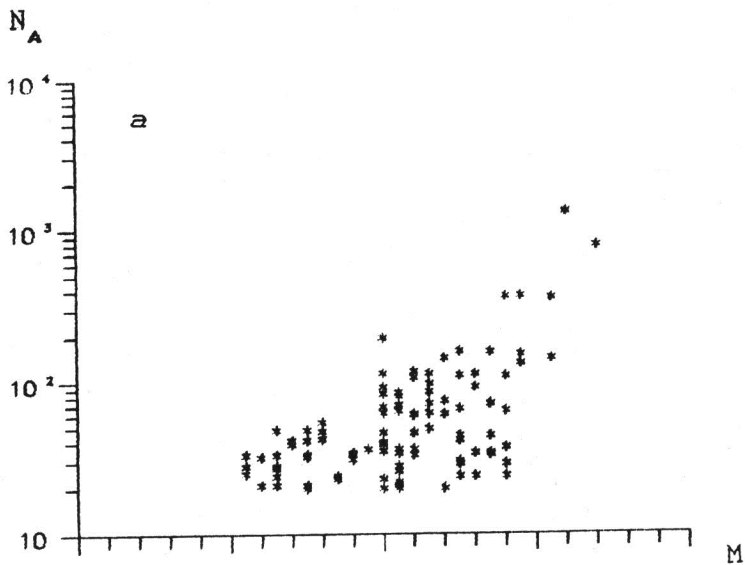
Гипотеза  $\beta_Q \cong \beta_N$  может выражать важное свойство подобия сейсмического процесса и поэтому заслуживает дальнейшей проверки.

### Заключение

Понятие афтершоков, особенно поздних, размыто и часто подчинено задаче, в которой они возникают. Поэтому трудно говорить о сравнении методов выделения афтершоков, пока не фиксированы соответствующие цели и понятия. При решении проблемы селекции афтершоков, приоритеты в данной работе отданы опыту ручной обработки данных, известным фактам типа закона Омори и пространственного рассеяния афтершоков.

Цель выделения афтершоков сформулирована как задача минимизации штрафной функции  $\gamma$ , отвечающей за недобор афтершоков и перебор фоновых (ложных) событий. Целевой подход дает целый спектр оптимальных методов выделения афтершоков в зависимости от выбора модели пространственно-временного группирования афтершоков и функции  $\gamma$ .

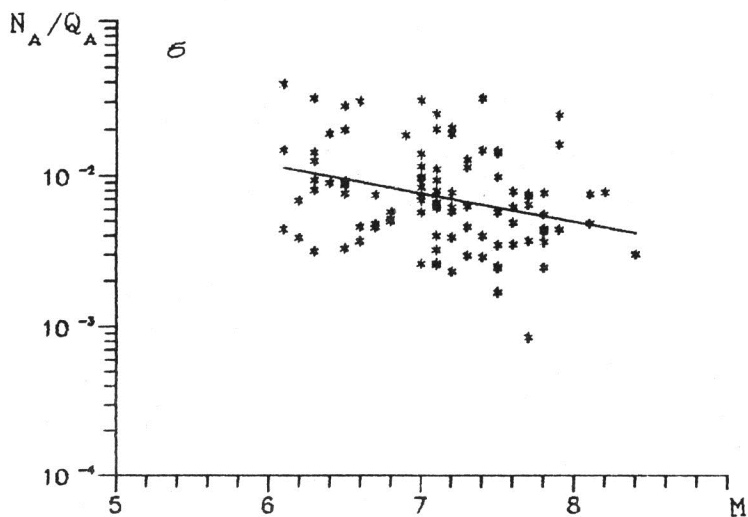
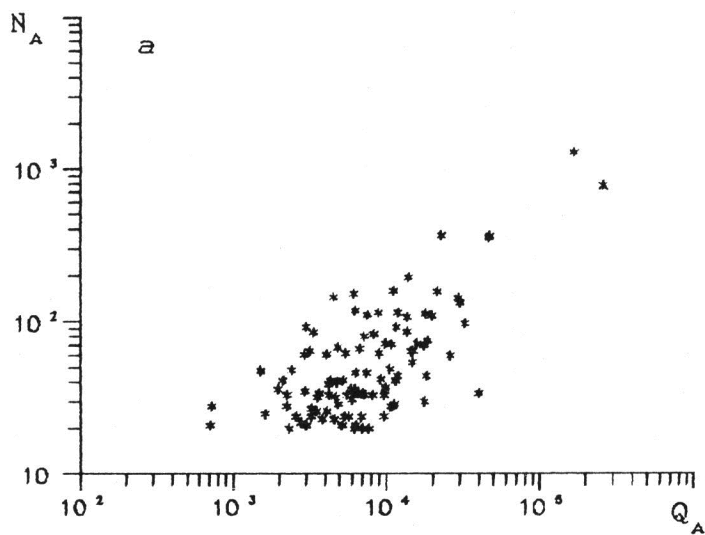
Предложенные методы алгоритмически просты и экономичны, они автоматически адаптируются к локальным стационарным особенностям регистрации и сейсмической активности района. Развитая методика наиболее эффективна для выделения больших афтершоковых последовательностей, локализованных в пространстве-времени: в этих ситуациях ее естественно дополнять параллельным выделением форшоков (см., например, [5]).



Р и с. 6. Характеристики афтершоков

Число афтершоков  $N_A$  ( $\geq 20$ ) (а) и площадь афтершоковой зоны  $Q_A$  (эллипс 95% уровня) (б), как функции магнитуды





Р и с. 7. Связь числа афтершоков  $N_A$  ( $\geq 20$ ) с размером афтершоковой зоны  $Q_A$

а - диаграмма  $(N_A, Q_A)$ ; б - зависимость  $N_A/Q_A$  от магнитуды

Афтершоки с большим отношением "сигнал/шум" свойственны сильным основным событиям. Поэтому предложенная методика, как и все другие, имеет свои границы применимости по магнитуде основных событий. К сожалению, это обстоятельство почти не обсуждается авторами аналогичных методик. В результате интуитивное понятие афтершоков как событий, завершающих акт разрушения, смешивается с явлениями другого типа. Например, это могут быть короткие цепочки событий (вместо кластеров), отвечающих локальному взаимодействию трещин на разных стадиях подготовки землетрясения. Феноменологически это явления разные, самостоятельно интересные и, видимо, требуют разных подходов для своего изучения.

В заключение отметим неожиданные параллели в двух совершенно разных задачах: выделение афтершоков и прогноз землетрясений [24]. В обоих случаях состояние дела таково, что предлагаемые методы решения задач как правило не сопоставимы; эта трудность одинаково преодолевается на пути целевого подхода к проблемам; способ решения задач оказывается тоже общим и достигается средствами теории проверки статистических гипотез.

## П Р И Л О Ж Е Н И Е

### 1. Доказательство утверждения 1

*Случай  $\alpha = 0$ . Формула (6).*

Пусть  $t_0, t_1, t_2, \dots$  - моменты пуассоновского процесса с интенсивностью  $\lambda = \lambda_\Phi + \lambda_A$ . Согласно (5) число  $\nu$  выделенных группированных событий после  $t_0 = 0$  равно  $n$ , если

$$\lambda t_1 < c_1, \lambda t_2 < c_2, \dots, \lambda t_n < c_n, \lambda t_{n+1} > c_{n+1},$$

где

$$c_n = \lambda n / \lambda_\Phi R = \mu n$$

и  $P(\nu \geq n) = F_n = \Pr\{\lambda t_1 < c_1, \dots, \lambda t_n < c_n\}$ .

Пусть пока  $c_i$  произвольны,  $c_i < c_{i+1}$ . Тогда

$$F_n = \int_{A_n} \lambda^n \exp(-\lambda \sum_1^n x_i) d^n x, \quad (\text{П1})$$

где  $A_n = \{x_i > 0: x_1 < c_1/\lambda, \dots, x_1 + \dots + x_n < c_n/\lambda\}$ .

Интегрируя по  $x_n$  имеем

$$F_n = F_{n-1} - \exp(-\lambda c_n) \lambda^{n-1} J_{n-1}, \quad (\text{П2})$$

$$J_n = \int_{A_n} d^n x. \quad (\text{П3})$$

Из (П2)

$$p_{n-1} = F_{n-1} - F_n = \exp(-\lambda c_n) \lambda^{n-1} J_{n-1}, \quad (\text{П4})$$

откуда

$$F_n = 1 - \exp(-\lambda c_1) J_0 - \dots - \exp(-\lambda c_n) J_{n-1} \lambda^{n-1}.$$

Из (П1)

$$\lim F_n / \lambda^n = J_n, \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (\text{П5})$$

Поэтому из (П5) для всех  $1 \leq p \leq n$

$$J_p - \frac{(c_p)^1}{1!} J_{p-1} + \frac{(c_{p-1})^2}{2!} J_{p-2} - \dots - (-1)^p \frac{(c_1)^p}{p!} J_0 = 0, \quad (\text{П6})$$

где  $J_0 = 1$ .

Пусть теперь  $c_n = \mu n$  и  $J_n = \dot{J}_n$  если  $\mu = \lambda$ . Из (П3) видно, что

$$J_n = (\mu / \lambda)^n \dot{J}_n.$$

Проверим, что  $\dot{J}_n = (p+1)^p / (p+1)!$

Подставляем  $\dot{J}_n$  в (П6). После умножения на  $(p+1)!$  имеем

$$\sum_{k=0}^{p+1} C_{p+1}^k (p+1-k)^p (-1)^k = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=0}^p C_p^k k^{p-1} (-1)^k = 0.$$

Последняя сумма есть  $\left. \frac{d}{dx} (1-e^x)^p \right|_{x=0}$ . Она равна нулю, так как  $(1-e^x)^p = O(x^p)$ ,  $x \rightarrow 0$ .

Вероятность  $p^* = P(\nu = \infty)$ :

Из теории случайных блужданий [23] следует, что  $p^* = 0$ , если  $\mu < 1$ . Действительно,

$$p^* = p(\max_n (\tau_1 + \dots + \tau_n) < 0),$$

где  $\tau_i$  независимы с плотностью распределения  $e^{-(x+\mu)}$ ,  $x \geq \mu$  и средним  $1 - \mu > 0$ . Значит,

$$\sum_{n \geq 0} p_n(\mu) = 1, \quad \mu < 1. \quad (\text{П7})$$

При  $\mu \neq 1$  элементы ряда убывают быстрее геометрической прогрессии. Поэтому (П7) верно и при  $\mu = 1$  (в силу непрерывности суммы ряда), т.е.  $p^* = 0$  при  $\mu = 1$ .

Функция  $y = \mu e^{-\mu}$  унимодальна с модой  $\mu = 1$ , т.е. уровню

у отвечают два значения  $\mu < 1$  и  $\mu^* > 1$ . В силу (П7) при  $\mu < 1$

$$\mu = \sum p_n(\mu) \mu = \sum [Y(\mu)]^{n+1} a_n = \sum [Y(\mu^*)]^{n+1} a_n = \sum p_n(\mu^*) \mu^*.$$

Значит

$$\sum p_n(\mu^*) = \mu/\mu^*, \quad \mu^* > 1. \quad (\text{П8})$$

Величины  $\mu$ ,  $\mu^*$  связаны соотношением

$$\mu e^{-\mu} = \mu^* e^{-\mu^*}.$$

Если  $p^* = p(\nu = \infty)$ , то  $1-p^* = \mu/\mu^*$  и (П8) дает

$$1 - p^* = \exp(-p^* \mu^*) \quad \text{или} \quad \mu = 1/p^* \ln \frac{1}{1-p^*}.$$

*Кумулянтная функция*  $\nu$ :

$$\psi(\theta) = \ln E e^{-\theta \nu} = \sum_{k \geq 1} \frac{(-\theta)^k}{k!} \kappa_k, \quad \kappa_k - \text{кумулянты } \nu.$$

Пусть  $\mu < 1$ . Из (П7) имеем

$$e^\mu = \sum (\mu e^{-(\mu+\theta)})^n a_n, \quad a_n = (n+1)^n / (n+1)!$$

и 
$$e^{\psi(\theta)+\rho} = \sum (\mu e^{-(\mu+\theta)})^n a_n = e^{\tilde{\mu}(\theta)},$$

если

$$\mu e^{-(\mu+\theta)} = \tilde{\mu} e^{-\tilde{\mu}}, \quad \tilde{\mu} < 1.$$

Итак

$$\begin{aligned} \psi(\theta) &= \tilde{\mu} - \mu, \\ \ln \tilde{\mu}/\mu &= \tilde{\mu} - \mu - \theta, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\ln \left( \frac{\psi(\theta)}{\mu} + 1 \right) = \psi(\theta) - \theta,$$

$$\text{или} \quad \frac{1}{\mu} \psi(\theta) + 1 = E e^{-\theta(\nu+1)}. \quad (\text{П9})$$

Это соотношение является основой для получения кумулянтов  $\nu$ :

$$\mu^{-1} \kappa_k = E(\nu+1)^k.$$

С другой стороны, (П9) эквивалентно равенству для  $\varphi(\theta) = E e^{-\theta \nu}$ :

$$\varphi(\theta) = \exp\{\mu(\varphi(\theta) e^{-\theta} - 1)\} = \sum \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} [E e^{-\theta(\nu+1)}]^n, \quad (\text{П10})$$

т.е.  $\nu$  имеет такое же распределение как и размер пуассоновской популяции с параметром  $\mu$ . Действительно, размер популяции

$$\nu = \nu_1 + \dots + \nu_\pi + \mu,$$

где  $\pi$  - число потомков в первом поколении, а  $\nu_i$  - размеры популяций для каждой ветви первого поколения. Это обстоятельство и выражает (П10). Связь (6) с ветвящейся моделью Гальтона-Ватсона установлена.

*Случай*  $\alpha = 1/2$ . Здесь вероятности  $p_n$  вычисляются прямым и довольно утомительным счетом. Случай  $n=0$  очевиден:

$$p_0 = P(\tau_1 > \mu) = e^{-\mu}, \text{ где } \tau_i = \lambda(t_i - t_{i-1}).$$

Для  $n=1$  имеем

$$\begin{aligned} p_1 &= P(\lambda t_1 < \mu, \lambda t_2/2 < t_1, \lambda t_2/2 > 2\mu) + \\ &+ P(\lambda t_1 < \mu, t_1 < t_2/2, \lambda t_2 > \mu) = \\ &= P(\tau_1 < \mu, \tau_1 + \tau_2 > 2\mu) = \mu e^{-2\mu}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$p_2 = P(\Omega_2 \cdot (A_1 \cup A_2 \cup A_3)),$$

где

$$\Omega_2 = \{\tau_1 < \mu, \tau_1 + \tau_2 < 2\mu\},$$

$$A_1 = \{t_3/2 < t_1, \lambda t_3/2 > 3\mu\},$$

$$A_2 = \{t_1 < t_3/2 < t_2, \lambda t_3/2 > 2\mu\},$$

$$A_3 = \{t_3/2 > t_2, \lambda t_3/2 > \mu\}$$

или

$$p_2 = P(\tau_1 + \tau_2 < \rho, \tau_3 > 2\rho - (\tau_1 + \tau_2)) + P(\tau_1 < \rho, \rho < \lambda t_2 < 2\rho, \tau_3 > \lambda t_2).$$

Дальнейшие выкладки используют независимость  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  и легко проводятся с использованием условных вероятностей.

## 2. Ортогональная регрессия с неоднородными ошибками

Все рассмотренные типы регрессий, представленных на рис. 6, а, 6, б, 7, б укладываются в следующую модель данных:

$$y_i = a + b x_i + \sigma_a s_i^{(1)} + \sigma_i s_i^{(2)},$$

$$z_i = x_i + \sigma_x \varepsilon_i^{(3)},$$

где  $(y_i, z_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$  - наблюдения,  $(\varepsilon_i^{(1)}, \varepsilon_i^{(2)}, \varepsilon_i^{(3)})$  - некоррелированные ошибки со средним  $(0, 0, 0)$  и единичной матрицей ковариации. Величина  $\sigma_a$  отвечает за разброс  $a$  по регионам,  $\sigma_i$  связаны с точностью оценивания  $y_i$  и предполагаются известными,  $\sigma_x$  - точность измерения  $x_i$  и тоже известна. Подлежат оценке параметры задачи  $(a, b, \sigma_a^2)$  при мешающих параметрах  $\{x_i\}$ . В условиях гауссовости  $(\varepsilon_i^1, \varepsilon_i^2, \varepsilon_i^3)$  метод максимального правдоподобия ведет к следующей процедуре. Оценки параметров  $(b, \sigma_a^2)$  находятся из условия минимума функционала:

$$\chi^2 = 1/N \sum_{i=1}^n \left[ \frac{(y_i - \hat{a} - b z_i)^2}{\sigma_i^2 + \sigma_a^2 + b^2 \sigma_x^2} + \ln(\sigma_i^2 + \sigma_a^2) \right] + \ln \sigma_x^2,$$

где  $\hat{a} = \sum_1^n p_i y_i - b \sum_1^n z_i p_i$  есть функция  $b$  и  $\sigma_a^2$

$$p_i = (\sigma_i^2 + \sigma_a^2 + b^2 \sigma_x^2)^{-1} / \sum (\sigma_i^2 + \sigma_a^2 + b^2 \sigma_x^2)^{-1}.$$

Величина  $\hat{a}$  при оптимальных значениях  $(b, \sigma_a^2)$  определяет оценку  $a$ .

В регрессии  $\lg Q$  не магнитуду (рис. 6,б),  $y_i = \lg Q_i$ ,  $z_i = M_i$ , ошибка в магнитуде  $\sigma_x = 0,2$ . Если площадь афтершоков  $Q_i$  строилась по  $n$  точкам, то согласно [5] дисперсия  $\lg Q_i$  есть

$$\sigma_i^2 = \frac{(\lg e)^2 \cdot n}{(n-1)^2},$$

а смещение  $-\lg e / (n-1)$ . Отметим еще связь афтершоковой зоны размера 1 с зоной доверительного уровня  $1-\varepsilon$ :

$$\lg Q^{(1-\varepsilon)} = \lg Q_1 + \lg \left[ (\varepsilon^{-2/(n-1)} - 1) \frac{(n-1)^2}{n-2} \right].$$

При  $\varepsilon = 5\%$  второе слагаемое приблизительно равно  $0,7775 + 1,8(n-1)^{-1}$ . В регрессии числа афтершоков на магнитуду,  $y_i = \lg N_i$ ,  $z_i = M_i$ ,  $\sigma_x = 0,2$  и  $\sigma_i^2 = (\lg e)^2 / N_i$ .

Наконец, если  $g_i = \lg(Q_i / N_i)$ ,  $z_i = M_i$ , то  $\sigma_x = 0,2$ , а  $\sigma_i^2 \cong 2 (\lg e)^2 / N_i$ .

В [5] авторами не учитывался региональный разброс параметра  $a$ , ( $\sigma_a=0$ ), поэтому найденная там усредненная регрессия  $(\lg Q_i, M)$  справедливо была названа формальной. Исправленный вариант по данным рис. 6,б приведен на рис.1. К усредненному по регионам вариан-

ту линейной зависимости  $\lg Q^{(1-8)} [\text{км}^2] = -1,05 + 0,69 M$  с  $\varepsilon = 5\%$   
тоже надо относиться с осторожностью.

### Литература

1. Gardner J., Knopoff L. Is the sequence of earthquakes in S. California with aftershocks removed Poissonian? Yes // Bull. Seismol. Soc. Amer. 1974. Vol.64, N5. P.1363-1367.
2. Keilis-Borok V.I., Knopoff L., Rotwain I.M. Bursts of aftershocks long term precursors of strong earthquakes // Nature 1980. Vol.283. P.259-263.
3. Knopoff L., Kagan Y., Knopoff R. b-values for foreshocks and aftershocks in real and simulated earthquake sequences // Bull. Seismol. Soc. Amer. 1982. Vol.72, N5. P.1663-1675.
4. Прозоров А.Г. Динамический алгоритм выделения афтершоков для мирового каталога землетрясений // Математические методы в сейсмологии и геодинамике. М.: Наука, 1986. С.58-62. (Вычисл. сейсмология; Вып. 19).
5. Молчан Г.М., Дмитриева О.Е. О динамике повторяемости форшоков // Теория и алгоритм интерпретации геофизических данных. М.: Наука, 1989. С.3-18. (Вычисл. сейсмология; Вып.22).
6. Utsu T., Seki A. A relation between the area of aftershock region and the energy of main shock // J. Seism. Soc. Japan. 1954. Vol.7. P.233-240.
7. Кейлис-Борок В.И., Кособоков В.Г. Периоды повышенной вероятности возникновения для сильнейших землетрясений Мира // Математические методы в сейсмологии и геодинамике. М.: Наука, 1986. С.48-58. (Вычисл. сейсмология; Вып. 19).
8. Айвазян С.А., Бухштабер В.М., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности / Справ. изд. М.: Финансы и статистика. 1989. 607с.
9. Czekanowski J. Zuz differentialdiagnose der neandertalgruppe // Kor-blatt Deutch. Ges.Antrop. 1909. XL, S.44-47.
10. Davis S.D., Frolich C. Identification of aftershocks of deep earthquakes by a new ratios method // Geophys. Res. Lett. Vol. 12, N 10. P.713-716.
11. Davis S.D., Frolich C. Single-link cluster analysis, synthetic earthquake catalogs, and aftershock identification // Geophys. Journal. Inter. 1991. Vol.104. P.289-306.
12. Davis S.D., Frolich C. Single-link cluster analysis of earthquake aftershocks: decay laws and regional variations // J. Geophys. Res. 1991. Vol.97. P.490-508.
13. Savage W. Microearthquake clustering near Fairview Peak, Nevada, and in the Nevada Seismic Zone // J. Geophys. Res. 1972. Vol.77. P.7049-7056.
14. Reasenber P. Second-order moment of Central California seismicity, 1969-1982 // J. Geophys. Res. 1985. Vol.90. P.1050-1060.
15. Kanamori H., Don. L. Anderson. Theoretical basis of some empirical relations in seismology // Bull. Seismol. Soc. Amer. 1975. Vol.65, N5. P.1073-1095.

16. *Reasenberg P., Jones L.* Earthquake hazard after a mainshock in California // *Science*. 1989. Vol.243. P.1173-1176.
17. *Vere-Jones D., Davies R.* A statistical survey of earthquakes in the main seismic region of New Zeland. Part II. Time series analiesis // *New Zeland J. Geol. Geophys.* 1966. Vol.9. P.251-284.
18. *Kagan Y., Knopoff L.* Statistical search for non-random features of the seismicity of strong earthquakes // *Phys. Earth and Planet. Inter.* 1976. Vol.9. P.291-318.
19. *Kagan Y., Knopoff L.* Stochastic synthesis of earthquake catalogs // *J. Geophys. Res.* 1981. Vol.86. P.2853-2862.
20. *Дзиевонский А., Прозоров А.Г.* Автомодельное определение группирования землетрясений // *Математическое моделирование и интерпретация геофизических данных*. М.: Наука. 1984. С.10-21. (Вычисл. сейсмология: Вып. 16).
21. *Прозоров А.Г., Шрейдер С.Ю.* Статистический анализ положительного влияния нормальных землетрясений Тянь-Шаня и Памиро-Алая // *Математические методы в сейсмологии и геодинамике*. М.: Наука. 1986. С.37-47. (Вычисл. сейсмология; Вып.19).
22. *Vere-Jones D.* A branching model for crack propagation // *Pure and Applied Geophys.* 1975. Vol.114. P.711-726.
23. *Боровков А.А.* Теория вероятностей. М.: Наука. 1986. 470с.
24. *Молчан Г.М.* Оптимальные стратегии в прогнозе землетрясений // *Наст. сб.* С.3-19.
25. *Балакина Л.М.* Крупнейшие землетрясения 1952, 1958, 1969 гг. в литосфере южной половины Курильской островной дуги // *Изв. АН СССР. Физика Земли*. 1989. N 2. С.3-16.
26. *Kanamori H.* The energy release in great earthquakes // *J. Geophys. Res.* 1977. Vol.82. P.2981-2987.

УДК 550.34.013

*А.А.Любушин (мл)*

#### МОДЕЛЬ СЕЙСМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА В БЛОКОВОЙ СРЕДЕ

*А.А.Lyubushin (jr)*

#### THE MODEL OF SEISMICITY IN A BLOCK MEDIUM

The model of a shallow focus seismicity is suggested which is based on a view on the Earth crust as a hierarchical structure of blocks. Qualitatively the seismicity is represented as a result of dynamical balance between two processes oppositely directed in the hierarchy of block structure: the consolidation of small blocks into the big ones and the destruction (deconsolidation) of big blocks resulted from aftershocks. The model is represented by the system of simple dynamical equations with random parameters. The results of numerical experiments are presented.