УДК 550.348

В.М.Герцик

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ СЕЙСМОГЕННОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

V.M.Gertzik

DYNAMIC EQUATIONS FOR SEISMOGENIC SOLID MEDIUM

The dynamic equations for solid media under deformation are derived for the mean field stress model on the base of statistical mechanics of cracks. "Earthquakes" are expected to be a fast moving of boundaries of narrow (similar to cracks) areas of the higth crack density phase.

В настоящей работе построена система уравнений, описывающих динамику сплошной среды, в которой могут появляться и залечиваться микротрещины. Использование среднего поля напряжений в модифицированной модели статистической механики трещин, полученной в работе [1], позволяет получить детерминированные уравнения динамики в термодинамическом пределе, т.е. для однородного тела, содержащего бесконечное число элементарных ячеек, способных содержать трещину. Предполагая далее, что такое тело можно считать дифференциальным элементом среды, с помощью законов сохранения выводятся уравнения гидродинамического типа.

Благодаря тому, что вклад трещины в деформацию тела запоминается после ее залечивания, реология среды представляет собой нелинейную вязкоупругость. По сравнению с уравнениями для обычных вязкоупругих сред система содержит кинетические уравнения для полей плотностей трещин.

Название "сейсмогенные", данное нами средам такого типа, связано со следующими фактами. Численные исследования уравнений динамики материальной точки при постоянной скорости деформирования показали, что при достаточно низких температурах имеется диапазон скоростей деформирования, в котором устойчивый динамический режим системы является периодическим, с медленными возрастаниями и резкими сбросами упругой энергии. Эти сбросы представляют собой "землетрясения" на микроуровне и являются, по существу, фазовыми переходами с плотностью трещин в качестве параметра порядка. Естественно предположить, что в сплошной среде такие явления должны порождать макроземлетрясения, хотя это, разумеется, необходимо подтвердить в ходе дальнейшего изучения полученных уравнений.

Некоторые свойства среды можно попытаться предсказать еще до исследования ее динамики. Пусть при достаточно низкой температуре имеется малая область с высокой плотностью трещин ("фаза разрушения"), окруженная областью с низкой плотностью трещин ("фаза консолидации"). В области фазы разрушения некоторые компоненты тензора модулей упругости оказываются сниженными ("мягкое включение"), что вызывает анизотропное искажение поля напряжений вокруг нее. В некоторых направлениях поле напряжений убывает, а в других - возрастает. Возрастание поля напряжений создает условия фазового перехода, а убывание блокирует его возможность. В результате область фазы разрушения будет распространяться в узкой (локализованной) зоне подобно трещине, пока концентрация напряжений на ее "концах" не упадет. Далее наличие такой "квазитрещины" создаст в ее окрестности падение поля напряжений, что блокирует возникновение других "квазитрещин" вблизи от нее и может привести к появлению регулярных систем "квазитрещин" (диссипативных структур). Кроме того, кажется естественным (хотя и не очевидным) существование хаотических режимов "турбулентного" типа в таких средах, вследствие их нелинейности.

Изменения, внесенные в модель работы [1], касаются выражений для интенсивностей рождения и уничтожения трещин. В работе [1] в выражения для интенсивностей входили экспоненты с показателем, имеющим порядок энергии трещины, деленной на kT, где k - постоянная Больцмана, T - температура. Поскольку микротрещины в реальных средах являются макроскопическими по отношению к межатомным расстояниям, абсолютные величины этих показателей очень велики, что приводит к практическому вырождению интенсивностей в 0 или ∞, в зависимости от знака показателя. Введение в настоящей работе понятия зародышевых микродефектов с размерами порядка межатомных расстояний устраняет эту несообразность.

Возникновение трещин

Пусть на поверхности тела кубической формы с ребрами, параллельными координатным осям x_1, x_2, x_3, задано однородное, зависящее, вообще говоря, от времени t, граничное поле напряжений $\sigma \equiv \sigma_{ij}(t)$, $i,j = 1,2,3$.

Условно разбивая тело на N одинаковых кубических ячеек объема w, предположим, что в каждой ячейке имеются зародышевые микродефекты нескольких типов, каждый из которых способен под влиянием тепловых флуктуаций терять устойчивость и превращаться в трещину соответствующего типа, целиком расположенную внутри ячейки. (Трещины разных типов могут различаться формой, размерами и ориентацией.) Если в ячейке трещина уже есть, будем считать, что вызванное ею падение напряжений блокирует возможность появления в той же ячейке других трещин. Пусть n_k, $k = 1,\dots,K$, - число ячеек, занятых трещинами типа k, $p_k^N = n_k/N$. В теории среднего поля локальные значения тензора напряжений зависят от конфигурации трещин только через величины p_k^N (вкладом микродефектов можно пренебречь, ввиду их малости). Поэтому дополнительная упругая энергия $E_{k,N}^{md}$, вносимая микродефектом типа k, есть функция σ и p_k^N.

$$E_{k,N}^{md} \equiv E_{k,N}^{md}(\sigma, p_1^N, \dots, p_K^N).$$

Следуя обычным соображениям активационной теории, определим интенсивность $p_{k,N}^{+}$ появления трещин типа k формулой

$$p_{k,N}^{+} = q \exp\left\{-\frac{H_k - E_{k,N}^{md}}{k_B T}\right\}, \tag{1}$$

где q - числовая константа; H_k - энергия активации, т.е. величина термофлуктуационной упругой энергии микродефекта, при достижении которой он теряет устойчивость и превращается в трещину, k_B - постоянная Больцмана, T - температура. Условная вероятность $p_N(p_k^N, t; p_k^N + 1/N, t+dt | p_1^N,\dots,p_K^N)$ того, что за время dt число n_k трещин типа k увеличится на 1 (p_k увеличится на $1/N$), при условии, что плотности трещин в момент t равны $p_1^N,\dots,p_K^N$, определяется выражением

$$p_N(p_k^N, t; p_k^N+1/N, t+dt | p_1^N,\dots,p_K^N) = (1 - \sum_{m=1}^{K} p_m^N) p_{k,N}^{+}\, dt, \tag{2}$$

где множитель справа в скобках есть относительное число ячеек без трещин.

Из соображений, связанных с критерием устойчивости трещины, предложенным Гриффитсом, можно оценить величину активационной энергии H_k. Упругая энергия микродефекта имеет порядок $a_k r_k^3 e_k^{(N)}$, где r_k - радиус описанной вокруг него сферы; $e_k^{(N)}$ - плотность упругой энергии; a_k - коэффициент, характеризующий форму. Энергия освобожденных межмолекулярных связей на "поверхности" микродефекта имеет порядок $b_k r_k^2 \gamma$, где γ - эффективная плотность поверхностной энергии; b_k - коэффициент. Свободная энергия Гиббса для микродефекта равна $b_k r_k^2 \gamma - a_k r_k^3 e_k^{(N)}$ и имеет максимум при $r_k = 2b_k\gamma/3a_k e_k^{(N)}$. Таким образом, при $e_k^{(N)} \geq e_k^{cr}$, $e_k^{cr} = 2b_k\gamma/3a_k r_k$, микродефект неустойчив, отсюда $H_k = a_k r_k^3 e_k^{cr} = 2/3\ b_k r_k^2 \gamma$, т.е. активационная энергия равна 2/3 поверхностной.

Залечивание трещин

По сравнению с межмолекулярными расстояниями рассматриваемые здесь трещины являются макроскопическими объектами, поэтому предположение о том, что трещина может исчезнуть мгновенно в результате большой флуктуации, по существу использовавшееся в [1], не пригодно. Можно рассматривать трещину как возмущение равновесного поля дислокаций и решать соответствующее уравнение диффузии. На этом пути, однако, имеются две трудности. Во-первых, неизвестно, как правильно задать начальные условия, а во-вторых, решения уравнения диффузии как правило выражаются достаточно громоздкими формулами, что может сделать развиваемую теорию практически необозримой. Мы предпочли использовать здесь упрощенные представления следующего типа.

Пусть $W_k^N(t)$ - сумма поверхностной и упругой энергий, вносимых трещиной типа k, меняющаяся со временем в процессе залечивания. Положим

$$\frac{d}{dt} W_k^N(t) = F(W_k^N(t))$$

и ограничимся первым членом разложения функции F по степеням $W_k^N(t)$ в окрестности нуля:

$$\frac{d}{dt} W_k^N(t) = -DW_k^N(t).$$

Член нулевого порядка равен нулю, так как $W_k^N(t)=0$ эквивалентно отсутствию трещины. При неизменных внешних по отношению к трещине условиях решение последнего уравнения имеет вид

$$W_k^N(t) = \overline{W}_k^N \exp\{-Dt\},$$

где $\overline{W}_k^N$ - энергия трещины в момент ее появления. Будем считать, что залечивание прекращается, когда $W_k^N(t)$ достигает значения $W_{k,N}^{md}$, равного энергии микродефекта. Тогда время τ_k залечивания трещины равно

$$\tau_k = D^{-1}\ln\left\{\frac{\overline{W}_k^N}{W_{k,N}^{md}}\right\}.$$

Коэффициент D по физическому смыслу аналогичен коэффициенту диффузии, поэтому можно считать, что его зависимость от температуры подобна зависимости для коэффициента диффузии:

$$D=D_0\exp\left\{-\frac{W}{k_B T}\right\},$$

где W - энергия активации; D_0- константа.

Для дальнейших построений нам будет удобно рандомизировать процесс залечивания, т.е. считать, что время залечивания есть экспоненциально распределенная случайная величина со средним τ_k, и что трещина существует в неизменном виде до момента залечивания, а в момент залечивания исчезает вместе с обусловленным ею искажением поля напряжений. Тогда интенсивность залечивания задается в виде

$$p^-_{k,N} = \tau_k^{-1} = D_0 \exp\left\{-\frac{W}{k_B T}\right\} \left[\ln\left\{\frac{\overline{W}^N_k}{W^{md}_{k,N}}\right\}\right]^{-1}. \tag{3}$$

(В практических расчетах, по-видимому, естественно последний множитель справа, как медленно меняющийся, заменять константой.) Условная вероятность $p_N(p^N_k, t;\ p^N_k - 1/N,\ t+dt | p^N_1, \ldots, p^N_K)$ того, что за время dt число n_k трещин типа k уменьшится на 1 (p^N_k уменьшится на $1/N$), при условии, что плотности трещин в момент t равны $p^N_1, \ldots, p^N_K$, определяется выражением

$$p_N(p^N_k,\ t;\ p^N_k - 1/N,\ t+dt | p^N_1, \ldots, p^N_K) = p^N_k\, p^-_{k,N}\, dt, \tag{4}$$

где первый множитель справа есть относительное число ячеек, занятых трещинами типа k.

Кроме того, будем полагать, что при залечивании девиатор внешних напряжений не совершает работы. Это означает, что деформации формоизменения, вносимые трещиной, при ее залечивании запоминаются в теле. Объемные деформации, напротив, считаются обратимыми, так как вакансии, возникающие при раскрывании трещин под действием растягивающих напряжений, заполняются за счет диффузии дислокаций. Поэтому давление при залечивании, сопровождающемся уменьшением объема, совершает работу.

Среднее поле напряжений

Расчет поля напряжений в теле, содержащем произвольную систему трещин, является задачей, в явном виде не решаемой. Поэтому мы воспользуемся приближением, смысл которого состоит, грубо говоря, в том, что падение напряжений в окрестностях трещин компенсируется приращением напряжений вне этих окрестностей, так, что средние по объему напряжения остаются равными граничным. (Аналогичный прием используется в задачах о разрушении канатов, состоящих из многих нитей, а также в моделях прочности твердых тел при одноосном растяжении.)

Пусть трещины представляют собой разрезы, имеющие форму плоских дисков с радиусами R_k, $k=1,\ldots,K$, причем $w_k = 4/3\ \pi R_k^3 < w$. Трение на их поверхностях отсутствует. Касательные к плоскости трещины компоненты тензора напряжений на ее поверхности равны нулю, а нормальная компонента равна нулю, если при отсутствии разреза она положительна (т.е. растягивает берега разреза). Будем считать, что вне сфер с радиусами R_k, описанных вокруг каждой трещины, поле напряжений однородно и описывается эффективным тензором $\bar{\sigma}^N$. (Предполагается, что сферы лежат целиком внутри соответствующих ячеек.) Поля напряжений внутри сфер также однородны, и отличаются от $\bar{\sigma}^N$ только тем, что компоненты описывающих их тензоров напряжений, равные нулю на поверхности трещин, обращаются в 0. (Разумеется, мы лишь приближенно описываем непрерывное поле напряжений разрывными функциями, отнюдь не предполагая реальных разрывов напряжений на границах сфер.) Микродефекты типа k будем моделировать дискообразными разрезами малого радиуса r_k, $r_k/R_k \le \varepsilon$, той же формы и ориентации, что и трещины типа k.

Для трещин и микродефектов типа k выберем какую-нибудь систему координат x_1^k, x_2^k, x_3^k, так, чтобы ось x_1^k была перпендикулярной плоскостям трещин. Обозначим через A_{ij}^k элементы матрицы преобразования координат x_1, x_2, x_3 в координаты x_1^k, x_2^k, x_3^k. Пусть $\bar{\sigma}_{ij}^{(k,N)} = A_{il}^k A_{jm}^k \bar{\sigma}_{lm}^N$ – тензор $\bar{\sigma}^N$ в новых координатах,

$$\hat{\sigma}_{ij}^{k,N} = \begin{cases} \min\{0, \bar{\sigma}_{ij}^{(k,N)}\} \text{ при } i=j=1; \\ 0 \text{ при } i=1, j\neq 1 \text{ или } i\neq 1, j=1; \\ \bar{\sigma}_{ij}^{(k,N)} \text{ при } i\neq 1, j\neq 1. \end{cases}$$

Определим оператор $\mathfrak{M}_{k,N}$, действующий на $\bar{\sigma}^N$ выражением

$$(\mathfrak{M}_{k,N}\bar{\sigma}^N)_{ij} = A_{li}^k A_{mj}^k \hat{\sigma}_{lm}^{k,N} .$$

Нелинейные операторы $\mathfrak{M}_{k,N}$ задают напряжения в окрестностях трещин и микродефектов, соответствующие приведенному выше неформальному описанию.

Пусть $w_k^0 = 4/3\ \pi r_k^3$, n_k^0 – число микродефектов типа k, не содержащихся в сферах, описанных вокруг трещин. Тогда $V_k = n_k w_k + n_k^0 w_k^0$ – объем области, в которой действуют напряжения $\mathfrak{M}_{k,N}\bar{\sigma}^N$. Тензор $\bar{\sigma}^N$ является решением системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{K} V_k (\mathfrak{M}_{k,N}\bar{\sigma}^N)_{ij} + (Nw - \sum_{k=1}^{K} V_k)\bar{\sigma}_{ij}^N = \sigma_{ij} Nw$$

или, если пренебречь членами порядка ε^3,

$$\sum_{k=1}^{K}\alpha_k p_k^N(\mathfrak{M}_{k,N}\bar{\sigma}^N)_{ij} + \left(1 - \sum_{k=1}^{K}\alpha_k p_k^N\right)\bar{\sigma}^N_{ij} = \sigma_{ij}, \qquad (5)$$

где $\alpha_k = w_k/w$. Можно показать, что, если $K\le 3$ и нормали к плоскостям всех трещин лежат в одной плоскости (двумерный случай), то система (5) имеет единственное решение при всех наборах p_k^N. При этом ясно, что $\bar{\sigma}^N$ есть кусочно-линейная функция σ. В общем случае вопрос о единственности решения (5) остается пока открытым.

Пусть $e(s)$ - плотность упругой энергии однородного изотропного тела при напряжении s_{ij},

$$e(s) = \frac{1}{18\lambda_1}(s_{11}+ s_{22}+ s_{33})^2 + \frac{1}{12\lambda_2}[(s_{11}- s_{22})^2 + (s_{22}- s_{33})^2 +$$

$$+ (s_{33}- s_{11})^2] + \frac{1}{2\mu}(s_{12}^2+ s_{23}^2+ s_{31}^2),$$

где λ_1 - модуль объемного сжатия, λ_2 - модуль сдвига. Положим

$$\rho_k^N = \frac{V_k}{Nw} = p_k^N\alpha_k + \frac{n_k^0 r_k^3}{NR_k^3}\alpha_k = p_k^N\alpha_k + O(\varepsilon^3).$$

Упругая энергия $E_N(\sigma;\ \rho_1^N,\dots,\rho_K^N)$ тела при нагрузке σ равна, как легко видеть,

$$E(\sigma;\rho^N,\dots,\rho^N) = Nwe(\sigma;\rho^N,\dots,\rho^N) = Nw\left[\sum_{k=1}^{K}\rho_k^N e(\mathfrak{M}_{k,N}\bar{\sigma}^N) + \left(1-\sum_{k=1}^{K}\rho_k^N\right)e(\bar{\sigma}^N)\right].$$

Упругая энергия $E_{k,N}(\sigma;\ p_1^N,\dots,p_K^N)$, вносимая одной трещиной типа k имеет, с точностью до величин порядка ε^3, вид

$$E_{k,N}(\sigma;\ p_1^N,\dots,p_K^N) = Nw\Big[e_N(\sigma;\ \rho_1^N,\dots,\rho_k^N + \frac{w_k}{Nw},\dots,\rho_K^N) -$$

$$- e_N(\sigma;\ \rho_1^N,\dots,\rho_K^N)\Big] = w_k\frac{\partial e_N(\sigma;\rho_1^N,\dots,\rho_K^N)}{\partial\rho_k^N} + O(N^{-1}).$$

Таким образом, полная энергия трещины $\bar{W}_k^N$, фигурирующая в формуле (3), равна

$$\bar{W}_k^N = w_k\frac{\partial e_N(\sigma;\rho_1^N,\dots,\rho_K^N)}{\partial\rho_k^N} + \pi R_k^2\gamma + O(N^{-1}).$$

Аналогично, для микродефектов:

$$E_{k,N}^{md}(\sigma,p_1^N,\dots,p_K^N) = w_k^0\,\frac{\partial e_N(\sigma;\rho_1^N,\dots,\rho_K^N)}{\partial\rho_k^N},$$

$$W^{md}_{k,N} = w^0_k \frac{\partial e_N(\sigma; \rho^N_1, \ldots, \rho^N_K)}{\partial \rho^N_k} + \pi r^2_k \gamma + O(N^{-1}),$$

что полностью определяет выражения (1),(3). Из кусочной линейности зависимости $\bar{\sigma}^N$ от σ следует равенство

$$e_N(\sigma;\ \rho^N_1, \ldots, \rho^N_K) = \frac{1}{2}\nu^N_{ijlm}(\sigma;\ \rho^N_1, \ldots, \rho^N_K)\sigma_{ij}\sigma_{lm} \equiv \frac{1}{2}(\sigma\cdot\nu^N\sigma), \qquad (6)$$

где ν^N_{ijlm} - кусочно-постоянные функции σ; $(a\cdot b)$ - знак скалярного произведения тензоров a и b. (При свертке тензоров суммирование, как обычно, производится по всем повторяющимся индексам.)

Аналогично

$$E_{k,N}(\sigma; p^N_1, \ldots, p^N_K) = w\frac{1}{2}\nu^{k,N}_{ijlm}(\sigma; \rho^N_1, \ldots, \rho^N_K)\sigma_{ij}\sigma_{lm} \equiv w\frac{1}{2}(\sigma\cdot\nu^{k,N}\sigma), \qquad (7)$$

где $\nu^{k,N}_{ijlm}$ - также кусочно-постоянные функции σ.

Динамика материальной точки

Для построения динамики сплошной среды будем считать "большое" $(N \to \infty)$ однородное тело малым элементом среды, иначе говоря, "материальной точкой", и изучим сначала ее поведение.

Переходные вероятности (2),(4) вместе с уравнением (5) определяют K-мерный марковский скачкообразный случайный процесс с компонентами $p^N_k(t)$, представляющими собой плотности трещин. Приращения этого процесса представим в виде

$$dp^N_k = d\xi^{N,+}_k - d\xi^{N,-}_k. \qquad (8)$$

где $\xi^{N,+}_k$ и $\xi^{N,-}_k$ - неубывающие случайные процессы с положительными скачками, определяемыми вероятностями перехода (2) и (4) соответственно.

Рассмотрим деформационные процессы, происходящие в теле при нагружении. В работе [2] был введен тензор макроскопической деформации ε (называемый в дальнейшем просто тензором деформации)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{Nw}\int_S \frac{1}{2}(X_i n_j + X_j n_i)\,ds,$$

где X_i - компоненты смещения; n_i - компоненты нормали к поверхности, интегрирование ведется по поверхности тела S, и было показано, что часто упругая деформация u_{ij} при фиксированной конфигурации трещин равна (см.(6))

$$u_{ij} = \frac{\partial e_N(\sigma; \rho_1, \ldots, \rho_K)}{\partial \sigma_{ij}} = \nu^N_{ijlm}\,\sigma_{lm}. \qquad (9)$$

Приращение деформации при появлении трещины типа k согласно (7) равно

$$\Delta_k^+ u_{ij} = \frac{1}{N} \nu^{k,N}_{ijlm} \sigma_{lm}.$$

При залечивании трещины типа k, поскольку девиатор напряжений работы не производит, девиатор деформаций также не меняется, а каждая диагональная компонента тензора деформации уменьшается на 1/3 величины объемной деформации $\Delta^+ u$, т.е.

$$\Delta_k^- u_{ij} = -\frac{1}{3}\Delta_k^+ u_{ii} = -\frac{1}{N}\bar{\nu}^{k,N}_{ijlm} \sigma_{lm},$$

где $\bar{\nu}^{k,N}_{ijlm} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\nu^{k,N}_{ijlm}$. Приращение $d\varepsilon_{ij}\big|_\sigma$ деформации ε_{ij} за время dt при постоянном σ равно

$$d\varepsilon_{ij}\big|_\sigma = \Delta_k^+ u_{ij} N d\xi_k^{N,+} + \Delta_k^- u_{ij} N d\xi_k^{N,-} = \sigma_{lm}(\nu^{k,N}_{ijlm} d\xi_k^{N,+} - \bar{\nu}^{k,N}_{ijlm} d\xi_k^{N,-}).$$

Из (9) и последнего выражения находим полное приращение деформации (индексы для краткости опущены)

$$d\varepsilon = \nu^N d\sigma + \sum_{k=1}^{K} (\nu^{k,N} d\xi_k^{N,+} - \bar{\nu}^{k,N} d\xi_k^{N,-})\sigma. \qquad (10)$$

откуда видно, что процессы рождения и уничтожения трещин приводят к появлению вязкой компоненты деформирования. Если в качестве контролируемых внешних условий выбрать некоторый способ изменения деформаций, то из (10) следует уравнение для внешних напряжений

$$d\sigma = \mu^N[d\varepsilon - \sum_{k=1}^{K} (\nu^{k,N} d\xi_k^{N,+} - \bar{\nu}^{k,N} d\xi_k^{N,-})\sigma], \qquad (11)$$

где μ^N - оператор, обратный ν^N и представляющий собой тензор упругих модулей тела с трещинами (вообще говоря, анизотропный).

Плотность внутренней энергии тела, с точностью до постоянной, не зависящей от внешних условий и плотностей трещин, равна сумме плотностей упругой энергии, поверхностной энергии трещин и энергии тепловых колебаний атомов (вкладом микродефектов пренебрегаем). Первое начало термодинамики с помощью (6) и (8) записывается в виде

$$\frac{1}{2}d(\sigma\cdot\nu^N\sigma) + \gamma\sum_{k=1}^{K}\frac{\pi R_k^2}{w}(d\xi_k^{N,+} - d\xi_k^{N,-}) + \rho C_p dT = (\sigma\cdot d\varepsilon) + \frac{dQ}{Nw},$$

где ρ - плотность вещества; C_p - удельная теплоемкость при постоянном давлении; dQ - приращение поступающей извне тепловой энергии. Воспользовавшись (10) и тем обстоятельством, что

$$d\nu^N = \sum_{k=1}^{K}\nu^{k,N}(d\xi_k^{N,+} - d\xi_k^{N,-}),$$

получаем из последнего равенства приращение температуры

$$dT = (\rho\ C_p)^{-1}\left\{\ \sum_{k=1}^{K}\left[\ \frac{1}{2}(\sigma\cdot\nu^{k,N}\sigma)\ -\ \gamma\frac{\pi R_k^2}{W}\ \right]d\xi_k^{N,+}\ +\right.$$

$$\left.+\ \sum_{k=1}^{K}\left[\ \frac{1}{2}(\sigma\cdot\nu^{k,N}\sigma)\ +\ \gamma\frac{\pi R_k^2}{W}\ -\ (\sigma\cdot\bar{\nu}^{k,N}\sigma)\right]d\xi_k^{N,-}\ +\ \frac{dQ}{Nw}\ \right\}. \qquad (12)$$

Системы уравнений (8),(10),(12) или (8),(11),(12) вместе с уравнениями (5) определяют в замкнутом виде случайную динамику деформируемого твердого дела.

Из формул (2) и (4), определяющих процессы $\xi_k^{N,+}$ и $\xi_k^{N,-}$, следует, что

$$d\xi_k^{N,+}\ =\ (1\ -\sum_{m=1}^{K}p_m^N\ )p_{k,N}^{+}dt\ +\ N^{-1/2}\left[(1\ -\sum_{m=1}^{K}p_m^N\ )p_{k,N}^{+}\right]^{1/2}d\zeta_k^{N,+},$$

$$d\xi_k^{N,-}\ =\ p_k^N p_{k,N}^{-}dt\ +\ N^{-1/2}[p_k^N p_{k,N}^{-}]^{1/2}d\zeta_k^{N,-},$$

где приращения случайных процессов $d\zeta_k^{N,+}$, $d\zeta_k^{N,-}$ имеют нулевые математические ожидания и дисперсии, равные dt. (Можно показать, что при $N\to\infty$ процессы $\zeta_k^{N,+}$, $\zeta_k^{N,-}$ слабо сходятся к винеровским, и получить таким образом диффузионное приближение для больших N, однако эти вопросы выходят за рамки настоящей работы.) Переходя к термодинамическому пределу $N\to\infty$ (существование предела легко доказывается для частных случаев) и опуская индекс N в обозначениях пределов соответствующих величин, получаем из (8),(11),(12) с помощью последних двух равенств предельную систему дифференциальных уравнений (точка над знаком функции означает, как обычно, дифференцирование по времени):

$$\dot{p}_k\ =\ (1\ -\sum_{m=1}^{K}p_m)p_k^{+}\ -\ p_k p_k^{-}\ , \qquad (13)$$

$$\dot{\sigma}\ =\ \mu\left\{\dot{\varepsilon}\ -\ \left[(1\ -\sum_{m=1}^{K}p_m)\ \sum_{k=1}^{K}p_k^{+}\nu^k\ -\sum_{k=1}^{K}p_k p_k^{-}\bar{\nu}^k\right]\sigma\right\}\ , \qquad (14)$$

$$\dot{T}\ =\ (\rho C_p)^{-1}\left\{(1\ -\sum_{m=1}^{K}p_m)\ \sum_{k=1}^{K}\left[\ \frac{1}{2}(\sigma\cdot\nu^k\sigma)\ -\ \gamma\frac{\pi R_k^2}{W}\ \right]p_k^{+}\ +\right.$$

$$\left.+\ \sum_{k=1}^{K}\left[\ \frac{1}{2}(\sigma\cdot\nu^k\sigma)\ +\ \gamma\frac{\pi R_k^2}{W}\ -\ (\sigma\cdot\bar{\nu}^k\sigma)\right]\ p_k p_k^{-}\ +\ G\right\}\ , \qquad (15)$$

где G - скорость притока тепла в единицу объема. Уравнения (13)-(15) вместе с (5) определяют детерминированную динамику материальной точки.

Динамика сплошной среды

Поскольку деформации, возникающие в рассматриваемой модели, имеют вязкую составляющую и, следовательно, не являются в общем случае малыми, для построения уравнений сплошной среды введем в трехмерном декартовом пространстве поле скоростей смещений $v \equiv v_i(x,t)$, $i=1,2,3$, $x=(x_1,x_2,x_3)$ и напомним (см., например, [2]), что в эйлеровых координатах $x=x(X,t)$, где X - лагранжевы координаты материальной точки в исходной конфигурации, материальная производная по времени $\dot{f} \equiv \frac{\partial f(X,t)}{\partial t}$ равна $\dot{f} \equiv \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} + (v \cdot \nabla f(x,t))$ для любой дифференцируемой функции f. Отметим, что симметризованный градиент скорости $\nabla^{(s)} v \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ равен по определению тензору скоростей деформации $\nabla^{(s)} v = \dot{\varepsilon}$. Поскольку объемные деформации являются чисто упругими и, следовательно, малыми, закон сохранения массы выполняется автоматически. Закон сохранения импульса имеет вид

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \mathrm{div}\, \sigma + \rho F, \tag{16}$$

где ρ - плотность вещества; F - поле массовых сил. Из уравнений (13) получаем кинетические уравнения для плотностей трещин

$$\frac{\partial p_k}{\partial t} = -(v \cdot \nabla p_k) + (1 - \sum_{m=1}^{K} p_m) p_k^{+} - p_k p_k^{-} . \tag{17}$$

Уравнения состояния (14) дают уравнения состояния для среды

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -(v \cdot \nabla \sigma) + \mu \left\{ \nabla^{(s)} v - \left[(1 - \sum_{m=1}^{K} p_m) \sum_{k=1}^{K} p_k^{+} \nu^k - \sum_{k=1}^{K} p_k p_k^{-} \bar{\nu}^k \right] \sigma \right\}. \tag{18}$$

Наконец, из закона сохранения энергии в форме (15) и закона Фурье $q = \varkappa \nabla T$, где q - вектор потока тепла; $G = \mathrm{div}\, q$; $\varkappa$ - коэффициент теплопроводности, получаем уравнение теплопроводности с источником

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -(v \cdot \nabla T) + (\rho C_p)^{-1} \left\{ (1 - \sum_{m=1}^{K} p_m) \sum_{k=1}^{K} \left[\frac{1}{2}(\sigma \cdot \nu^k \sigma) - \gamma \frac{\pi R_k^2}{w} \right] p_k^{+} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{K} \left[\frac{1}{2}(\sigma \cdot \nu^k \sigma) + \gamma \frac{\pi R_k^2}{w} - (\sigma \cdot \bar{\nu}^k \sigma) \right] p_k p_k^{-} \right\} + \chi \Delta T , \tag{19}$$

$\chi = \varkappa(\rho C_p)^{-1}$ - коэффициент температуропроводности.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

В заключение приведем без вывода явный вид системы уравнений динамики материальной точки (13)-(15) после подстановки результатов решения уравнения (5) для случая, в котором имеются два типа трещин, с нормалями, параллельными осям x_1 и x_2, а компоненты σ_{13} и σ_{23} тензора напряжений равны нулю. Обозначения независимы от предыдущего текста.

а). Условные обозначения

σ_{ij}, i,j=1,2 - компоненты тензора напряжений,

ε_{ij}, i=1,2 - компоненты тензора деформаций,

T - температура,

E - модуль Юнга,

ν - коэффициент Пуассона,

γ - удельная поверхностная энергия,

ρ - плотность вещества,

C_p- теплоемкость при постоянном давлении,

k - постоянная Больцмана,

V_0- объем элементарной ячейки (порядка объема зерна),

p_k, k=1,2 - плотность трещин k-го типа, т.е. доля ячеек, содержащих трещины k-го типа.

R - радиус трещины (имеющей форму плоского диска),

r - радиус зародышевой трещины,

c - "скорость растрескивания".
D - "скорость залечивания".
W - "энергия активации залечивания" } константы модели.

б). Вспомогательные обозначения

$$H(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \geq 0 \\ 0 \text{ при } x < 0; \end{cases} \qquad q_1 = H(\sigma_{11}); \qquad q_2 = H(\sigma_{22});$$

$$\alpha = \frac{4\pi R^3}{3V_0}; \qquad \rho_i = \alpha p_i, \quad i=1,2;$$

$$e_1 = \frac{\sigma_{11}^2 q_1}{2(1-q_1\rho_1)^2 E} + \frac{\nu q_1 q_2 \rho_2 \sigma_{11} \sigma_{22}}{(1-q_1\rho_1)^2(1-q_2\rho_2)E} + \frac{(1+\nu)\sigma_{12}^2}{(1-\rho_1-\rho_2)^2 E} ;$$

$$e_2 = \frac{\sigma_{22}^2 q_2}{2(1-q_2\rho_2)^2 E} + \frac{\nu q_1 q_2 \rho_1 \sigma_{11} \sigma_{22}}{(1-q_1\rho_1)(1-q_2\rho_2)^2 E} + \frac{(1+\nu)\sigma_{12}^2}{(1-\rho_1-\rho_2)^2 E} ;$$

$$e_1^0 = \frac{q_1(\sigma_{11}+ \sigma_{22}+ \sigma_{33})[\nu q_2\rho_2(\sigma_{11}+ \sigma_{22})+(1-q_2\rho_2)\sigma_{11}]}{6E(1-q_1\rho_1)^2(1-q_2\rho_2)} ;$$

$$e_2^0 = \frac{q_2(\sigma_{11}+ \sigma_{22}+ \sigma_{33})[\nu q_1\rho_1(\sigma_{11}+ \sigma_{22})+(1-q_1\rho_1)\sigma_{22}]}{6E(1-q_2\rho_2)^2(1-q_1\rho_1)} ;$$

$$p_i^+ = (1 - p_1 - p_1)c \exp\left\{\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 e_i - \frac{2}{3}\pi r^2 \gamma}{kT}\right\} , \quad i=1,2;$$

$$p_i^- = \frac{p_i D \exp\left\{-\frac{W}{kT}\right\}}{\ln\left\{\frac{4Re_i+3\gamma}{4re_i+3\gamma}\right\} + 2\ln\frac{R}{r}} \qquad i=1,2;$$

$$\Delta_1^+ u_{11} = \frac{\alpha q_1}{E(1-q_1\rho_1)^2} \left(\sigma_{11}+ \frac{\nu q_2\rho_2}{1-q_2\rho_2} \sigma_{22}\right);$$

$$\Delta_2^+ u_{11} = \frac{\alpha q_1 q_2 \nu \rho_1}{E(1-q_1\rho_1)(1-q_2\rho_2)^2} \sigma_{22};$$

$$\Delta_1^- u_{11} = \frac{\alpha q_1}{3E(1-q_1\rho_1)^2}\left[\sigma_{11}+ \frac{\nu q_2\rho_2}{1-q_2\rho_2}(\sigma_{11}+ \sigma_{22})\right];$$

$$\Delta_2^- u_{11} = \frac{\alpha q_2}{3E(1-q_2\rho_2)^2}\left[\sigma_{22}+ \frac{\nu q_1\rho_1}{1-q_1\rho_1}(\sigma_{11}+ \sigma_{22})\right];$$

$$\Delta_1^+ u_{22} = \frac{\alpha q_1 q_2 \nu \rho_2}{E(1-q_2\rho_2)(1-q_1\rho_1)^2} \sigma_{11};$$

$$\Delta_2^+ u_{22} = \frac{\alpha q_2}{E(1-q_2\rho_2)^2} \left(\sigma_{22}+ \frac{\nu q_1\rho_1}{1-q_1\rho_1} \sigma_{11}\right);$$

$$\Delta_1^- u_{22} = \Delta_1^- u_{11}; \qquad \Delta_2^- u_{22} = \Delta_2^- u_{11};$$

$$\lambda = \left[1- \frac{\nu^2(1-q_1\rho_1-q_2\rho_2)^2}{(1-q_1\rho_1)(1-q_2\rho_2)}\right];$$

в). Уравнения динамики

$$\dot\sigma_{11}= \lambda E(1-q_1\rho_1)\left[\dot\varepsilon_{11}- \sum_{i=1,2}(p_i^+\Delta_i^+u_{11}- p_i^-\Delta_i^-u_{11})\right] +$$

$$+ \nu\lambda E(1-q_1\rho_1-q_2\rho_2)\left[\dot\varepsilon_{22}- \sum_{i=1,2}(p_i^+\Delta_i^+u_{22}- p_i^-\Delta_i^-u_{22})\right];$$

$$\dot\sigma_{22}= \lambda E(1-q_2\rho_2)\left[\dot\varepsilon_{22}- \sum_{i=1,2}(p_i^+\Delta_i^+u_{22}- p_i^-\Delta_i^-u_{22})\right] +$$

$$+ \nu\lambda E(1-q_1\rho_1-q_2\rho_2)\left[\dot\varepsilon_{11}- \sum_{i=1,2}(p_i^+\Delta_i^+u_{11}- p_i^-\Delta_i^-u_{11})\right];$$

$$\dot\sigma_{12}= \frac{E(1-\rho_1-\rho_2)}{(1+\nu)}\,\dot\varepsilon_{12}- \frac{\alpha}{1-\rho_1-\rho_2}\,(p_1^+ + p_2^+)\sigma_{12};$$

$$\dot T = \frac{1}{\rho C_p}\left[\sum_{i=1,2}p_i^+(\alpha e_{i_0} - \frac{\pi R^2\gamma}{V}) + \sum_{i=1,2}p_i^-(\alpha e_i - 2\alpha e_{0_0} + \frac{\pi R^2\gamma}{V}) + G\right];$$

$$\dot p_i = p_i^+ - p_i^-; \qquad i=1,2.$$

Наиболее простой вид уравнения приобретают, если $\dot\varepsilon_{11}= \dot\varepsilon_{22}= 0$, $\sigma_{11}\le 0$, $\sigma_{22}\le 0$. В этом случае первые два уравнения исчезают, а в остальных можно положить $p_1= p_2= p/2$, при условии, что это равенство выполнено в начальный момент времени.

Автор выражает благодарность М.Б.Гейликману, М.Я.Кельберту и М.Г.Шчирману за полезные обсуждения.

Литература

1. *Герцик В.М.* Конструктивная статистическая механика трещин // Дискретные свойства геофизической среды. М.: Наука, 1989. С. 148-160.

2. *Дей У.А.* Термодинамика простых сред с памятью. М.: Мир, 1974. 190 с.