УДК 550.348

М.Б.Гейликман

О МЕДЛЕННОМ СКОЛЬЖЕНИИ НЕОДНОРОДНО-ШЕРОХОВАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

M.B.Geilikman

SLOW SLIDING OF NONHOMOGENEOUSLY ROUGH SURFACES

Theoretical model of nonhomogeneous friction of nominally flat rough surfaces is formulated. Two types of nonhomogeneities are considered: random fluctuation of fractal relief of rough surfaces, and inhomogeneities of density of asperities. It is shown that interaction of inhomogeneities may lead to instability of slow sliding. A jump of displacements occurs under smooth relative movement of contacting surfaces. Rapid temporal rate of displacements appears as a precursor immediately before the instability time: $|\partial u/\partial t| \sim (t_c - t)^{-1/2}$.

Введение

В ряде работ, как экспериментальных [1-3], так и теоретических [4] отмечалось, что пространственная неоднородность силы трения может приводить к неустойчивости стационарного (асейсмического) скольжения. В экспериментах Моги [1] было обнаружено также, что пространственная неоднородность плоскости скольжения приводит к характерным аномалиям деформации непосредственно перед потерей устойчивости. Эти аномалии предваряющей деформации представляют интерес как предвестник неустойчивости. В настоящей работе рассматривается теоретическая модель трения неоднородно-шероховатых поверхностей, в которой может возникать неустойчивость медленного скольжения, и выясняется, какие признаки можно считать предшествующими этой неустойчивости.

Модель трения

Проблема контакта шероховатых поверхностей, очевидно, весьма сложна и при ее решении трудно обойтись без каких-либо модельных упрощений. Одно из них, вытекающее из эксперимента, заключается в том, что по мере сближения шероховатых поверхностей растет число пятен, вступающих в контакт, но средний размер отдельного пятна остается практически постоянным. Это позволило развить упрощенную, но физически ясную модель контакта шероховатых поверхностей [5-8], находящуюся в согласии с законом Амонтона. Дальнейшее развитие эта теория получила в работе [9], где, в частности, была учтена адгезия в упругом контакте и получены отклонения от закона Амонтона. Обобщая результаты перечисленных работ, нормальное напряжение на контакте номинально плоских шероховатых поверхностей можно записать в следующем приближенном виде:

$$P_n = n_1 n_2 s_a \, f_a \, I(h/d). \tag{1}$$

Поясним обозначения: n_1, n_2 - плотности шероховатостей (на единицу номинальной площади) соответственно на 1-й и 2-й поверхностях; f_a- характерное значение нормальной силы на пятне отдельного парного контакта со средней площадью пятна s_a. Безразмерная функция $I(x)$ описывает зависимость напряжения от сближения h, т.е. от величины перекрытия шероховатых слоев, а d имеет смысл характерной высоты шероховатостей. Выполнение закона Амонтона заключается в том, что нормальное напряжение P_n и касательное напряжение P_f, создаваемое трением, имеют одну и ту же функциональную зависимость от сближения $I(h/d)$, так что выполняется соотношение:

$$P_f = \varkappa P_n, \tag{2}$$

где коэффициент пропорциональности $\varkappa$ можно назвать локальным коэффициентом трения. Относительно зависимости $I(x)$ считается обычно, что при малых сближениях [6]

$$I(x) \sim x^{\nu}, \tag{3а}$$

где ν=2÷6. При больших сближениях [8] используется

$$I(x) \sim e^{x}, \tag{3б}$$

а также другие, более сложные зависимости [6,8].

В перечисленных выше работах [5-8] формулы типа (1) были написаны для однородного случая, т.е. когда n_1, n_2 и h не зависят от координат. Однако, как мы теперь знаем, реальные шероховатые поверхности имеют многомасштабную, фрактальную структуру [10-12]. Иными словами, рельеф шероховатой поверхности $z(r)$ $(r=x,y)$ имеет не какую-то одну длину неоднородности, а целый спектр характерных длин, вообще говоря, вплоть до самых больших - порядка размеров образца. Это означает, что сближение

$$h = z_2(r) - z_1(r) \tag{4}$$

следует считать зависящим от координат в формуле (1), которую теперь мы будем понимать в локальном смысле ($z_1(r)$ - рельеф верхней, а $z_2(r)$ - рельеф нижней поверхности). При выводе формулы (1) предполагается, что на каждой из соприкасающихся площадок находится статистически большое число шероховатостей. В то же время мы считаем, как это обычно делается в теории континуума, что размер площадки мал по сравнению с характерными макромасштабами задачи и в этом смысле на площадке можно определить локальные макровеличины. Такие элементы объема или поверхности называются в теории континуума физически бесконечно малыми. Вертикальную координату базы поверхности [5,6] (т.е. z-координату наиболее высокой шероховатости на данной физически бесконечно малой площадке) мы назовем локальным значением рельефа $z(r)$.

Как правило, $z(r)$ может рассматриваться как гауссово случайное поле, причем для фрактальных поверхностей его дисперсия является растущей функцией в зависимости от размеров области усреднения [12,13], о чем пойдет речь ниже. Таким образом, флуктуации рельефа приводят к большим пространственным флуктуациям силы трения.

Для существенно неоднородных поверхностей плотности шероховатости также следует считать зависящими от координат: $n_i=n_i(r)$. Эти неоднородности мы будем считать детерминированными и рассмотрим их взаимодействие.

Уравнение для смещения

Рассмотрим задачу о смещениях упругого полупространства (для определенности - верхнего полупространства "1"), к поверхности которого приложены силы (1) и (2). Для простоты будем считать нижнее полупространство "2" абсолютно жестким, а интересующее нас верхнее полупространство "1" недеформируемым в z-направлении, перпендикулярном плоскости поверхности. Полупространство "1" покоится, а нижнее -"2"- медленно движется со скоростью V так, что можно рассматривать задачу квазистатически. По мере движения локальная сила трения флуктуирует, что в свою очередь вызывает флуктуации смещения. Как было отмечено еще в работе [9], флуктуации смещения велики даже в таком простом случае, когда на границе полупространства приложены гауссовы случайные силы. В точку пространства с радиусом-вектором r попадает элемент границы (вещество) из точки $r-u(r)$, где $u(r)$ - смещение поверхности "1". Поэтому в точке пространства с координатой r будут действовать силы

$$P_n(r) = n_1(r-u(r))n_2(r)f_a s_a I\{[z_2(r)-z_1(r-u(r))]/d\}, \qquad (5а)$$

$$P_f(r) = \varkappa P_n(r). \qquad (5б)$$

Подчеркнем, что сдвиг аргумента вида $r \to r-u(r)$ еще не означает отклонения от линейной теории упругости. Для применимости линейной теории упругости нужно, чтобы были малы деформации, т.е. не сами смещения, а их градиенты. Рассуждения такого рода использовались ранее при рассмотрении сил в диэлектриках и флуктуаций поля смещений в двумерных кристаллах [14, § 138, 15, § 15]. Используя известные формулы теории упругости [16], запишем смещения на поверхности полупространства:

$$u_\alpha(r) = f_a s_a \int d^2r' [G_{\alpha z}(r-r') + \varkappa\, G_{\alpha x}(r-r')] \times$$

$$\times\, n_1(r-u(r'))\, n_2(r')\, I\,\{h(r')/d\}, \tag{6}$$

где $h(r) \equiv z_2(r)-z_1(r-u(r))$, а $G_{\alpha\beta}(r-r')$ - функция Грина упругого полупространства. Мы считаем, что сила трения направлена по оси **x**. Уравнение (6) представляет собой нелинейное интегральное уравнение для $u(r)$, которое едва ли можно решить в общем виде. По этим причинам перейдем к упрощениям.

Пусть характерный масштаб изменения $n_i(r)$ порядка R. На масштабах порядка R функция сближения $I(h/d)$ сильно осциллирует за счет тех длин волн в спектре рельефа, которые значительно меньше, чем R. Поэтому под интегралом в формуле (6) можно произвести усреднение по быстроосциллирующим гармоникам. Для этого рельеф $z(r)$ несколько условно разобьем на две части:

$$z(r) = \zeta_R(r) + \xi_R(r), \tag{7}$$

где ζ_R содержит гармоники с длинами волн $\lambda > R$, а ξ_R - с $\lambda < R$. Производя усреднение, заменим под интегралом

$$I \Rightarrow \langle I \rangle_R, \tag{8}$$

где $\langle \ldots \rangle_R$ - усреднение по быстроосциллирующим гармоникам ξ_R.

Далее будем считать, что неоднородности плотности шероховатостей можно считать локализованными в том смысле, что расстояния между неоднородностями гораздо больше их характерного размера R. В этом случае можно рассмотреть задачу о парном столкновении неоднородностей, одна из которых находится на нижней, а другая на верхней поверхности.

Вблизи неоднородности плотность можно записать в следующем виде:

$$n_i(r) = \bar{n}_i + \eta_i(r-r_i), \tag{9}$$

где $\bar{n}_i$ не зависит от координат. Функции $\eta_i(r-r_i)$, описывающие форму неоднородности, имеют максимум при $r=r_i$ и спадают до нуля при $|r-r_i| \gg R$.

Найдем ту часть смещения (обозначим ее v_α), которая обусловлена взаимодействием неоднородностей, т.е. зависит сразу от координат и той и другой неоднородности. Из формул (6) и (9) получаем:

$$v_\alpha = f_a s_a \int d^2r' [G_{\alpha z}(r-r') + \varkappa G_{\alpha x}(r-r')] \langle I \rangle_R \eta_1(r'-\tilde{r}_1-v(r')) \times$$

$$\times \eta_2(r'-r_2), \tag{10}$$

где введено обозначение: $\tilde{r}_1 \equiv r_1 - u+v$. Чтобы вычислить интеграл в явном виде следует задаться каким-либо конкретным видом неоднородностей. Возьмем следующую простую форму:

$$\eta_i(r-r_i) = \eta_{im} \exp[-(r-r_i)^2/R^2]. \tag{11}$$

После чего в формуле (10)

$$\eta_1(r'- \tilde{r}_1- v)\eta_2(r'- r_2) =$$

$$= \eta_{1m}\ \eta_{2m} \exp[-[v(r')-\rho]^2/2R^2]\ \exp[-2(r'-r_м)^2/R^2], \tag{12}$$

где введены обозначения

$$\rho = r_2- r_1, \tag{13а}$$

$$r_м = \tilde{r}_1+ v + r_2. \tag{13б}$$

Из (10) и (12) видно, что основной вклад в интеграл вносится областью порядка R вокруг точки $r_м$, и медленно меняющиеся $v(r')$ и $u(r')$ можно взять при $r'= r_м$. Положив также и внешний аргумент $r=r_м$, получим уравнение для $v(r_м)$. Запишем его в безразмерном виде:

$$w = \gamma \exp[-(w-\tau)^2/2], \tag{14а}$$

где

$$w = v_x(r_м)/R, \tag{14б}$$

$$\tau = [r_{2x}- \tilde{r}_{1x}(r_м)]/R, \tag{14в}$$

$$\gamma = \frac{1}{\mu}\ \eta_{1m}\eta_{2m} f_a s_a \langle I(r_м) \rangle_R \exp\ [-\rho_y^2\ /2R^2], \tag{14г}$$

y-компонента расстояния между неоднородностями $\rho_y \equiv r_{2y}- \tilde{r}_{1y}(r_м)$ играет роль "прицельного расстояния". Величина μ, имеющая смысл эффективной жесткости взаимодействия неоднородностей, определяется формулой

$$1/\mu = 2^{-1/2} \int d^2s\ [G_{xz}(s) + \varkappa\ G_{xx}(s)]\ \exp(-s^2). \tag{15}$$

При выводе формул (14) и (15) был использован тот факт, что функция Грина является однородной функцией первого порядка $\sim 1/r$, и в интеграле была сделана замена переменной интегрирования $s =$ $= 2^{1/2}(r'- r_м)/R$. Чтобы можно было для простоты ограничиться одним уравнением (лишь для x-компоненты смещения) мы рассматриваем случай "лобового" столкновения неоднородностей, когда $\rho \ll R$. В общем случае из уравнения (10) легко получить систему уравнений для обеих x- и y- компонент смещения.

Обратимся теперь к вычислению $\langle I\rangle_R$ и проведем это для того случая, когда I(x) имеет вид (3б):

$$I(h/d) = \exp(h/d), \tag{16}$$

любую зависимость вида (3а) можно получить дифференцированием (16) нужное число раз по d^{-1}. Подставляя (7) в (16), получим

$$\langle I\rangle_R = \exp[(\zeta_{R2}-\zeta_{R1})/d]\langle\exp[(\xi_{R2}-\xi_{R1})]\rangle_R. \tag{17а}$$

Считая ξ, как и в [12,13], гауссовым случайным полем, находим

$$\langle\exp[(\xi_{R2}-\xi_{R1})/d]\rangle_R = \exp[(\langle\xi^2_{R1}\rangle+\langle\xi^2_{R2}\rangle)/2d^2]. \tag{17б}$$

Из экспериментальных [10] и теоретических [11-13] исследований шероховатых поверхностей следует, что

$$\langle\xi^2_R\rangle = k^{2(1-H)}R^{2H}, \tag{18}$$

где $0<H<1$ с наиболее характерным значением для большинства шероховатых поверхностей $H=1/2$. Величина k, имеющая размерность длины, называется топотезой [10]. Считая для простоты, что размерность H одинакова для обеих поверхностей, получим окончательно:

$$\langle I\rangle_R = \exp[(\zeta_{R2}-\zeta_{R1})/d]\ \exp[k^{2(1-H)}R^{2H}/d^2]. \tag{19}$$

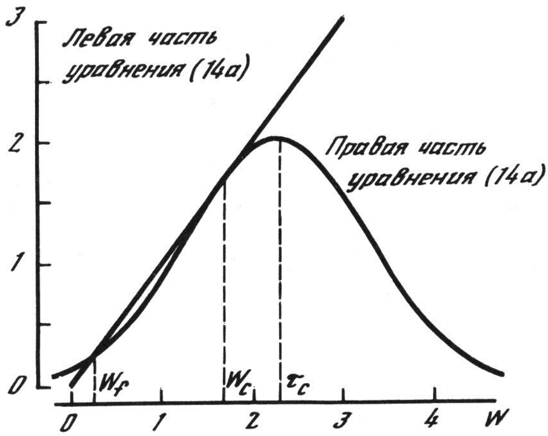
Таким образом $\langle I\rangle_R$ возрастает с ростом R. Если шероховатая поверхность имеет некую максимальную длину неоднородности λ_{max}, то при $R>\lambda_{max}$ в показателе экспоненты будет стоять λ_{max} вместо R, и дальнейший рост прекратится.

Отметим, что если бы мы вычисляли деформацию, т.е. продифференцировали по r выражение (10), то подынтегралом стояла бы производная функции Грина $\sim 1/r^2$. Это дает резкое поведение подынтегрального выражения при малых r: $\int d^2r/r^2 \sim \int dr/r$. В этой ситуации функцию сближения I уже нельзя заменять средним значением, и деформации не могут быть большими из-за роста $\langle I\rangle_R$.

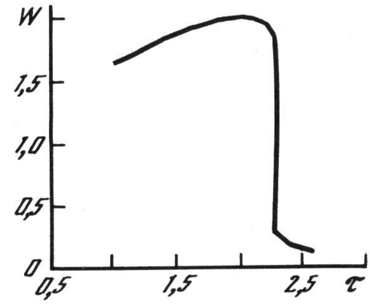
Если в уравнении (14)

$$\gamma < \gamma_m = e^{1/2}, \tag{20}$$

то имеется лишь одно решение, которое плавно зависит от τ - расстояния между неоднородностями, если же $\gamma>\gamma_m$, то при постепенном изменении τ в некой точке τ_c поисходит перескок с одного решения на другое. Эта ситуация проиллюстрирована на рис.1. На рис.2 пока-



Р и с. 1



Р и с. 2

зано изменение смещения как функции расстояния между неоднородностями τ. Ситуация оказывается аналогичной зацеплению межфазного фронта (тройной линии) на примеси, которое было исследовано Жоанни и Де Женном [17].

Вблизи точки перескока поведение $w(\tau)$ легко получить в аналитическом виде:

$$w = w_c + A(\gamma)(\tau_c - \tau)^{1\backslash 2}. \tag{21}$$

Зависимость коэффициента $A(\gamma)$ задается в неявном виде:

$$A(\gamma) = \left[2w_c/(w_c^2 - 1)\right]^{1/2}, \tag{22а}$$

$$\gamma = w_c \exp(1/2w_c^2). \tag{22б}$$

Поведение $w(\tau)$ вида (21) дает, очевидно, резкий корневой рост производной смещения по времени перед неустойчивостью. Возвращаясь к размерным переменным, получим из (21)

$$|\partial u_x(r_м)/\partial t| \approx \frac{A(\gamma)(RV)^{1/2}}{2}(t_c - t)^{-1/2}, \tag{23}$$

где V - скорость относительного перемещения поверхностей. Отметим, что при $\gamma - \gamma_m \ll \gamma_m$ коэффициент $A(\gamma)$ велик. Из (22) следует, что в этом случае

$$A(\gamma) \approx [\gamma_m/(\gamma - \gamma_m)]. \tag{24а}$$

В этой области легко получить связь $A(\gamma)$ со скачком смещения при срыве $\Delta u/R = w_c - w_f$ (см. рис.1):

$$A(\gamma) \approx (3R/\Delta u). \tag{24б}$$

Из сказанного выше следует, что зацепление неоднородностей и последующий срыв может происходить при $\gamma > \gamma_m$, т.е. для достаточно больших неоднородностей. Оценка минимального размера неоднородности R_m, начиная с которого становится возможным зацепление при $R>R_m$, существенно зависит от конкретного вида функции сближения. Для экспоненциальной зависимости (16) получим из (14г),(18) и (19) при H=1/2:

$$R_m \sim \frac{d^2}{k}\ln(\mu/\eta_{1m}\eta_{2m}f_a s_a) \sim \frac{d^2}{k}\ln(\mu A_n^2/\sigma_a A_f^2). \qquad (25)$$

Для природных образцов k~1 см (для **Arizona Bonito Lava-Flow** k=2,3 см [10]), $\sigma_a \sim f_a/s_a$ - напряжение в пятне отдельного контакта, A_f - фактическая, а A_n - номинальная площади контакта. Как известно, $A_f/A_n \sim 0{,}1\div0{,}01$. Если считать, как обычно [6], что характерные деформации $\varepsilon \sim \sigma/\mu \sim 10^{-4}$ [18. С.109], и положить для оценки d~k, то получим из (24): $R_m \sim 10\div10^2$см, т.е. зацепление вполне реально.

Заключение

Таким образом, в предложенной модели неоднородного трения возникает неустойчивость медленного скольжения - скачок смещения при плавном относительном смещении поверхностей. Предвестником неустойчивости может служить резкое возрастание скорости изменения смещений: $|\partial u/\partial t| \sim (t_c - t)^{-1/2}$. Эта неустойчивость не связана с достижением какого-либо порога по напряжению или по деформации. В данном случае "управляющей переменной" является само смещение, точнее, относительное перемещение контактирующих поверхностей с неоднородностями. Отметим, что корневое поведение скорости смещения не зависит от конкретной, выбранной нами формы неоднородности (11), а является следствием близости к точке касания левой и правой частей уравнения (14а) (см. рис.1). Ситуация, видимо, может измениться, если неоднородности плотности нельзя считать изолированными, и ограничиваться парным взаимодействием. Следует также отметить, что дальнейшее развитие неустойчивости может носить более сложный, кооперативный характер. В контексте развиваемых в последнее время лавинных моделей землетрясений [19] рассмотренная нами модель может давать одну из возможных картин стартовой неустойчивости, которая влечет за собой лавину того или иного количества последующих срывов.

Резкое возрастание скорости смещений перед неустойчивостью отмечалось как в лабораторных экспериментах [1], так и в наблюдательных данных (Тонанкай, 1944 г.; Сан-Фернандо, 1971 г. и др.) [1,18,20]. Интересно иметь более подробные данные, по которым можно было бы судить о функциональной зависимости предваряющих смещений от времени и о количественном согласии с полученной выше теоретической зависимостью.

Литература

1. *Моги К.* Предсказание землетрясений. М.: Мир, 1988. 382 с.
2. *Dieterich J.N.* Preseismic fault slip and earthquake prediction //J.Geophys.Res. 1978. Vol.83. P.3940-3948.
3. *Scholz C., Molnar P.,Johnson T.* Detailed studies of frictional sliding granite and implication for the earthquake mechanism //J.Geophys.Res. 1972. Vol.77. P.6392-6406.
4. *Nur A.* Non-uniform friction as a physical basis for earthquake mechanics//PAGEOPH. 1978. Vol.116. P.964-991.
5. *Крагельский И.В.* Трение покоя двух шероховатых поверхностей// Изв. АН СССР. ОТН. 1948. N.10. С.1621-1625.
6. *Крагельский И.В.. Добычин М.Н.. Комбалов В.С.* Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение. 1977. 513 с.
7. *Greenwood J.A., Williamson J.B.R.* Contact of nominally flat - surfaces//Proc.Roy.Soc. 1966. Vol.A295. P.300-315.
8. *Johnson K.L.* Contact mechanics. Cambridge Univ. Press: 1985, 509 p.
9. *Larkin A.I., Khmelnitskii D.E.* Elastic model of dry friction/ Acad.Sci.USSR. Inst.Theor.Phys. Prepr. Chernogolovka,1979.25 p
10. *Sayles R.S.,Thomas T.R.* Surface topography as a non-stationary random process//Nature. 1978. Vol.271, N.5644. P.431-434; Vol. 273, N.5663. P.573.
11. *Mandelbrot B.* Stochastic models for the earth's relief, the shape and the fractal dimension of coastlines, and the number-area rule for island//Proc. Nat. Acad.Sci. 1975. N.10. P.3825-3828.
12. *Feder F.* Fractals. N-Y.: Plenum Press, 1988. 400 p.
13. *Berry M.V.* Diffractals//J.Phys.Ser.A. 1979. Vol.12, N.6.P.781-797.
14. *Ландау Л.Д.. Лифшиц Е.М.* Статистическая физика.М.:Наука. 1976. 583 с.
15. *Ландау Л.Д.. Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: ГИТТЛ. 1957. 532 с.
16. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука. 1988. 246 с.
17. *Joanny J.F., de Jennes P.G.* A model for contact angle hysteresis//J.Chem.Phys. 1984. Vol.84, N.1. P.552-562.
18. *Касахара К.* Механика землетрясений. М.: Мир. 1985. 264 с.
19. *Bak P., Tang C.* Earthquake as a self-organized critical phenomenon//J.Geophys.Res. 1989. Vol.94, N. B11. P.15.635-15.638.
20. *Рикитаке Т.* Предсказание землетрясений. М.: Мир. 1979. 289 с.