

УДК 512.3 + 550.34

М.Л. Гервер

ВОЛНОВОДЫ И УСТОЙЧИВЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ. II

M.L. Gerver

WAVEGUIDES AND STABLE POLYNOMIALS. II

The paper presents new results in the geometry of stable polynomials. Using these results a fast search algorithm is lounded to obtain a solution with the widest waveguide in the one-dimensional kinematic inverse problem.

1. Постановка задачи. Формулировки результатов

Поиск скоростной функции с самым широким волноводом среди функций, имеющих один и тот же годограф, приводит к задаче на максимум, точно поставленной в п. 1.7. В разд. 1 выдвигаются гипотезы и формулируются теоремы по геометрии устойчивых многочленов, ведущие к решению этой задачи.^{<1>*} Чтобы точнее очертить круг рассматриваемых вопросов, напомним в п. 1.1-1.6 некоторые сведения из [1].

1.1. Обозначения. Каждой точке $X = (x_0, \dots, x_{2n-2}) \in \mathbb{R}^{2n-1}$ сопоставим следующие четыре объекта: 1) многочлен

$$\mathcal{P}(r) = \mathcal{P}(X, r) = r^{2n} + r^{2n-1} + x_0 r^{2n-2} + x_1 r^{2n-3} + \dots + x_{2n-2}; \quad (1.1)$$

2) рациональную функцию $g(z) = g(X, z)$, равную ^{<2>} $b(z)/c(z)$, где

$$b(z) = b(X, z) = z^{n-1} + x_1 z^{n-2} + \dots + x_{2n-3},$$

$$c(z) = c(X, z) = z^n + x_0 z^{n-1} + \dots + x_{2n-2}. \quad (1.2)$$

так что $\mathcal{P}(r) = rb(r^2) + c(r^2)$; 3) матрицу Гурвица $\mathcal{X} = \mathcal{X}(X)$, столбцы которой (так же, как полиномы (1.2)) попеременно зависят от x_j с нечетными и четными индексами:

* Как и в [1], ссылки типа ^{<1>} отсылают к комментариям и примечаниям в конце статьи, знаки « » выделяют начало и конец доказательств.

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 x_1 & x_0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 x_3 & x_2 & x_1 & x_0 & 1 & 1 & \dots & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & x_3 & x_2 & x_1 & x_0 & \dots & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_3 & x_2 & \dots & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 & 0 \\
 x_{2n-3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 1 & 1 \\
 0 & x_{2n-2} & x_{2n-3} & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & x_1 & x_0 \\
 0 & 0 & 0 & x_{2n-2} & x_{2n-3} & \cdot & \dots & x_3 & x_2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{2n-2} & \dots & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & x_{2n-3} & \cdot \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_{2n-2}
 \end{array}$$

и 4) матрицу $M_n = M_n(X)$ - квадратную матрицу порядка $2n-1$, которая получается из матрицы Гурвица отбрасыванием последней строки и последнего столбца и умножением столбцов с четными номерами на -1 , так что, скажем, при $X = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ x_1 & -x_0 & 1 \\ 0 & -x_2 & x_1 \end{vmatrix}.$$

1.2. Матрица $M_n(X)$ и многочлен $P(X, X^*, z)$. Сопоставим каждой паре точек $X, X^* \in \mathbb{R}^{2n-1}$ многочлен

$$P(X, X^*, z) = b(X, z)c(X^*, z) - b(X^*, z)c(X, z), \quad (1.3)$$

так что

$$g(X, z) - g(X^*, z) = P(X, X^*, z) / c(X, z)c(X^*, z). \quad (1.4)$$

Так как старшие коэффициенты в (1.2) равны 1, то степень $P(X, X^*, z)$ не выше $2n-2$:

$$P(X, X^*, z) = P_0 z^{2n-2} + \dots + P_{2n-3} z + P_{2n-2}, \quad (1.5)$$

коэффициент P_0 в (1.5) не обязательно отличен от нуля (скажем, при $X^* = X$ все $P_j = 0$). В [1] показано, что вектор $P = (P_0, \dots, P_{2n-2})$, составленный из коэффициентов (1.5), получается применением матрицы $M_n(X)$ к вектору $X^* - X$:

$$P = M_n(X^* - X). \quad (1.6)$$

Например, при $n=2$

$$\begin{vmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ x_1 & -x_0 & 1 \\ 0 & -x_2 & x_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0^* - x_0 \\ x_1^* - x_1 \\ x_2^* - x_2 \end{vmatrix}.$$

1.3. Область устойчивости Ω_n . По определению $X \in \Omega_n$, если многочлен $\mathcal{P}(X, r)$ устойчив (т.е. все корни $\mathcal{P}(r)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} r < 0$). По теореме Рауса-Гурвица Ω_n задается полиномиальными неравенствами $H_j(X) > 0$, $1 \leq j \leq 2n$, где $H_j(X)$ - главные миноры матрицы Гурвица (они называются *определителями Гурвица* многочлена $\mathcal{P}(X, r)$). По теореме Эрмита-Билера $X \in \Omega_n$ тогда и только тогда, когда нули $-z_k$, $1 \leq k \leq n-1$ и полюса $-s_m$, $1 \leq m \leq n$ функции $g(X, z)$ отрицательны и чередуются:

$$0 < s_1 < z_1 < \dots < s_{n-1} < z_{n-1} < s_n, \quad (1.7)$$

поэтому Ω_n - область (открытое связное множество), Ω_n называется *областью устойчивости*.

З а м е ч а н и е . Отметим: если $X \in \Omega_n$, то вследствие (1.2) и (1.7) многочлены $b(X, z)$ и $c(X, z)$ положительны при $z > 0$.

1.4. Отношение $X^* \succ X$ и множество $T_n(X)$. Зафиксируем $Z > 0$ ^{<3>}. По определению X^* предшествует X :

$$X^* \succ X, \quad (1.8)$$

если $g(X^*, z) \leq g(X, z)$ при $z \in [0, Z]$. Согласно (1.4) и замечанию в п. 1.3, если $X, X^* \in \Omega_n$, то условие (1.8) эквивалентно неравенству $P(X, X^*, z) \geq 0$ при $z \in [0, Z]$:

$$X^* \succ X \text{ при } X, X^* \in \Omega_n \iff P(X, X^*, z) \geq 0 \text{ на } [0, Z]. \quad (1.9)$$

Множество точек $X^* \in \Omega_n$, предшествующих точке $X \in \Omega_n$, обозначим $T_n(X)$. В [1] дано следующее геометрическое описание $T_n(X)$.

Рассмотрим пространство коэффициентов многочленов

$$P_0 z^{2n-2} + \dots + P_{2n-3} z + P_{2n-2}, \quad P_j \in \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

Точками этого пространства являются векторы $P \in \mathbb{R}^{2n-1}$ с координатами P_0, \dots, P_{2n-2} . Неотрицательным на $[0, Z]$ многочленам соответствует конус K в пространстве коэффициентов.

При $X \in \Omega_n$ матрица $M_n = M_n(X)$ невырождена ^{<4>}, так что существует обратная матрица $(M_n)^{-1}$; $K(X)$ - это *аффинный образ конуса K* , состоящий из точек $X^* = X + (M_n)^{-1}P$, $P \in K$.

Из (1.6) и (1.9) следует доказанная в [1] теорема, дающая геометрическое описание множества $T_n(X)$:

Т е о р е м а о к о н у с а х . $T_n(X)$ есть пересечение конуса $K(X)$ с областью Ω_n .

1.5. Связность $T_n(X)$. В этой статье изучение $T_n(X)$ будет продолжено. В частности, в разд.3 будет доказана анонсированная в [1]

Т е о р е м а о с в я з н о с т и . $T_n(X)$ связно при всех n и всех $X \in \Omega_n$.

В ее доказательстве используется также анонсированная в [1]

Т е о р е м а о к о о р д и н а т а х N_j . Для любых положительных чисел $N_j, 2 \leq j \leq 2n$, существует и единственна точка $X \in \mathbb{R}^{2n-1}$, в которой $N_j(X) = N_j^{<5>}$.

Эта теорема и ее модификации будут получены в разд. 2.

1.6. Множество $\{f\}_n$. Легко проверить (см. [1]), что $X \in \Omega_n$ тогда и только тогда, когда функция $g(X, z)$ представима в виде

$$g(X, z) = a_1/(z + s_1) + \dots + a_n/(z + s_n), \quad (1.11)$$

где

$$0 < s_1 < \dots < s_n, \quad a_j > 0, \quad 1 \leq j \leq n \quad \text{и} \quad a_1 + \dots + a_n = 1. \quad (1.12)$$

Это позволяет установить важное для геофизических приложений биективное соответствие между Ω_n и множеством $\{f\}_n$ положительных, принимающих n значений, неубывающих ступенчатых функций f с фиксированным интегралом σ . Если принадлежащая $\{f\}_n$ функция $f = f(x)$, $0 < x < h$, принимает значения f_j на ступеньках длины h_j , $1 \leq j \leq n$,

$$0 < f_1 < \dots < f_n, \quad h_1 + \dots + h_n = h, \quad f_1 h_1 + \dots + f_n h_n = \sigma, \quad (1.13)$$

то соответствие $f \leftrightarrow g(X, z) \leftrightarrow X$ устанавливается с учетом равенства (1.11) формулами

$$a_j = f_j h_j / \sigma, \quad s_j = f_j^2, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (1.14)$$

1.7. Задача о максимуме h . Согласно п. 1.6 каждой точке $X \in \Omega_n$ соответствует ступенчатая функция $f \in \{f\}_n$. Иными словами, в Ω_n определены $2n$ функций $f_j = f_j(X)$, $h_j = h_j(X)$, $1 \leq j \leq n$, удовлетворяющих соотношениям (1.13). Доопределим их по непрерывности на замыкании Ω_n и положим

$$h = h(X) = h_1(X) + \dots + h_n(X), \quad X \in \bar{\Omega}_n. \quad (1.15)$$

Замыкание $T_n(X)$ назовем $\Pi_n(X)$:

$$\Pi_n(X) = \bar{T}_n(X) = K(X) \cap \bar{\Omega}_n. \quad (1.16)$$

Поиск решения с самым широким волноводом в одномерной обратной кинематической задаче приводит (с учетом ^{<1>}, ^{<6>}) к следующей задаче на максимум:

$$\text{найти } \max h(X^*), \quad X^* \in \Pi_n(X). \quad (1.17)$$

З а м е ч а н и е . Ввиду неограниченности множества $\Pi_n(X)$ точнее было бы ставить задачу о нахождении $\sup h$ на $\Pi_n(X)$; постановка задачи (1.17) оправдана тем, что (как доказано в разд. 4) h достигает максимума на ограниченном подмножестве $\Pi_n(X)$.

Задача (1.17) тривиальна при $n=1$ ^{<7>} и относительно проста при $n=2$. При $n>2$ возникают технические и принципиальные трудности,

которые отчетливо проявляются уже для $n=3$.

В этой статье задача (1.17) решена при $n=2$ и при $n=3$, некоторые утверждения доказаны для всех n , в том числе все теоремы по геометрии устойчивых многочленов, составляющие основу решения.

Перейдем к изложению результатов. Их геофизическая интерпретация дана в прил. 1 и 2.

1.8. 0 точках $\max h$. При $n=2$ к решению задачи (1.17) ведут теоремы трех уровней, постепенно уточняющие результат.

1 - й у р о в е н ь : $\max h$ достигается на границе $\partial T_2(X)$ множества $T_2(X)$.

2 - й у р о в е н ь : на границе $\partial K(X)$ конуса $K(X)$ некоторым каноническим способом выделяется отрезок $\gamma_1(X) \subset \partial T_2(X)$; утверждается, что $\max h$ достигается на $\gamma_1(X)$.

3 - й у р о в е н ь : построен алгоритм быстрого поиска такой точки $X^0 \in \gamma_1(X)$, что для всех не равных X^0 точек $X^* \in \Pi_2(X)$ выполняется строгое неравенство $h(X^0) > h(X^*)$.

Таким образом, при $n=2$ точка максимума X^0 единственна, и указан быстрый способ ее построения.

При $n \geq 3$ на первом уровне имеется полная аналогия со случаем $n=2$: в разд. 4 доказана

Первая теорема о $\max h$. При любом n и любом X в области Ω_n максимум (1.17) достигается на границе $\partial T_n(X)$.

На втором уровне столь полной аналогии уже нет. В соответствии с (1.16) граница $\partial T_n(X)$ состоит из точек $\partial \Omega_n$, отсекаемых конусом $K(X)$, и из точек $\partial K(X)$, принадлежащих Ω_n :

$$\partial T_n(X) = \partial_n^1 \cup \partial_n^2, \quad \partial_n^1 = \partial \Omega_n \cap K(X), \quad \partial_n^2 = \partial K(X) \cap \Omega_n. \quad (1.18)$$

При $n=2$ точка X^0 , в которой достигается $\max h$ на $\Pi_n(X)$, - обязательно второго типа:

$$X^0 \in \partial_n^2. \quad (1.19)$$

При $n \geq 3$ это уже не так: $\max h$ может достигаться на обеих частях границы (1.18) - и на ∂_n^2 , и на ∂_n^1 (или, - в терминах ступенчатых функций $f \in \{f\}_m$, см. ^{<6>}, - и при $m=n$, и при $m < n$). Однако отнюдь не все точки ∂_n^1 или ∂_n^2 могут служить точками $\max h$. В разд. 6 доказана

Теорема о точках $\max h$ на ∂_n^1 . Если $\max h$ на $\Pi_n(X)$ достигается в точке $Y \in \partial_n^1$, то $g(Y, 0) = g(X, 0)$.

Специфика случая $n=2$ - в том, что $g(Y, 0) < g(X, 0)$ при $Y \in \partial_n^1$, именно поэтому $\max h$ на $\Pi_2(X)$ достигается на ∂_n^2 . При $n \geq 3$ теорема о точках $\max h$ на ∂_n^1 выделяет из множества точек $Y \in \partial \Omega_n \cap \partial K(X)$ подмножество (кусочек гиперплоскости) $\{Y \mid g(Y, 0) = g(X, 0)\}$, вне которого заведомо нет точек $\max h$ на $\Pi_n(X)$, принадлежащих ∂_n^1 .

В п. 1.14 для любого $X \in \Omega_n$ некоторым каноническим способом построено ограниченное множество $\gamma_{n-1}(X)$ размерности $n-1$, принадлежащее ∂_n^2 . Правдоподобной представляется

Гипотеза о точках $\max h$ на ∂_n^2 . Если $\max h$ на $\Pi_n(X)$ достигается в точке $Y \in \partial_n^2$, то $Y \in \gamma_{n-1}(X)$.

Гипотеза проверена при $n=3$. При этом доказано, что на $\gamma_2(X)$ есть ровно одна такая точка X^0 , что $h(X^0) > h(X^*)$ для всех не равных X^0 точек $X^* \in \gamma_2(X)$. Построен алгоритм быстрого поиска такой точки X^0 .

Точные формулировки теорем и гипотез третьего уровня о точках $\max h$ на $\Pi_n(X)$ требуют более полных сведений о строении множества $\Pi_n(X)$. Эти сведения содержатся в следующих теоремах о конусе K и его границе ∂K и о расположении конусов $K(X)$ относительно Ω_n .

1.9. Конус K . Начнем с описания конуса K при $n=2$. Пусть

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0 \quad \text{и} \quad \zeta \in (0, Z). \quad (1.20)$$

Квадратный трехчлен

$$\alpha(z - \zeta)^2 + \beta z(Z - z), \quad (1.21)$$

очевидно, положителен на отрезке $[0, Z]$. По теореме Карлина-Шепли [2. С.75] верно и обратное: *любой многочлен $P_0 z^2 + P_1 z + P_2$, положительный на $[0, Z]$, можно представить в виде (1.21), причем параметры (1.20) определяются однозначно.* Иными словами, внутренность конуса K при $n=2$ находится в биективном соответствии со слоем (1.20) - прямым произведением интервала $0 < \zeta < Z$ на четверть плоскости $\alpha > 0, \beta > 0$.

При $n=3$ теорема Карлина-Шепли устанавливает (для многочленов степени $2n-2=4$) биективное соответствие внутренности конуса K и прямого произведения тетраэдра $0 < \zeta_1 < \eta < \zeta_2 < Z$ на четверть плоскости $\alpha > 0, \beta > 0$: *любой многочлен $P_0 z^4 + P_1 z^3 + P_2 z^2 + P_3 z + P_4$, положительный на $[0, Z]$, можно представить (причем однозначно) в виде*

$$\alpha(z - \zeta_1)^2(z - \zeta_2)^2 + \beta z(z - \eta)^2(Z - z).$$

Вообще любой положительный на $[0, Z]$ многочлен $P_0 z^{2k} + \dots + P_{2k}$ однозначно представляется по теореме Карлина-Шепли в виде суммы двух многочленов

$$\alpha(z - \zeta_1)^2 \dots (z - \zeta_k)^2 \quad (1.22)$$

и

$$\beta z(z - \eta_1)^2 \dots (z - \eta_{k-1})^2(Z - z) \quad (1.23)$$

с положительными коэффициентами α, β и чередующимися нулями $0 < \zeta_1 < \eta_1 < \dots < \eta_{k-1} < \zeta_k < Z$. При $k=n-1$ многочлены вида (1.22) и (1.23) образуют в пространстве коэффициентов P_0, \dots, P_{2n-2} конусы

γ' и γ размерности n и $n-1$ соответственно; конус K является выпуклой оболочкой замыканий γ и γ'

1.10. Граница ∂K . Согласно (1.21) для $P=(P_0, P_1, P_2) \in K$

$$P_0 = \alpha - \beta, \quad P_1 = \beta Z - 2\alpha\zeta, \quad P_2 = \alpha\zeta^2. \quad (1.24)$$

Из (1.24) следует, что при $n=2$ к границе ∂K относятся вершина 0 , луч γ , гладкая двумерная поверхность γ' и два куска плоских граней двугранного угла с ребром γ , гладко примыкающие к γ' . «Граница слоя (1.20) содержит отрезок $I = \{\zeta \in [0, Z], \alpha = \beta = 0\}$, "стены" (полуполосы) $\Pi = \{\zeta \in [0, Z], \alpha = 0, \beta > 0\}$ и $\Pi' = \{\zeta \in [0, Z], \alpha > 0, \beta = 0\}$, "пол" $\Pi_0 = \{\zeta = 0, \alpha > 0, \beta > 0\}$ и "потолок" $\Pi_z = \{\zeta = Z, \alpha > 0, \beta > 0\}$. При отображении (1.24) отрезок I переходит в 0 , Π и Π' - в γ и γ' , а Π_0 и Π_z - в куски плоскостей, гладко примыкающие к γ' и образующие двугранный угол с ребром γ .» Таким образом, при $n=2$ все точки $P \in \partial K$, кроме вершины 0 и точек луча γ , являются точками гладкости границы ∂K .

В общем случае к границе ∂K относятся, кроме вершины 0 , те точки $P = (P_0, \dots, P_{2n-2})$, для которых многочлен (1.10) неотрицателен на отрезке $[0, Z]$ и имеет на $[0, Z]$ хотя бы один нуль. Число ν нулей многочлена (1.10) на $[0, Z]$ принимает значения от 1 до n ^{<в>}; на конусах γ' и γ (соответственно) $\nu = n-1$ и $\nu = n$.

Легко понять ^{<в>}: если $\nu=1$ (если многочлен (1.10) имеет один нуль ξ на отрезке $[0, Z]$), то P - точка гладкости ∂K и касательная гиперплоскость $\Pi(\xi)$ к конусу K в точке P задается уравнением

$$P_0 \xi^{2n-2} + P_1 \xi^{2n-3} + \dots + P_{2n-3} \xi + P_{2n-2} = 0; \quad (1.25)$$

если $\nu > 1$ (если многочлен (1.10) имеет на $[0, Z]$ нули ξ_1, \dots, ξ_ν) то P лежит на пересечении Π_ν гиперплоскостей $\Pi(\xi_1), \dots, \Pi(\xi_\nu)$, опорных для конуса K , с уравнениями, аналогичными (1.25). Например, при $n=3$ каждая точка $P \in \gamma$ принадлежит пересечению трех, а каждая точка $P \in \gamma'$ - пересечению двух опорных гиперплоскостей.

Каждая гиперплоскость $\Pi(\xi_j)$, $1 \leq j \leq \nu$, разбивает пространство коэффициентов на два полупространства: Π_j^+ и Π_j^- ; в первом многочлены (1.10) положительны при $z = \xi_j$, во втором - отрицательны. Пересечение полупространств Π_j^+ , $1 \leq j \leq \nu$, обозначим Π^+ . Конус K , очевидно, содержится в его замыкании.

Следующее свойство точки $P \in \partial K$, $P \neq 0$ тоже почти очевидно. Соединим P отрезком прямой с произвольной точкой $Q \in \Pi^+$, тогда все точки отрезка PQ , достаточно близкие к P , принадлежат конусу K . «Если $Q \in K$, то - вследствие выпуклости конуса K - и весь отрезок $PQ \in K$. Поэтому будем считать, что $Q \notin K$. В этом случае отрицательный минимум соответствующего точке Q многочлена

$$Q_0 z^{2n-2} + \dots + Q_{2n-2}, \quad z \in [0, Z] \quad (1.26)$$

обозначим m_Q . По определению P^+ многочлен (1.26) положителен в точках $z = \xi_j$, а значит, и в некоторых окрестностях Δ_j этих точек, $1 \leq j \leq \nu$. Положительный минимум многочлена (1.10), соответствующего точке P , по отрезку OZ с выброшенными интервалами Δ_j назовем m_P . При достаточно малом $\delta > 0$ число $(1-\delta)m_P + \delta m_Q$ положительно. Следовательно, $(1-\varepsilon)P + \varepsilon Q \in K$ при любом $\varepsilon \in [0, \delta]$.

1.11. О точках максимума. Пусть на конусе K определена гладкая функция ϕ , о которой известно, что *max* ϕ достигается в точке $P \in \partial K$, $P \neq 0$. Согласно п. 1.10 точка P принадлежит пересечению Π_ν гиперплоскостей $\Pi(\xi_j)$, $1 \leq j \leq \nu \leq n$.

Л е м м а . Градиент $\nabla \phi$ в точке P ортогонален Π_ν .

«Предположим противное: пусть $\nabla \phi$ имеет ненулевую проекцию p на Π_ν . В плоскости, проходящей через $\nabla \phi$ и p , выберем точку $Q \in P^+$ так, чтобы PQ и $\nabla \phi$ составляли острый угол. В соответствии с п.1.10 на PQ найдется точка $P^* \in K$, в которой $\phi(P^*) > \phi(P)$, — вопреки предположению о том, что P — точка максимума.»

С л е д с т в и е . Градиент $\nabla \phi$ в точке P — линейная комбинация нормалей $(\xi_j^{2n-2}, \dots, \xi_j, 1)$ к гиперплоскостям $\Pi(\xi_j)$, $1 \leq j \leq \nu$.

Покажем, что дает последний результат при поиске *max* h , предварительно сформулировав две общие теоремы о расположении $K(X)$; доказательства этих теорем — в разд. 5.

1.12. О расположении $K(X)$ относительно Ω_n . Поскольку при любом $X \in \Omega_n$ конус $K(X)$ получается из K линейным невырожденным преобразованием, то граница $\partial K(X)$ обладает всеми перечисленными выше свойствами ∂K . Образы конусов γ и γ' , принадлежащие $\partial K(X)$, назовем $\gamma(X)$ и $\gamma'(X)$.

Т е о р е м а о $\gamma'(X)$. При любом n и любом $X \in \Omega_n$ замыкание конуса $\gamma'(X)$ не пересекается с границей Ω_n . Иными словами, любой луч с вершиной X , принадлежащий замыканию $\gamma'(X)$, целиком располагается внутри области Ω_n .

Т е о р е м а о $\gamma(X)$. При любом $n > 1$ и любом $X \in \Omega_n$ каждый луч с вершиной X , принадлежащий замыканию $\gamma(X)$, пересекается с замыканием Ω_n по отрезку XU , конец U отрезка XU принадлежит подпространству $x_{2n-3} = x_{2n-2} = 0$, так что $U = (y_0, \dots, y_{2n-4}, 0, 0)$, при этом координата y_{2n-4} положительна: $y_{2n-4} > 0$.

В частности, при $n=2$ луч $\gamma(X)$, выходя из Ω_2 , пересекает в точке $U = U(X)$ ось $x_0 > 0$; полуоткрытый отрезок $[XU)$ назовем $\gamma_1(X)$.

1.13. Теоремы о $\max h$ при $n=2$. Теперь, когда точно определено, что такое отрезок $\gamma_1(X)$ (см. конец п. 1.12), можно уточнить формулировку теорем второго и третьего уровня из п.1.8 о $\max h$ при $n=2$.

Вторая теорема о $\max h$ при $n=2$. При любом $X = (x_0, x_1, x_2) \in \Omega_2$ максимум h на $\Pi_2(X)$ достигается на отрезке $\gamma_1(X) = [XY]$. При этом координата y_0 точки Y на оси x_0 определяется из условия

$$g(Y, Z) = 1/(Z + y_0) = g(X, Z) = (Z + x_1)/(Z^2 + x_0 Z + x_2). \quad (1.27)$$

Таким образом,

$$y_0 = 1/g(Z) - Z = [(x_0 - x_1)Z + x_2]/(Z + x_1). \quad (1.28)$$

Геометрические и геофизические пояснения к (1.27) и доказательства второй и третьей теорем о $\max h$ при $n=2$ - в разд. 7.

Третья теорема о $\max h$ при $n=2$ дает - в соединении с (1.28) - алгоритм быстрого поиска точки $X^0 \in XY$, в которой $h(X^*)$ достигает максимума на $\Pi_2(X)$: если $x_2 \leq Z^2$, то $X^0 = X$; если же $x_2 > Z^2$, то X^0 есть точка пересечения отрезка XY с плоскостью $x_2^* = Z^2$, именно в этой (и только этой) точке отрезка XY градиент ∇h ортогонален XY .

1.14. Множества $\overset{\circ}{\gamma}_{n-1}(X)$ и $\gamma_{n-1}(X)$. Пересечение конуса $\gamma(X)$ с Ω_n обозначим $\overset{\circ}{\gamma}_{n-1}(X)$; объединение $\overset{\circ}{\gamma}_{n-1}(X)$ с точкой X назовем $\gamma_{n-1}(X)$.

Лемма. К $\overset{\circ}{\gamma}_{n-1}(X)$ относятся те и только те точки $X^* \in \Pi_n(X)$, для которых уравнение

$$g(X^*, z) = g(X, z) \quad (1.29)$$

имеет на $[0, Z]$ ровно n корней; для $X^* \in \Pi_n(X) \setminus \gamma_{n-1}(X)$ уравнение (1.29) имеет менее n корней.

« Пусть $\nu = \nu(X, X^*)$ - число нулей многочлена (1.3) на $[0, Z]$. Согласно п. 1.10 при любом $X \in \Omega_n$

$$\nu = n \text{ при } X^* \in \gamma(X) \text{ и } \nu = n-1 \text{ при } X^* \in \gamma'(X) \text{ }^{<10>}, \quad (1.30)$$

для остальных $X^* \in \Pi_n(X) \setminus \gamma_{n-1}(X)$, очевидно, $\nu \leq n-1$. Согласно формуле (1.4) ν равно числу корней уравнения (1.29) на $[0, Z]$.»

Фиксируем $X \in \overset{\circ}{\gamma}_{n-1}(X)$. Корни (1.29), упорядоченные по возрастанию, в соответствии с (1.23) назовем

$$z = \eta_j, \quad 0 \leq j \leq n-1, \quad \eta_0 = 0, \quad \eta_{n-1} = Z. \quad (1.31)$$

В частности, при $n=2$ и $X^* \in \overset{\circ}{\gamma}_1(X)$ уравнение (1.29) имеет два корня: 0 и Z (откуда следует условие (1.27)); при $n=3$ и $X^* \in \overset{\circ}{\gamma}_2(X)$ имеется три корня: 0, η и Z , так что отрезки, составляющие по теореме о $\gamma(X)$ множество $\gamma_2(X)$, естественно параметризовать числом $\eta \in (0, Z)$

и обозначать $l(X, \eta)$:

$$\gamma_2(X) = \bigcup l(X, \eta), \quad \eta \in (0, Z). \quad (1.32)$$

Аналогично в общем случае

$$\gamma_{n-1}(X) = \bigcup l(X, \eta_1, \dots, \eta_{n-2}), \quad 0 < \eta_1 < \dots < \eta_{n-2} < Z, \quad (1.33)$$

если произвольно фиксировать в (1.33) отрезок l , то при всех $X^* \in l$ уравнение (1.29) имеет, очевидно, одни и те же корни (1.31).

1.15. Теоремы о $\max h$ при $n=3$. Произвольно фиксируем $X \in \Omega_3$. Пусть $Y=Y(X)$ — точка максимума h на $\Pi_3(X)$. По первой теореме о $\max h$ (см. п. 1.8) $Y \in \partial T_3(X)$. В соответствии с (1.18) $\partial T_3(X) = \partial_3^1 \cup \partial_3^2$. Случай $Y \in \partial_3^1$ рассмотрен в разд. 6 и прил. 2. Здесь сосредоточим внимание на случае $Y \in \partial_3^2$.

Как уже отмечено в п. 1.8, верна

Вторая теорема о $\max h$ при $n=3$. Если максимум h на $\Pi_3(X)$ достигается в точке $Y \in \partial_3^2$, то $Y \in \gamma_2(X)$.

В п. 1.8 отмечено также, что при любом $X \in \Omega_3$ точка X^0 , в которой h достигает максимума на $\gamma_2(X)$, единственна. Проанализируем подробнее это утверждение. Как и при $n=2$, возможны два случая: 1) $X^0 = X$, 2) $X^0 \in \gamma_2(X)$. Во втором случае из-за единственности X^0 в (1.32) имеется ровно один отрезок $l=l(X, \eta)$, содержащий X^0 . Назовем его *особым отрезком*, а соответствующее $\eta \in (0, Z)$ — *особым значением*.

Перейдем к характеристике особых l и η .

Каждому $\eta \in (0, Z)$ сопоставим две гиперплоскости $E_1(\eta)$ и $E_2(\eta)$ в \mathbb{R}^5 , положив ^{<11>}

$$\begin{aligned} E_1(\eta) &= \{X^* = (x_0^*, x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) \mid Z^2 - x_2^* = 2\eta(x_0^* + 2Z)\}, \\ E_2(\eta) &= \{X^* = (x_0^*, x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) \mid x_4^* = \eta^2(x_0^* + 2Z)\}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Их пересечение назовем $E(\eta)$:

$$E(\eta) = \{X^* \in \mathbb{R}^5 \mid Z^2 - x_2^* = 2\eta(x_0^* + 2Z), \quad x_4^* = \eta^2(x_0^* + 2Z)\}. \quad (1.35)$$

Оказывается, *особое η характеризуется тем, что отрезок $l(X, \eta)$ пересекается с $E(\eta)$ по точке X^0 ; для неособых η пересечение $l(X, \eta)$ с $E(\eta)$ пусто*. Итак, получено описание точки X^0 , в которой $h(X^*)$ достигает максимума на $\gamma_2(X)$:

Третья теорема о $\max h$ при $n=3$. Если все отрезки $l(X, \eta)$, составляющие $\gamma_2(X)$, — неособые, т.е. если в (1.32) $l(X, \eta) \cap E(\eta) = \emptyset$ при любом $\eta \in (0, Z)$, то $X^0 = X$; если же среди отрезков (1.32) есть особый, то такой отрезок $l(X, \eta)$ — один, и он пересекает $E(\eta)$ по точке X^0 , именно в этой (и только этой) точке градиент ∇h ортогонален $\gamma_2(X)$.

Алгоритм поиска точки максимума X^0 основан на следующих свойствах точек пересечения отрезка $l(X, \eta)$ с гиперплоскостями (1.34).

1.16. О точках пересечения $l(X, \eta)$ с $E_1(\eta)$ и $E_2(\eta)$. Каждый отрезок $l(X, \eta)$ в (1.32) — это отрезок $[XY)$ с концами $X=\{x_j\}$ и $Y=Y(\eta)=\{y_j(\eta)\}$, $0 \leq j \leq 4$, причем по теореме о $\gamma(X)$ в п. 1.12 $y_3(\eta)=y_4(\eta)=0$. Положив

$$u_j = u_j(\eta) = x_j - y_j(\eta), \quad x_j(\eta, t) = y_j + u_j t, \quad 0 \leq j \leq 4, \quad (1.36)$$

параметризуем отрезок $l(X, \eta)$ с помощью параметра t :

$$l(X, \eta) = \{x_j(\eta, t), \quad 0 < t \leq 1\}. \quad (1.37)$$

Можно показать, что в (1.36) при любом $X \in \Omega_3$ для $\eta \in (0, Z)$

$$u_j > 0, \quad 0 \leq j \leq 4, \quad (1.38)$$

см. следствие из основной леммы в п. 5.3. Из (1.38) сразу следует

С в о й с т в о 1. Отрезок (1.37) пересекает гиперплоскости $E_k(\eta)$, $k=1, 2$ при $t=t_k(\eta) \in (0, 1]$ тогда и только тогда (сравним с (1.34)), когда

$$Z^2 - x_2 \leq 2\eta(x_0 + 2Z), \quad Z^2 - y_2 > 2\eta(y_0 + 2Z), \quad x_4 \geq \eta^2(x_0 + 2Z). \quad (1.39)$$

Иными словами, для функций

$$t_1(\eta) = [Z^2 - y_2 - 2\eta(y_0 + 2Z)] / (2\eta u_0 + u_2), \quad (1.40)$$

$$t_2(\eta) = \eta^2(y_0 + 2Z) / (u_4 - \eta^2 u_0)$$

неравенства (1.39) эквивалентны условию

$$0 < t_k(\eta) \leq 1, \quad k=1, 2. \quad (1.41)$$

С в о й с т в о 2. При условии (1.41)

$$t'_1(\eta) < 0, \quad t'_2(\eta) > 0. \quad (1.42)$$

« Дифференцируя (1.40) с учетом (1.36), получаем

$$(2\eta u_0 + u_2)^2 t'_1 = (2\eta y'_0 + y'_2) [Z^2 - x_2 - 2\eta(x_0 + 2Z)] - 2[u_2(y_0 + 2Z) + u_0(Z^2 - y_2)],$$

$$(u_4 - \eta^2 u_0) t'_2 / \eta = 2(y_0 + 2Z)u_4 + \eta y'_0 [x_4 - \eta^2(x_0 + 2Z)].$$

Значит, ввиду (1.38) и (1.39), свойство 2 выполняется, если

$$y'_j(\eta) > 0, \quad \eta \in (0, Z). \quad (1.43)$$

Неравенства (1.43) доказаны в разд. 8.» Из (1.42) сразу вытекает

С л е д с т в и е. При условии (1.41) графики $t_1(\eta)$ и $t_2(\eta)$ пересекаются не более чем в одной точке. Иначе говоря, среди отрезков (1.32) максимум один — особый (пересекающий $E(\eta)$, см. (1.35)); его поиск (см. п. 1.17) сводится к решению уравнения

$$t_1(\eta) = t_2(\eta) \quad (1.44)$$

1.17. Алгоритм поиска $\max h$ на $v_2(X)$. В (1.31) корни 0 и Z - простые, а корни η_j , $0 < j < n-1$ - двукратные: при $X^* \in \overset{\circ}{v}_{n-1}(X)$ они удовлетворяют и уравнению (1.29), и уравнению

$$g'(X^*, z) = g'(X, z) \quad (1.45)$$

« это доказывается дифференцированием (1.4) по z с учетом того, что при $X^* \in \overset{\circ}{v}_k$ многочлен $P(X, X^*, z)$ имеет вид (1.23), и значит, $P(X, X^*, \eta_j) = P'(X, X^*, \eta_j) = 0$ ». В частности, при $X^* \in l(X, \eta) \cap \overset{\circ}{v}_2(X)$

$$g(X^*, z) = g(X, z) \text{ в точках } z=0, \eta, Z \text{ и } g'(X^*, \eta) = g'(X, \eta). \quad (1.46)$$

Подставляя $Y = Y(\eta) = \{y_0(\eta), y_1(\eta), y_2(\eta), 0, 0\}$ вместо X^* в (1.46), получаем три линейных уравнения для определения $y_j(\eta)$, $j=0, 1, 2$.

Положив

$$d = g'(X, \eta), \quad e = g(X, Z), \quad g = g(X, \eta) \text{ и } q = d/g, \quad (1.47)$$

после несложных преобразований можем записать эти уравнения в виде системы

$$\begin{vmatrix} eZ & -1 & e \\ gn & -1 & g \\ g & q & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z - eZ^2 \\ \eta - g\eta^2 \\ 1 - (q+2g)\eta \end{vmatrix}. \quad (1.48)$$

Решая ее при $\eta \in (0, Z)$ и определяя $u_j(\eta)$ по формулам (1.36), получаем функции (1.40).

Если уравнение (1.44) на пересечении полуинтервалов (1.41) не имеет решений, то в соответствии с п. 1.15 $\max h$ на $v_2(X)$ достигается в точке X ; если же оно имеет решение η^0 , то согласно п. 1.16 это решение единственно, по построению отрезок $l(X, \eta^0)$ пересекает $E(\eta^0)$ в точке X^0 , координаты $x_j(\eta^0, t^0)$ этой точки получают постановкой в (1.36) $\eta = \eta^0$ и $t = t^0 = t_1(\eta^0) = t_2(\eta^0)$, и $\max h$ на $v_2(X)$ достигается в точке X^0 .

Описанный алгоритм реализован в виде компьютерной программы (прил. 2).

1.18. Координаты (a, s) и v_{j_n} . Множества \mathcal{R}_n . Пусть (a, s) - набор из $2n$ чисел a_j, s_j , $1 \leq j \leq n$, удовлетворяющих соотношениям (1.12); \mathcal{R}_n - множество всех таких наборов. Каждому набору $(a, s) \in \mathcal{R}_n$ сопоставим правую часть (1.11) - рациональную функцию $g(a, s, z)$ с простыми полюсами $z = -s_j$ и вычетами a_j в них.

В соответствии с (1.8) скажем, что набор (a^*, s^*) предшествует набору (a, s) , если $g^* = g(a^*, s^*, z) \leq g = g(a, s, z)$ при $0 \leq z \leq Z$:

$$(a^*, s^*) \succ (a, s), \text{ если } g^* \leq g \text{ на } [0, Z]. \quad (1.49)$$

Множество наборов $(a^*, s^*) \in \mathcal{R}_n$, предшествующих (a, s) , обозначим $T_n(a, s)$. Имеется естественное биективное соответствие между \mathcal{R}_n и

Ω_n , согласующееся с (1.8) и (1.49):

$$(a, s) \leftrightarrow X, \text{ если } g(a, s, z) = g(X, z), \quad (1.50)$$

так что $T_n(a, s)$ и $T_n(X)$ - это одно и то же множество, только заданное в разных координатах. Вследствие (1.50) при $n=2$

$$x_0 = s_1 + s_2, \quad x_1 = a_1 s_2 + a_2 s_1, \quad x_2 = s_1 s_2. \quad (1.51)$$

« Чтобы получить формулы (1.51), нужно приравнять два выражения для $g(z)$: $(z + x_1)/(z^2 + x_0 z + x_2)$ и $a_1/(z + s_1) + a_2/(z + s_2)$, учитывая, что $a_1 + a_2 = 1$.» Аналогично:

$$x_0^* = s_1^* + s_2^*, \quad x_1^* = a_1^* s_2^* + a_2^* s_1^*, \quad x_2^* = s_1^* s_2^*. \quad (1.52)$$

Формулы (1.51) и (1.52) дают явное соответствие между \mathcal{R}_2 и Ω_2 и между $T_2(a, s)$ и $T_2(X)$. Аналогом (1.51) при $n=3$ являются следующие формулы, отображающие (a, s) в X :

$$\begin{aligned} x_0 &= s_1 + s_2 + s_3, \quad x_2 = s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1, \quad x_4 = s_1 s_2 s_3, \\ x_1 &= a_1(s_2 + s_3) + a_2(s_3 + s_1) + a_3(s_1 + s_2), \quad x_3 = a_1 s_2 s_3 + a_2 s_3 s_1 + a_3 s_1 s_2. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Такие же формулы определяют при $n=3$ отображение $(a^*, s^*) \rightarrow X^*$.

По аналогичной схеме определяется отображение

$$(a, s) \rightarrow X, \quad (a^*, s^*) \rightarrow X^* \quad (1.54)$$

и в общем случае. В соответствии с (1.54) и (1.16) положим

$$\Pi_n(a, s) = \bar{T}_n(a, s) = \{(a^*, s^*) \in \bar{\mathcal{R}}_n \mid (a^*, s^*) \} (a, s)\}. \quad (1.55)$$

Согласно (1.15) и (1.14) с точностью до постоянного множителя σ

$$h = h(a, s) = a_1/\sqrt{s_1} + \dots + a_n/\sqrt{s_n}. \quad (1.56)$$

Тем самым, в координатах (a^*, s^*) задача (1.17) формулируется так:

$$\text{найти } \max h(a^*, s^*), \quad (a^*, s^*) \in \Pi_n(a, s). \quad (1.57)$$

О п р е д е л е н и е . *Прообраз множества $\gamma_{n-1}(X)$ (см. п.1.14) при отображении (1.54) назовем $\pi_{n-1}(a, s)$.*

Г и п о т е з а о т о ч к а х $\max h$ *на ∂_n^2 из п. 1.8 в терминах (1.55)-(1.57) формулируется так: если $\max h$ на $\Pi_n(a, s)$ достигается в точке $(a^0, s^0) \in \mathcal{R}_n$, то $(a^0, s^0) \in \pi_{n-1}(a, s)$.*

Для уточнения этой гипотезы вернемся к п. 1.13. Положим

$$\mathbb{M}_2 = \mathbb{M}_2(Z) = \{(a^*, s^*) \in \mathcal{R}_2 \mid \sqrt{s_1^* s_2^*} = Z\}. \quad (1.58)$$

В координатах (a, s) третью теорему о $\max h$ при $n = 2$ можно сформулировать так: *пусть (a^0, s^0) - точка максимума h на $\Pi_2(a, s)$, тогда*

1) (a^0, s^0) есть точка пересечения $\pi_1(a, s)$ с множеством $\mathbb{M}_2(Z)$, если $\sqrt{s_1 s_2} \geq Z$, и

2) $(a^0, s^0) = (a, s)$, если $\sqrt{s_1 s_2} < Z$ (во втором случае пересечение $\pi_1(a, s)$ с \mathbb{M}_2 пусто).

Чтобы определить аналог (1.58) при $n=3$, введем вспомогательные координаты v_{jn} - такие симметрические функции переменных f_j из (1.13), (1.14), что $(z+f_1) \dots (z+f_n) = z^n + v_{1n} z^{n-1} + \dots + v_{jn} z^{n-j} + \dots + v_{nn}$.

При $n=3$ для $f_j^* = \sqrt{s_j^*}$

$$v_{13}^* = f_1^* + f_2^* + f_3^*, \quad v_{23}^* = f_1^* f_2^* + f_2^* f_3^* + f_3^* f_1^*, \quad v_{33}^* = f_1^* f_2^* f_3^*. \quad (1.59)$$

Аналогом (1.58) при $n=3$ является (как показано в п.1.19) множество

$$\mathbb{M}_3 = \mathbb{M}_3(n, Z) = \{(a^*, s^*) \in \mathcal{R}_3 \mid v_{33}^*/v_{13}^* = n, \quad v_{23}^* = Z\}. \quad (1.60)$$

Прообраз отрезка $l(x, n)$ в (1.32) при отображении (1.54) назовем $\delta(\eta) = \delta(a, s, \eta)$:

$$\pi_2(a, s) = \cup \delta(a, s, \eta), \quad \eta \in (0, Z), \quad (1.61)$$

дугу $\delta(\eta)$ назовем *особой* (сравним с п. 1.15), если она пересекается с $\mathbb{M}_3(n, Z)$. В обозначениях (1.59)-(1.61) третья теорема о $\max h$ при $n=3$ формулируется следующим образом:

Т е о р е м а . Пусть (a^0, s^0) - точка максимума h на $\pi_2(a, s)$. Тогда $(a^0, s^0) = (a, s)$, если среди дуг (1.61), составляющих $\pi_2(a, s)$, нет особых, т.е. если $\delta(a, s, \eta) \cap \mathbb{M}_3(n, Z) = \emptyset$ при любом $\eta \in (0, Z)$: если же среди дуг (1.61) есть особая, то такая дуга $\delta(\eta)$ - одна, и она пересекает $\mathbb{M}_3(n, Z)$ в точке (a^0, s^0) .

Данная формулировка эквивалентна приведенной в п.1.15, поскольку множество $E(\eta)$ в (1.35) является образом $\mathbb{M}_3(n, Z)$ при отображении (1.54). « При $n=3$ отображение (1.54) задается формулами (1.53) и такими же формулами, связывающими (a^*, s^*) с X^* . С их учетом согласно (1.59) $(v_{13}^*)^2 = x_0^* + 2v_{23}^*$, $(v_{23}^*)^2 = x_2^* + 2v_{13}^* v_{33}^* = x_2^* + 2(v_{33}^*/v_{13}^*) (v_{13}^*)^2$, $(v_{33}^*)^2 = x_4^*$, так что уравнения (1.60) в координатах X^* записываются в виде (1.35): $Z^2 - x_2^* = 2\eta(x_0^* + 2Z)$, $x_4^* = \eta^2(x_0^* + 2Z)$ }.»

Попробуем теперь угадать формулы для множеств \mathbb{M}_n , $n > 3$, опираясь на (1.60) и (1.58) (условие, выделяющее \mathbb{M}_2 из \mathcal{R}_2 в формуле (1.58) перепишем - по аналогии с (1.60) - в виде $v_{22}^* = f_1^* f_2^* = Z$). На первый взгляд, естественными обобщениями \mathbb{M}_2 и \mathbb{M}_3 являются множества

$$\{(a^*, s^*) \in \mathcal{R}_4 \mid 0 < v_{44}^*/v_{24}^* = \eta_1 < v_{34}^*/v_{14}^* = \eta_2 < v_{24}^* = Z\},$$

$$\{(a^*, s^*) \in \mathcal{R}_5 \mid 0 < v_{55}^*/v_{35}^* = \eta_1 < v_{45}^*/v_{25}^* = \eta_2 < v_{35}^*/v_{15}^* = \eta_3 < v_{25}^* = Z\} \text{ и т.д.}$$

Однако более глубокий анализ заставляет отказаться от этой гипотезы и позволяет предположить, что верны другие (подтвержденные расчетами на компьютере)

Ф о р м у л ы д л я \mathbb{M}_n , $n > 3$. Выпишем две последовательности многочленов:

$$\lambda_1(z, v_1, v_3) = v_1 z + v_3, \quad \mu_1(z, v_2) = z + v_2,$$

$$\lambda_2(z, v_1, v_3, v_5) = v_1 z^2 + v_3 z + v_5, \quad \mu_2(z, v_2, v_4) = z^2 + v_2 z + v_4 \quad \text{и т.д.}$$

Общие формулы для $\lambda_k(z, v_1, v_3, \dots, v_{2k+1})$ и $\mu_k(z, v_2, \dots, v_{2k})$:

$$\lambda_k = v_1 z^k + v_3 z^{k-1} + \dots + v_{2k+1}, \quad \mu_k = z^k + v_2 z^{k-1} + \dots + v_{2k}.$$

Положим

$$m_2(z, v_2) = z \mu_1(z, v_2),$$

$$m_3(z, v_1, v_2, v_3) = z \lambda_1(z, v_1, v_3) \mu_1(z, v_2),$$

$$m_4(z, v_1, v_2, v_3, v_4) = z \lambda_1(z, v_1, v_3) \mu_2(z, v_2, v_4),$$

$$m_5(z, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = z \lambda_2(z, v_1, v_3, v_5) \mu_2(z, v_2, v_4),$$

$$m_6(z, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6) = z \lambda_2(z, v_1, v_3, v_5) \mu_3(z, v_2, v_4, v_6) \quad \text{и т.д.}$$

Согласно (1.58) и (1.60)

$$\mathbb{M}_2 = \{(a^*, s^*) \in \mathcal{R}_2 \mid m_2(-z, v_{22}^*) = 0 \text{ при } z=0, Z\},$$

$$\mathbb{M}_3(\eta) = \{(a^*, s^*) \in \mathcal{R}_3 \mid m_3(-z, v_{13}^*, v_{23}^*, v_{33}^*) = 0 \text{ при } z=0, \eta, Z\}.$$

По аналогии определим $\mathbb{M}_4 = \mathbb{M}_4(\eta_1, \eta_2)$, $\mathbb{M}_5 = \mathbb{M}_5(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ и т.д.:

$$\mathbb{M}_4 = \{(a^*, s^*) \in \mathcal{R}_4 \mid m_4(-z, v_{14}^*, v_{24}^*, v_{34}^*, v_{44}^*) = 0 \text{ при } z=0, \eta_1, \eta_2, Z\},$$

$$\mathbb{M}_5 = \{(a^*, s^*) \in \mathcal{R}_5 \mid m_5(-z, v_{15}^*, \dots, v_{55}^*) = 0 \text{ при } z=0, \eta_1, \eta_2, \eta_3, Z\} \quad \text{и т.д.}$$

З а м е ч а н и е . По теореме Эрмита-Билера для любых $f_j > 0$, $1 \leq j \leq n$, при $n=2k+1$ корни многочленов

$$\lambda_k(z, v_{1,n}, v_{3,n}, \dots, v_{2k+1,n}) \quad \text{и} \quad \mu_k(z, v_{2,n}, v_{4,n}, \dots, v_{2k,n})$$

чередуются, при $n=2k+2$ корни многочленов

$$\lambda_k(z, v_{1,n}, v_{3,n}, \dots, v_{2k+1,n}) \quad \text{и} \quad \mu_k(z, v_{2,n}, v_{4,n}, \dots, v_{2k+2,n})$$

чередуются, причем все корни отрицательны.

Поэтому, скажем, для $n=5$ корни $0 < \eta_1 < \eta_2 < \eta_3 < Z$ многочлена $m_5(-z, v_{15}^*, \dots, v_{55}^*)$ следующим образом распределяются между сомножителями: $\lambda_2=0$ при $z=-\eta_1, -\eta_3$, $z\mu_2=0$ при $z=0, -\eta_2, -Z$; для $n=6$ корни $0 < \eta_1 < \dots < \eta_4 < Z$ многочлена $m_6(-z, v_{16}^*, \dots, v_{66}^*)$ распределяются между сомножителями так: $z\lambda_2=0$ при $z=0, -\eta_2, -\eta_4$, $\mu_3=0$ при $z=-\eta_1, -\eta_3, -Z$.

Обратим внимание на три свойства множеств \mathbb{R}_k :

1. Условия на (a^*, s^*) , выделяющие из \mathbb{R}_k подмножество \mathbb{R}_k , касаются только s^* (и не касаются a^*).

2. Эти условия можно задать однородными (степени 2) функциями φ_k координат f_j^* : $\varphi_k(f_1^*, \dots, f_n^*) = \eta_k$, $k=0, \dots, n-1$, $0 = \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_{n-1} = Z$.

3. Множество $E = E(\eta_1, \dots, \eta_{k-2})$, образ \mathbb{R}_k при отображении (1.54), является линейным аффинным пространством в \mathbb{R}^{2k-1} (в подпространстве $x_0, x_2, \dots, x_{2k-2}$ множество E - прямая).

В п. 1.19 будет рассмотрена связь множеств \mathbb{R}_n с градиентами ∇h и $\nabla g(z)$, где, учитывая равенство $a_n = 1 - (a_1 + \dots + a_{n-1})$,

$$\nabla = \left\{ \partial/\partial s_1, \dots, \partial/\partial s_n, \partial/\partial a_1, \dots, \partial/\partial a_{n-1} \right\}.$$

1.19. Теоремы и гипотезы о градиентах ∇h и ∇g . Используя (1.56) и (1.11) при $n=2$, с учетом равенства $a_2 = 1 - a_1$ получаем:

$$h = a_1/\sqrt{s_1} + (1 - a_1)/\sqrt{s_2} \quad \text{и} \quad g = a_1/(z + s_1) + (1 - a_1)/(z + s_2).$$

Вычислим градиенты этих функций:

$$\begin{aligned} \nabla h &= - \left\{ \frac{a_1}{2s_1\sqrt{s_1}}, \frac{a_2}{2s_2\sqrt{s_2}}, \frac{1}{\sqrt{s_2}} - \frac{1}{\sqrt{s_1}} \right\}, \\ \nabla g(z) &= - \left\{ \frac{a_1}{(z+s_1)^2}, \frac{a_2}{(z+s_2)^2}, \frac{s_1 - s_2}{(z+s_1)(z+s_2)} \right\}. \end{aligned} \quad (1.62)$$

При $n=3$

$$\begin{aligned} \nabla h &= - \left\{ \frac{a_1}{2s_1\sqrt{s_1}}, \frac{a_2}{2s_2\sqrt{s_2}}, \frac{a_3}{2s_3\sqrt{s_3}}, \frac{1}{\sqrt{s_3}} - \frac{1}{\sqrt{s_1}}, \frac{1}{\sqrt{s_3}} - \frac{1}{\sqrt{s_2}} \right\}, \\ \nabla g(z) &= - \left\{ \frac{a_1}{(z+s_1)^2}, \frac{a_2}{(z+s_2)^2}, \frac{a_3}{(z+s_3)^2}, \frac{s_1 - s_3}{(z+s_1)(z+s_3)}, \frac{s_2 - s_3}{(z+s_2)(z+s_3)} \right\}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

В общем случае используем обозначения (1.13) и (1.14) и для любых пар j, k положим

$$h_{jk} = \frac{1}{f_j f_k (f_j + f_k)}, \quad g_{jk} = g_{jk}(z) = \frac{1}{(z+s_j)(z+s_k)}, \quad (1.64)$$

в обозначениях (1.64) градиенты ∇h и ∇g определяются формулами

$$\nabla h = - \{ a_1 h_{11}, \dots, a_n h_{nn}, (s_1 - s_n) h_{1n}, \dots, (s_{n-1} - s_n) h_{n-1, n} \},$$

$$\nabla g = \nabla g(z) = - \{ a_1 g_{11}, \dots, a_n g_{nn}, (s_1 - s_n) g_{1n}, \dots, (s_{n-1} - s_n) g_{n-1, n} \}.$$

Наряду с ∇h и $\nabla g(z)$ рассмотрим $\tilde{\nabla} h$ и $\tilde{\nabla} g(z)$, определив их формулами

$$\tilde{\nabla} h = \{h_{11}, \dots, h_{nn}, h_{1n}, \dots, h_{n-1, n}\},$$

$$\tilde{\nabla} g = \tilde{\nabla} g(z) = \{g_{11}(z), \dots, g_{nn}(z), g_{1n}(z), \dots, g_{n-1, n}(z)\}. \quad (1.65)$$

Тем самым, при $n=2$

$$\tilde{\nabla} h = \left\{ \frac{1}{2s_1\sqrt{s_1}}, \frac{1}{2s_2\sqrt{s_2}}, \frac{1}{\sqrt{s_1s_2}(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})} \right\},$$

$$\tilde{\nabla} g = \left\{ \frac{1}{(z+s_1)^2}, \frac{1}{(z+s_2)^2}, \frac{1}{(z+s_1)(z+s_2)} \right\}, \quad (1.66)$$

при $n=3$

$$\tilde{\nabla} h = \left\{ \frac{1}{2s_1\sqrt{s_1}}, \frac{1}{2s_2\sqrt{s_2}}, \frac{1}{2s_3\sqrt{s_3}}, \frac{1}{\sqrt{s_1s_3}(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_3})}, \frac{1}{\sqrt{s_2s_3}(\sqrt{s_2}+\sqrt{s_3})} \right\},$$

$$\tilde{\nabla} g = \left\{ \frac{1}{(z+s_1)^2}, \frac{1}{(z+s_2)^2}, \frac{1}{(z+s_3)^2}, \frac{1}{(z+s_1)(z+s_3)}, \frac{1}{(z+s_2)(z+s_3)} \right\}. \quad (1.67)$$

Гиперплоскость $\Pi(\xi)$, см. (1.25), в координатах X^* задается согласно (1.5) и (1.6) уравнением $P(X, X^*, \xi) = 0$. Значит, в координатах (a^*, s^*) ей соответствует - с учетом (1.4) - множество уровня $g(a^*, s^*, \xi) = g(a, s, \xi)$, а нормали $(\xi^{2n-2}, \dots, \xi, 1)$ к гиперплоскости $\Pi(\xi)$ соответствует ковектор, пропорциональный градиенту $\nabla g(\xi)$. Поэтому ортогональность ∇h пересечению Π_y гиперплоскостей $\Pi(\xi_j)$, см. п. 1.11, означает в координатах (a^*, s^*) , что ∇h является линейной комбинацией градиентов $\nabla g(\xi_j)$, $1 \leq j \leq n$.

Рассмотрим с этой точки зрения случай, когда $\max h$ на $\Pi_n(X)$ достигается в точке $X^0 \in \partial_n^2$ (или, что то же, $\max h$ на $\Pi_n(a, s)$ достигается в точке $(a^0, s^0) \in \mathfrak{R}_n$).

С л у ч а й $n = 2$. Вторая теорема о $\max h$ при $n=2$ выражает тот (доказанный в разд. 7) факт, что, каковы бы ни были $(a, s) \in \mathfrak{R}_2$ и $z \in [0, Z]$, градиенты (1.62) линейно независимы:

$$\nabla h(a, s) \text{ и } \nabla g(a, s, z) \text{ не пропорциональны.} \quad (1.68)$$

Условие (1.68) можно с учетом (1.64) - (1.66) переписать в эквивалентной форме, не содержащей a_j :

$$\tilde{\nabla} h(s) \text{ и } \tilde{\nabla} g(s, z) \text{ не пропорциональны.} \quad (1.69)$$

Как показано в разд. 7, множество \mathfrak{M}_2 выделяется из \mathfrak{R}_2 условием

$$\nabla h(a^*, s^*), \nabla g(a, s, 0) \text{ и } \nabla g(a^*, s^*, Z) \text{ компланарны,} \quad (1.70)$$

эквивалентное условие, не содержащее a_j :

$$\tilde{\nabla}h(s^*), \tilde{\nabla}g(s^*, 0) \text{ и } \tilde{\nabla}g(s^*, Z) \text{ компланарны.} \quad (1.71)$$

По третьей теореме о $\max h$ при $n=2$ для выполнения (1.71) необходимо и достаточно, чтобы s^* и Z были связаны соотношением $\sqrt{s_1^* s_2^*} = Z$ (в координатах v_{j2}^* : $v_{22}^* = Z$).

С л у ч а й $n = 3$. Приведем без доказательств (ограничившись краткими пояснениями) несколько утверждений о $\max h$ при $n=3$.

Аналог (1.68): каковы бы ни были $(a, s) \in \mathbb{R}_3$ и z, w на $[0, Z]$, $z \neq w$,

$$\nabla h(a, s), \nabla g(a, s, z) \text{ и } \nabla g(a, s, w) \text{ не компланарны.} \quad (1.72)$$

Из (1.72) следует утверждение, эквивалентное второй теореме о $\max h$ при $n=3$: *если максимум h на $\Pi_3(a, s)$ достигается в точке $(a^0, s^0) \in \mathbb{R}_3$, то $(a^0, s^0) \in \pi_2(a, s)$.*

Аналог (1.69), используемый при доказательстве (1.72):

$$\tilde{\nabla}h(s) \tilde{\nabla}g(s, z) \text{ и } \tilde{\nabla}g(s, w) \text{ не компланарны} \quad (1.73)$$

(эквивалентность условий (1.72) и (1.73) следует из сопоставления формул (1.63) и (1.67)).

Множество \mathbb{M}_3 выделяется из \mathbb{R}_3 условием, аналогичным (1.70):

$$\nabla h(a^*, s^*) \text{ линейно зависит}$$

$$\text{от } \nabla g(a, s^*, 0), \nabla g(a^*, s^*, \eta) \text{ и } \nabla g(a^*, s^*, Z), \eta \in [0, Z], \quad (1.74)$$

или эквивалентным ему условием, не содержащим a_j и аналогичным (1.71):

$$\tilde{\nabla}h(s^*) \text{ линейно зависит от } \tilde{\nabla}g(s^*, 0), \tilde{\nabla}g(s^*, \eta) \text{ и } \tilde{\nabla}g(s^*, Z), \eta \in [0, Z].$$

Элементарные (хотя и довольно длинные) вычисления приводят к выводу: $(a^*, s^*) \in \mathbb{M}_3(\eta, Z)$, тогда и только тогда, когда - в координатах (1.59) -

$$\eta = v_{33}^* / v_{13}^*, \quad Z = v_{23}^*, \quad (1.75)$$

это позволяет определить \mathbb{M}_3 формулой (1.60) и доказывает (вместе с рассуждениями в п. 1.15-1.18) третью теорему о $\max h$ при $n=3$.

З а м е ч а н и е. Из (1.75) следует, что $\eta < Z/9$.

В заключение разд.1 выскажем две гипотезы о градиентах ∇h и ∇g при $n > 3$.

Г и п о т е з а 1. *Каковы бы ни были $(a, s) \in \mathbb{R}_n$ и w_1, \dots, w_{n-1} на $[0, Z]$, градиент $\nabla h(a, s)$ не является линейной комбинацией градиентов $\nabla g(a, s, w_1), \dots, \nabla g(a, s, w_{n-1})$.*

Гипотеза 2. При $(a^*, s^*) \in \mathbb{R}_n$ и $0 = \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_{n-2} < \eta_{n-1} = Z$ градиент $\nabla h(a^*, s^*)$ является линейной комбинацией градиентов $\nabla g(a^*, s^*, \eta_j)$, $0 \leq j \leq n-1$ тогда и только тогда, когда $(a^*, s^*) \in \mathbb{M}_n$.

2. Координаты H_j , R_j , и S_j

В разд. 2 будут получены теорема о координатах H_j и ее модификации, связанные с классическими результатами Рауса и Стилтеса.

2.1. Схема Рауса. Вначале продемонстрируем на числовом примере метод быстрого вычисления определителей Гурвица H_j по схеме Рауса [3. С.444]. Пусть в (1.7) $(s_1, z_1, s_2, z_2, s_3) = (1, 2, 3, 4, 5)$, так что

$$b(X, z) = (z+2)(z+4) = z^2 + 6z + 8,$$

$$c(X, z) = (z+1)(z+3)(z+5) = z^3 + 9z^2 + 23z + 15, \quad (2.1)$$

т.е. $X = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = (9, 6, 23, 8, 15)$. Сопоставим матрице Гурвица $\mathfrak{X}(X)$ треугольную матрицу $\mathfrak{R}(X)$ (назовем ее матрицей Рауса):

$$\mathfrak{X}(X) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 23 & 6 & 9 & 1 & 1 \\ 0 & 15 & 8 & 23 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 8 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \mathfrak{R}(X) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{vmatrix}, \quad (2.2)$$

элементы $\mathfrak{R}(X)$, стоящие на диагонали и под ней, дает алгоритм, называемый схемой Рауса и основанный на следующем построении.

Пусть r_{k-1} и r_k - две строки чисел:

$$\begin{aligned} & r_{k-1,0}, r_{k-1,1}, r_{k-1,2}, \dots (r_{k-1}), \\ & r_{k,0}, r_{k,1}, r_{k,2}, \dots (r_k), \end{aligned} \quad (2.3)$$

причем $r_{k,0} \neq 0$. Положим

$$s_{k-1} = r_{k-1,0} / r_{k,0}, \quad (2.4)$$

умножим строку r_k на s_{k-1} , вычтем из строки r_{k-1} и, отбросив нулевую разность $r_{k-1,0} - s_{k-1}r_{k,0}$, сдвинем строку-результат r_{k+1} на шаг влево:

$$r_{k-1,1} - s_{k-1}r_{k,1}, r_{k-1,2} - s_{k-1}r_{k,2}, \dots (r_{k+1}),$$

иначе говоря,

$$r_{k+1,n} = r_{k-1,n+1} - s_{k-1}r_{k,n+1}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.5)$$

Алгоритм применяется к строкам r_0 и r_1 : если $r_{1,0} \neq 0$, формула (2.5) при $k = 1$ дает строку r_2 ; при $r_{2,0} \neq 0$ по r_1 и r_2 строится строка r_3 и т.д. Если $r_{k,0} = 0$, построение (2.5) заканчивается.

Чтобы получить $\mathfrak{X}(X)$, за r_0 и r_1 принимаются строки коэффициентов $c(X, z)$ и $b(X, z)$, продолженные нулями. Начальные элементы строк (2.3) обозначим R_{k-2} и R_{k-1} и перепишем (2.4):

$$S_{k-1} = R_{k-2} / R_{k-1}, \quad k \geq 1. \quad (2.6)$$

Для многочленов (2.1) схема Рауса дает

$R_{-1} = 1,$	9,	23,	15,	0,	0	(r_0)	$S_0 = 1$	
$R_0 = 1$	6	8	0	0	0	(r_1)	$S_1 = 1/3$	
$R_1 = 3$	15	15	0	0		(r_2)	$S_2 = 3$	(2.7)
$R_2 = 1$	3	0	0			(r_3)	$S_3 = 1/6$	
$R_3 = 6$	15	0				(r_4)	$S_4 = 12$	
$R_4 = 1/$	0					(r_5)	$S_5 = 1/30$	
$R_5 = 15$						(r_6)		

Числа $R_j, j \geq 0$ - диагональные элементы матрицы Рауса. Элементы под диагональю в $\mathfrak{X}(X)$ получаются, как показывает сравнение (2.2) и (2.7), транспонированием строк $r_k, k \geq 1$.

Легко понять: схема Рауса, не меняя главных миноров матрицы Гурвица $\mathfrak{X}(X)$, приводит $\mathfrak{X}(X)$ к треугольному виду $\mathfrak{X}(X)$. Поэтому для определителей Гурвица $H_j(X)$ верны простые рекуррентные формулы:

$$H_1(X) = 1, \quad H_{j+1}(X) = H_j(X)R_j, \quad j = 1, \dots, 2n-1. \quad (2.8)$$

В примере (2.2) $(H_2, H_3, H_4, H_5, H_6) = (3, 3, 18, 9, 135)$.

2.2. Обращение схемы Рауса. Перепишем (2.5):

$$r_{k-1, n+1} = r_{k+1, n} + S_{k-1} r_{k, n+1}. \quad (2.9)$$

Положив $R_{-1} = R_0 = 1$, произвольно зададим числа $R_j \neq 0, 1 \leq j \leq 2n-1$. Тем самым заданы и строки r_{2n-1}, r_{2n} (в (2.7) нижние строки r_5, r_6), а согласно (2.6) - и числа $S_j, 0 \leq j \leq 2n-1$.

По формулам (2.9) рекуррентно определяются "снизу вверх" строки $r_{2n-2}, \dots, r_1, r_0$. Первые n чисел в строке r_1 и первые $n+1$ чисел в строке r_0 интерпретируем как коэффициенты многочленов $b(X, z), c(X, z)$. Так, исходя из произвольного вектора

$$(R_1, \dots, R_{2n-1}) \in \mathbb{R}^{2n-1}, \quad R_j \neq 0, \quad 1 \leq j \leq 2n-1, \quad (2.10)$$

приходим к однозначно определенной точке X , для которой число R_0 , равное 1, и числа (2.10) являются диагональными элементами матрицы Рауса $\mathfrak{X}(X)$. В случае, если в (2.10) все $R_j > 0$, и только в этом случае $X \in \Omega_n$.

2.3. Теоремы существования и единственности. Определитель $H_1(X)$ тождественно равен 1 в \mathbb{R}^{2n-1} . Вектор-функцию, составленную из

остальных $H_j(X)$, обозначим $H(X)$:

$$H(X) = \{ H_2(X), \dots, H_{2n}(X) \}, \quad X \in \mathbb{R}^{2n-1}. \quad (2.11)$$

Вследствие (2.6) и (2.8) векторы (2.10) находятся в биективном соответствии с векторами (S_1, \dots, S_{2n-1}) , где все $S_j \neq 0$, и векторами (H_2, \dots, H_{2n}) , где все $H_j \neq 0$. Поэтому из п. 2.2 следует

Т е о р е м а с у щ е с т в о в а н и я и е д и н с т в е н н о с т и . Для любого $n > 1$ и любых $H_j \neq 0$, $2 \leq j \leq 2n$ существует ровно одна точка $X \in \mathbb{R}^{2n-1}$, такая, что $H(X) = (H_2, \dots, H_{2n})^{<12>}$.

Точно такая же теорема верна для $S_j \neq 0$, $1 \leq j \leq 2n-1$.

С л е д с т в и е (Т е о р е м а о к о о р д и н а т а х H_j). В области устойчивости Ω_n определители Гурвица $H_j(X)$, $2 \leq j \leq 2n$ можно принять за координаты. В этих координатах Ω_n описывается неравенствами $H_j > 0$, $j=2, \dots, 2n$.

То же верно для $S_j > 0$ и $R_j > 0$, $1 \leq j \leq 2n-1$.

2.4. Связь с результатами Стилтеса. Сравнивая схему Рауса с известным алгоритмом Евклида для деления многочленов, приходим к выводу: построение в п. 2.1 дает разложение функции $g(X, z) = b(X, z)/c(X, z)$ в непрерывную дробь специального вида:

$$g(X, z) = \frac{1}{S_0 z + 1} \cfrac{1}{S_1 + \cfrac{1}{S_2 z + 1}} \cfrac{1}{S_3 + \dots} \quad (2.12)$$

В примере (2.1) $g(X, z) = \frac{1}{z + 1} \cfrac{1}{\frac{1}{3} + \cfrac{1}{3z + 1}} \cfrac{1}{\frac{1}{6} + \cfrac{1}{12z + 1}} \cfrac{1}{\frac{1}{30}}$.

Дроби (2.12) исследованы Стилтесом. В частности, им доказано, что $X \in \Omega_n$ тогда и только тогда, когда в (2.12) все $S_j > 0$ [3. С.486], так что следствие в п. 2.3 можно было бы вывести и из этой классической теоремы.

Вместо многоэтажной записи (2.12) удобнее пользоваться более компактной: $g(X, z) \Leftrightarrow S_j$, $1 \leq j \leq 2n-1$, нумерацию индексов можно начинать с $j=1$, поскольку $S_0 = 1$. В разд.3 будет использовано следующее очевидное свойство непрерывных дробей (2.12). Если $X, X^* \in \Omega_n$, $g(X, z) \Leftrightarrow S_j$, $g(X^*, z) \Leftrightarrow S_j^*$, $1 \leq j \leq 2n-1$, и если $S_j^* \leq S_j$ при всех нечетных j и $S_j^* \geq S_j$ при всех четных j , то $g(X^*, z) \leq g(X, z)$ для любого $z > 0$, так что $X^* \succ X$ (механическую интерпретацию этого свойства см. в [4. С.332]).

3. Теорема о связности $T_n(X)$

В разд. 2 установлено, что в каждой из трех систем координат $\{N_j\}$, $\{R_j\}$ и $\{S_j\}$ - область Ω_n представляет собой *первый ортант* (множество, где все координаты положительны). Определим в каждом из этих ортантов отношение частичной упорядоченности, введя для отношений предшествования обозначения

$$N^* \prec N, \quad R^* \prec R, \quad S^* \prec S \quad (3.1)$$

и подразумевая под (3.1) следующее: $N^* \prec N$, если

$$N_j^* \leq N_j \text{ при } j \text{ нечетных и } N_j^* \geq N_j \text{ при } j \text{ четных, } 2 \leq j \leq 2n; \quad (3.2)$$

$$R^* \prec R, \text{ если } R_j^* \leq R_j \text{ при } j \text{ четных и } R_j^* \geq R_j \text{ при } j \text{ нечетных, } 1 \leq j \leq 2n-1;$$

$$S^* \prec S, \text{ если } S_j^* \leq S_j \text{ при } j \text{ нечетных и } S_j^* \geq S_j \text{ при } j \text{ четных, } 1 \leq j \leq 2n-1.$$

Л е м м а . Отношения (3.1) и (1.4) связаны импликациями

$$N^* \prec N \rightarrow R^* \prec R \rightarrow S^* \prec S \rightarrow X^* \prec X. \quad (3.3)$$

« Формулы (2.6), (2.8), (3.2) и заключительное утверждение в п.2.4.»

Т е о р е м а . $T_n(X)$ связно при любых n и всех $X \in \Omega_n$.

« Для любых $X', X'' \in T_n(X)$ рассмотрим соответствующие N', N'' в координатах $\{N_j\}$: $X' \leftrightarrow N' = (N'_2, \dots, N'_{2n})$, $X'' \leftrightarrow N'' = (N''_2, \dots, N''_{2n})$ и положим $N^* = (N^*_2, \dots, N^*_{2n})$, определив N^*_j как $\max(N'_j, N''_j)$ при j четных и как $\min(N'_j, N''_j)$ при j нечетных. Соединим N' и N'' двузвенной ломаной $N'N^*N''$ и рассмотрим соответствующую кривую $X'X^*X''$. Согласно (3.2) все точки звена $N'N^*$ предшествуют N' и все точки звена N^*N'' предшествуют N'' . Поэтому, вследствие (3.3), каждая точка дуги $X'X^*$ предшествует X' и каждая точка дуги X^*X'' предшествует X'' . По условию $X' \prec X$, $X'' \prec X$. Значит, все точки кривой $X'X^*X''$ предшествуют точке X , т.е. $X'X^*X'' \subset T_n(X)$. »^{<13>}

З а м е ч а н и е . Вместо координат $\{N_j\}$ можно было бы использовать в доказательстве координаты $\{R_j\}$ или $\{S_j\}$.

4. Первая теорема о максимуме h

4.1. Подготовительная теорема А. *Max h на $\Pi_n(X)$ не может достигаться во внутренней точке $\Pi_n(X)$.*

Проведем доказательство теоремы при $n=3$ (в общем случае доказательство совершенно аналогично). 1-й шаг - *каноническое разбиение области Ω_3 на треугольники* (при $n=2$ это было бы разбиение Ω_2 на отрезки, при $n=4$ - разбиение Ω_4 на тетраэдры и т.д.). Согласно (1.53) каждую точку $X_0 \in \Omega_3$ можно однозначно отнести к треугольнику $\Delta(s_1, s_2, s_3)$ - треугольнику с вершинами

$$X_{100}, X_{010} \text{ и } X_{001}, \quad (4.1)$$

где индексы - это значения, принимаемые в (1.53) коэффициентами a_1, a_2 и a_3 . Во всем треугольнике $\Delta(s_1, s_2, s_3)$ координаты x_j с четными j - одни и те же, а x_1 и x_3 меняются с изменением a_j ($a_j > 0, a_1 + a_2 + a_3 = 1$); скажем, при $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$ точка X_0 - центр тяжести $\Delta(s_1, s_2, s_3)$. Функция $h = a_1/\sqrt{s_1} + a_2/\sqrt{s_2} + a_3/\sqrt{s_3}$ принимает в вершинах (4.1) значения $1/\sqrt{s_1}, 1/\sqrt{s_2}$ и $1/\sqrt{s_3}$ и линейна в треугольнике $\Delta(s_1, s_2, s_3)$, так что линии уровня $h = u, 1/\sqrt{s_3} < u < 1/\sqrt{s_1}$, - это параллельные отрезки.

2-й шаг - собственно доказательство, методом от противного: допустим, что при некотором $X \in \Omega_3$

$$\max h(X^*), X^* \in \Pi_3(X) \quad (4.2)$$

достигается во внутренней точке $X_0 \in T_3(X)$; пусть $\Delta = \Delta(s_1, s_2, s_3)$ - треугольник канонического разбиения Ω_3 , содержащий X_0 , а U - его пересечение с $T_3(X)$:

$$U = T_3(X) \cap \Delta = K(X) \cap \Delta; \quad (4.3)$$

тогда тем более

$$h(X_0) \geq \max h(X^*), X^* \in U, \quad (4.4)$$

поскольку согласно (4.3) максимум в (4.4) берется по меньшему множеству, чем в (4.2); при этом X_0 - внутренняя точка U , что, однако, очевидно, невозможно из-за линейности h в Δ .

4.2. Подготовительная теорема В. *Максимум h на $\Pi_n(X)$ достигается на некотором ограниченном подмножестве $\Pi_n(X)$.*

При $n=2$ в разд. 7 будет получена более точная теорема (третья теорема о $\max h$, сформулированная в п. 1.13). Воспользуемся ею, чтобы доказать теорему В для $n=3$ (при $n>3$ доказательство совершенно аналогично).

Произвольно фиксируем точку $X \in \Omega_3$. Пусть $\Delta(s_1^0, s_2^0, s_3^0)$ - треугольник канонического разбиения Ω_3 , содержащий X . Положим

$$\bar{h} = h(X), \quad \bar{g} = g(X, 0), \quad S = \max\{s_3^0, (3/\bar{h})^2, (3\bar{g}Z/\bar{h})^2\} \quad (4.5)$$

Отнесем к $T_3(X, S)$ точки $X^* \in \Pi_3(X)$, принадлежащие замыканиям тех треугольников $\Delta(s_1^*, s_2^*, s_3^*)$, для которых $s_3^* \leq S$ и докажем, что $\max h$ на $\Pi_3(X)$ достигается на $T_3(X, S)$.

Л е м м а. *Пусть функция h принимает в точке $X_0 \in T_3(X)$ значение*

$$h_0 = a_1/\sqrt{s_1} + a_2/\sqrt{s_2} + a_3/\sqrt{s_3} \geq \bar{h}, \quad (4.6)$$

и пусть

$$s_1 s_3 \leq s_2 s_3 \leq Z^2. \quad (4.7)$$

Тогда $s_3 \leq S$, т.е. $X_0 \in T_3(X, S)$. « По определению $T_3(X)$

$$g_0 = g(X_0, 0) = a_1/s_1 + a_2/s_2 + a_3/s_3 \leq \bar{g}. \quad (4.8)$$

Согласно (4.6) $a_j/\sqrt{s_j} \geq \bar{h}/3$ хотя бы при одном из значений $j=1, 2, 3$. Если $1/\sqrt{s_3} \geq a_3/\sqrt{s_3} \geq \bar{h}/3$, то $s_3 \leq (3/\bar{h})^2 \leq S$. Если же $a_3/\sqrt{s_3} < \bar{h}/3$, положим

$$a = a_1, \quad s = s_1 \quad \text{при} \quad a_1/\sqrt{s_1} \geq \bar{h}/3,$$

либо

$$a = a_2, \quad s = s_2 \quad \text{при} \quad a_1/\sqrt{s_1} < \bar{h}/3 < a_2/\sqrt{s_2}.$$

Тем самым. $\bar{h}/3 \leq a/\sqrt{s}$. Вследствие (4.8) $a/s \leq \bar{g}$ и $\bar{h}\sqrt{s}/3 \leq a \leq \bar{g}s$, т.е. $(\bar{h}/3\bar{g})^2 \leq s$. Так как согласно (4.7) $ss_3 \leq Z^2$, то $s_3 \leq (3\bar{g}Z/\bar{h})^2 \leq S$.»

Т е о р е м а. Пусть X^0 - точка максимума h на $T_3(X, S)$. Тогда $h(X_0) < h(X^0)$ для любой точки $X_0 \in T_3(X)$, лежащей вне $T_3(X, S)$. « Допустим, что в некоторой точке $X_0 \in T_3(X)$, лежащей вне $T_3(X, S)$, функция h принимает значение

$$h_0 = a_1/\sqrt{s_1} + a_2/\sqrt{s_2} + a_3/\sqrt{s_3} \geq h^0 = h(X^0). \quad (4.9)$$

Так как согласно (4.5) $s_3^0 \leq S$, то $X \in T_3(X, S)$ и, значит, $h^0 \geq \bar{h}$, т.е. выполняется (4.6) и по лемме

$$s_2 s_3 > Z^2. \quad (4.10)$$

Пусть при этом для определенности $s_1 s_3 \leq Z^2$ (случай $s_1 s_3 > Z^2$ рассматривается аналогично). Фиксируем значения a_1 и s_1 , положим $b_j = a_j/(a_2 + a_3)$, $j=2, 3$ и применим третью теорему о $\max h$ при $n=2$ к функциям $b_2/\sqrt{s_2} + b_3/\sqrt{s_3}$ и $b_2/(z+s_2) + b_3/(z+s_3)$, $z \in [0, Z]$. Согласно этой теореме и (4.10) найдется точка $X^* \in T_3(X_0)$, в которой h принимает значение

$$h(X^*) = a_1/\sqrt{s_1} + a_2^*/\sqrt{s_2^*} + a_3^*/\sqrt{s_3^*} > h_0, \quad (4.11)$$

причем $s_2^* s_3^* = Z^2$, так что применима лемма. По лемме $X^* \in T_3(X, S)$, т.е. $h(X^*) \leq h^0$ вопреки (4.9) и (4.11).»

С л е д с т в и е . Пусть X^0 - точка $\max h$ на $T_3(X, S)$. Тогда $h(X_0) \leq h(X^0)$ для любой точки $X_0 \in \Pi_3(X)$, лежащей вне $T_3(X, S)$, т.е. максимум h на $\Pi_3(X)$ достигается на ограниченном подмножестве $T_3(X, S) \cap \Pi_3(X)$.

Подготовительная теорема В доказана. Из теорем А и В следует

П е р в а я т е о р е м а о м а к с и м у м е h . При всех n и всех $X \in \Omega_n$ максимум (1.17) достигается на $\partial T_n(X)$.

5. Теоремы о конусах $\gamma'(X)$ и $\gamma(X)$

Напомним в п. 5.1 и 5.2 нужные для доказательств факты из [1].

5.1. Граница $\partial\Omega_n$. Как ведут себя нули и полюса $g(X, z)$ при выходе точки $X \in \Omega_n$ на границу $\partial\Omega_n$? В (1.7) либо s_1 обращается в 0 (при этом и $x_{2n-2} = s_1 \dots s_n$ обращается в 0), либо соседние нуль и полюс $g(X, z)$ сливаются. Поэтому

1) граница $\partial\Omega_n$ естественно разбивается на две части: кусок гиперплоскости $x_{2n-2} = 0$ и Γ_n - границу Ω_n в полупространстве $x_{2n-2} > 0$ ^{<14>}.

2) при любом $k \geq 1$ возникает отображение Γ_{k+1} на $F_k = \Omega_k + \Gamma_k$ (F_k - замыкание Ω_k в полупространстве $x_{2k-2} > 0$); прообразом точки $Y = (y_0, \dots, y_{2k-2}) \in F_k$ является принадлежащая Γ_{k+1} полупрямая $\bar{Y} = \bar{Y}(t)$, $t > 0$:

$$\begin{aligned} \bar{Y} = \bar{Y}(t) &= (\bar{y}_0(t), \dots, \bar{y}_{2k-2}(t), \bar{y}_{2k-1}(t), \bar{y}_{2k}(t)) = \\ &= (y_0, \dots, y_{2k-2}, 0, 0) + t(1, 1, y_0, \dots, y_{2k-2}), \end{aligned} \quad (5.1)$$

уравнение которой строится в соответствии с равенством дробей

$$\frac{z^k + \bar{y}_1 z^{k-1} + \dots + \bar{y}_{2k-1}}{z^{k+1} + \bar{y}_0 z^k + \dots + \bar{y}_{2k-2} z + \bar{y}_{2k}} = \frac{z^{k-1} + y_1 z^{k-2} + \dots + y_{2k-3}}{z^k + y_0 z^{k-1} + \dots + y_{2k-2}} \frac{z+t}{z+t}. \quad (5.2)$$

Множество точек $\bar{Y}(t)$ в (5.1) при $t = 0$ ("стык" Γ_{k+1} и гиперплоскости $x_{2k} = 0$) естественно отождествляется с F_k : точке $Y = (y_0, \dots, y_{2k-2}) \in F_k$ соответствует вершина $(y_0, \dots, y_{2k-2}, 0, 0)$ луча (5.1).

5.2. Многочлен $P(X, X^*, z)$. Используя обозначение (1.3), положим

$$P(z) = P(X, X^*, z) = b(X, z)c(X^*, z) - b(X^*, z)c(X, z). \quad (5.3)$$

Вектор P , составленный из коэффициентов $P(z)$, получается применением матрицы $M_n = M_n(X)$ из п. 1.1 к вектору $X^* - X$:

$$P = M_n(X^* - X), \quad (5.4)$$

теорема о конусах в п. 1.4 выражает эквивалентность условия $X^* \in X$ при $X \in \Omega_n$, $X^* \in \bar{\Omega}_n$ неравенству

$$P(X, X^*, z) \geq 0 \quad \text{при } z \in [0, Z]. \quad (5.5)$$

Вследствие (5.4) для точек X , X^* и X^{**} , лежащих на одной прямой,

$$P(X, X^*, z) \text{ и } P(X, X^{**}, z) \text{ пропорциональны.} \quad (5.6)$$

5.3. Основная лемма. Пусть $X, X^* \in \Omega_n$ и пусть прямая XX^* пересекает Γ_n . Тогда многочлен $P(X, X^*, z)$ имеет отрицательный корень z .

« Если XX^* пересекает Γ_n в точке \bar{Y} , то равенство (5.2) при $k = n-1$ выполняется для некоторого $t > 0$, так что $b(\bar{Y}, z)$ и $c(\bar{Y}, z)$ имеют общий корень $z = -t < 0$. Подставляя в (5.3) $X^* = \bar{Y}$, получаем: $P(X, \bar{Y}, -t) = 0$, и остается использовать (5.6) при $X^{**} = \bar{Y}$. »

С л е д с т в и е . Если $X \in \Omega_n$ и луч XX^* принадлежит замыканию $\gamma(X) \cup \gamma'(X)$, то прямая XX^* а) не пересекает Γ_n , б) пересекает гиперплоскость $x_{2n-2} = 0$.

« Согласно (1.22) и (1.23) при $k = n-1$ для $X^* \in \gamma(X) \cup \gamma'(X)$ все корни многочлена $P(X, X^*, z)$ лежат на отрезке $[0, Z]$ и, значит, неотрицательны. То же верно, разумеется, и для точек X^* из замыкания $\gamma(X) \cup \gamma'(X)$. Следовательно, — по основной лемме — прямая XX^* не пересекает Γ_n . Лежать целиком в области Ω_n (расположенной в первом ортанте) она не может и, значит, пересекает $\partial\Omega_n$. Но (в соответствии с п. 5.1) $\partial\Omega_n$ состоит из Γ_n и куска гиперплоскости $x_{2n-2} = 0$. Следовательно, прямая XX^* пересекает эту гиперплоскость. »

5.4. Теорема о конусе $\gamma'(X)$. Согласно (1.22) при $k = n-1$ для $X^* \in \gamma'(X)$ все корни $P(X, X^*, z)$ положительны, так что прямая XX^* пересекает гиперплоскость $x_{2n-2} = 0$ в точке $Y = (y_0, \dots, y_{2n-3}, y_{2n-2})$ с координатами

$$y_{2n-2} = 0, \quad y_{2n-3} > 0 \quad (5.7)$$

« в альтернативном варианте $y_{2n-3} = 0$ точка Y принадлежит замыканию Γ_n , и по основной лемме из п. 5.3 многочлен $P(X, Y, z)$ имеет корень $z = 0$: но тогда — вследствие (5.6) при $X^{**} = Y$ — и $P(X, X^*, 0) = 0$. »

Согласно (5.5) и (5.6) при $X^{**} = Y$ либо

$$P(X, Y, z) \geq 0 \quad \text{при } z \in [0, Z] \quad (5.8)$$

(если X^* и Y лежат по одну сторону от X), либо

$$P(X, Y, z) \leq 0 \quad \text{при } z \in [0, Z] \quad (5.9)$$

(если X^* и Y лежат по разные стороны от X). Вследствие (5.7), с учетом (1.2) и (5.3) при $X^* = Y$, $P(X, Y, 0) = -y_{2n-3}x_{2n-2} < 0$, так что выполнение (5.8) невозможно. Значит, выполняется (5.9), и точки X^* и Y лежат по разные стороны от X . Но по следствию из основной леммы (п. 5.3) Y — единственная точка пересечения прямой XX^* с границей Ω_n . Следовательно, луч XX^* не пересекает $\partial\Omega_n$.

Если X^* принадлежит замыканию $\gamma'(X)$, то по следствию из основной леммы прямая XX^* не пересекает Γ_n и пересекает гиперплоскость $x_{2n-2} = 0$. В точке пересечения Y по непрерывности выполняется (5.9). Значит, и в этом случае луч XX^* не пересекает $\partial\Omega_n$.

Итак, теорема о $\gamma'(X)$ доказана: при любом n и любом $X \in \Omega_n$ замыкание конуса $\gamma'(X)$ не пересекается с $\partial\Omega_n$.

5.5. Теорема о конусе $\gamma(X)$. Пусть $X \in \Omega_n$ и пусть X^* принадлежит замыканию $\bar{\gamma}(X)$ конуса $\gamma(X)$. Согласно п. 5.3 прямая XX^* не пересекает Γ_n и пересекает гиперплоскость $x_{2n-2} = 0$ в точке $Y = Y(X^*)$. Априори возможны три случая:

- 1) точка $Y(X^*)$ всегда принадлежит лучу XX^* ,
- 2) точка $Y(X^*)$ никогда не принадлежит лучу XX^* ,
- 3) для некоторых $X^* \in \bar{\gamma}(X)$ точка $Y(X^*)$ принадлежит лучу XX^* , а для некоторых — не принадлежит.

В действительности второй и третий случаи невозможны.

« В третьем случае для некоторых $Y = Y(X^*)$ выполняется неравенство (5.8), а для некоторых — неравенство (5.9); значит, найдется точка $X^* \in \bar{\gamma}(X)$, для которой при $Y = Y(X^*)$ многочлен $P(X, Y, z)$ тождественно равен нулю, что, очевидно, невозможно (поскольку $X \neq Y$).

Во втором случае и замыкание $\gamma'(X)$, и замыкание $\gamma(X)$ не пересекаются с гиперплоскостью $x_{2n-2} = 0$, а значит, и конус $K(X)$, являющийся (согласно последнему предложению в п. 1.9) их выпуклой оболочкой, не пересекается с гиперплоскостью $x_{2n-2} = 0$. На самом деле это не так: при достаточно больших $y_0 > 0$ точка $Y = (y_0) \in \Omega_1$, очевидно, предшествует X : следовательно, и отождествленная с Y (в конце п. 5.1) точка $\bar{Y} = (y_0, 0, \dots, 0) \in \partial\Omega_n$ предшествует X , так что $K(X)$ содержит луч $X\bar{Y}$, пересекающий гиперплоскость $x_{2n-2} = 0$ ».

Таким образом, для всех $X^* \in \bar{\gamma}(X)$ точка $Y = Y(X^*)$ принадлежит лучу XX^* и, тем самым, луч XX^* пересекается с замыканием Ω_n по отрезку XU . Отсюда, в частности, следует: пересечение конуса $\gamma(X)$ с областью Ω_n связно. Рассуждая как в п. 5.4, получаем: конец Y отрезка XU принадлежит подпространству $x_{2n-3} = x_{2n-2} = 0$ « в альтернативном случае (5.7) выполняется неравенство (5.9) — вопреки условию (1.23) при $k = n-1$ ». Итак, $Y = (y_0, \dots, y_{2n-4}, 0, 0)$, и остается доказать, что $y_{2n-4} > 0$. При $n=2$ это неравенство следует из (1.28). При $n \geq 3$ выделим его в виде леммы, которую докажем в п. 5.6, а в заключение п. 5.5 отметим одно следствие, вытекающее из доказанных выше утверждений (оно понадобится в разд. 6): при любом $X \in \Omega_n$ часть границы $\partial\Omega_n$, отсекаемая конусом $K(X)$, принадлежит замыканию Γ_n :

$$\partial\Omega_n \cap K(X) \subset \bar{\Gamma}_n. \quad (5.10)$$

5.6. Лемма о положительности y_{2n-4} . При любом $n \geq 3$ и любом $X \in \Omega_n$ координата y_{2n-4} точки $Y = (y_0, \dots, y_{2n-4}, 0, 0)$, в которой произвольный луч $XU \in \bar{\gamma}(X)$ пересекает $\partial\Omega_n$, положительна:

$$y_{2n-4} > 0. \quad (5.11)$$

Начнем со случая $n=3$, когда $Y = (y_0, y_1, y_2, 0, 0)$. Допустим, что для некоторого $X \in \Omega_3$ и некоторого луча $XY \in \bar{v}(X)$ $y_2=0$, и приведем это допущение к противоречию. Доказательство проведем в два шага.

1-й шаг. Если $y_2 = 0$, то и $y_1 = 0$. Вследствие (5.3) при $X^* = Y = (y_0, y_1, 0, 0, 0)$ отношение $P(z)/z$ при $z=0$ равняется $-x_4 y_1$, т.е. отрицательно при $y_1 > 0$ вопреки формуле (1.23) для $k=2$, по которой

$$P(z) = P(X, Y, z) = \beta z(z-\eta)^2(Z-z). \quad (5.12)$$

2-й шаг. Равенство $y_1 = y_2 = 0$ противоречит теореме Эрмита-Билера. Если $Y = (y_0, 0, 0, 0, 0)$, $XY \in \bar{v}(X)$, то в (5.12) $\eta=0$ и

$$P(z)/z^2 = \beta z(Z-z). \quad (5.13)$$

В рассматриваемом случае условие $Y \in X$ означает: при $z \in [0, Z]$

$$g(Y, z) = \frac{1}{z+y_0} \leq \frac{(z+z_1)(z+z_2)}{(z+s_1)(z+s_2)(z+s_3)} = g(X, z), \quad (5.14)$$

где по теореме Эрмита-Билера (см. п. 1.3)

$$0 < s_1 < z_1 < s_2 < z_2 < s_3. \quad (5.15)$$

Докажем, что формулы (5.13), (5.14) и (5.15) противоречат друг другу.

Положим $y_0 = s_1^*$. $Q^* = (z+z_1)(z+z_2)(z+s_1^*)$, $Q = (z+s_1)(z+s_2)(z+s_3)$ и перепишем (5.13) и (5.14) в виде $Q^* - Q = q = P(z)/z^2 = \beta z(Z-z)$, или

$$Q^* = Q + q. \quad (5.16)$$

так как $\beta > 0$, многочлен q отрицателен при $z < 0$. Вследствие (5.16) и формулы для Q это означает, что Q^* не имеет корней на отрезке $[-s_2, -s_1]$. С учетом формулы для Q^* это противоречит (5.15). Полученное противоречие доказывает лемму при $n=3$.

При $n > 3$ доказательство аналогично. На 1-м шаге задача сводится к рассмотрению неравенства

$$\frac{(z+z_1^*) \dots (z+z_{m-1}^*)}{(z+s_1^*) \dots (z+s_m^*)} \leq \frac{(z+z_1) \dots (z+z_{n-1})}{(z+s_1) \dots (z+s_n)} \quad \text{на } [0, Z], \quad (5.17)$$

где в отличие от случая (5.11) m не равно, а строго меньше $n-1$:

$$m < n - 1. \quad (5.18)$$

З а м е ч а н и е. При $m=1$ левая часть (5.17) равна $1/(z+s_1^*)$.

На 2-м шаге (5.17) сводится к (5.16), где

$$Q^* = (z+z_1^*) \dots (z+z_{n-1}^*) (z+s_1^*) \dots (z+s_m^*),$$

$$Q = (z+z_1^*) \dots (z+z_{m-1}^*) (z+s_1) \dots (z+s_n) \quad (5.19)$$

а q сохраняет знак при $z < 0$ (поскольку вследствие условия $XU \in \bar{\gamma}(X)$ все корни $P(X, Y, z)$ лежат на $[0, Z]$).

Заключительное рассуждение: вследствие (5.18) найдется хотя бы один отрезок вида

$$-s_j \leq z \leq -s_k, \quad (5.20)$$

на котором $Q \geq 0$, и хотя бы один отрезок такого же вида, на котором $Q \leq 0$, на одном из них (в зависимости от знака q при $z < 0$) многочлен Q^* не имеет корней вопреки (1.7).

Проведем это рассуждение подробнее. Начнем со случая, когда в (5.19) нет кратных корней. Тогда вследствие (5.18) число корней Q больше $2m$, отрицательные минимумы и положительные максимумы Q чередуются, и тех, и других - не меньше m , а точек z_t^* - всего $m-1$, значит, в (5.20) $k=j+1$.

Пусть теперь в (5.19) r кратных корней: $m-1 = p+r$, p точек z_t^* - простые корни Q , а r точек z_t^* совпадают с некоторыми s_j и являются, следовательно, двукратными корнями Q . Тогда число i перемен знака Q не меньше $2p+3$ ($i = p+n-r = n+m-1-2r > 2m-2r = 2p+2$), так что имеется минимум $p+1$ отрезков с концами в простых нулях Q , где $Q \geq 0$, и минимум $p+1$ таких же отрезков, где $Q \leq 0$. Поскольку простых нулей Q вида z_t^* - всего p , лемма доказана.

Вместе с леммой доказана и теорема о $\gamma(X)$.

5.7. Теорема о $\gamma(X)$ и стратификация Γ_n . Согласно [1] любой точке Γ_n соответствует ступенчатая функция $f \in \{f\}_m$, $m < n$. Это дает стратификацию Γ_n :

$$\Gamma_n = \bigcup_{1 \leq m < n} \Gamma_{nm} \quad \langle 15 \rangle \quad (5.21)$$

Размерность страта $\Gamma_{n, n-1}$ равна размерности Γ_n : $\dim \Gamma_{n, n-1} = 2n-2$, при отображении $\Gamma_{n, n-1} \rightarrow \{f\}_{n-1}$ прообразом каждой точки $f \in \{f\}_{n-1}$ является луч (5.1) при $k=n-1$ с вершиной

$$Y = (Y_0, \dots, Y_{2n-4}, 0, 0), \quad Y_{2n-4} > 0. \quad (5.22)$$

По теореме о $\gamma(X)$ любой луч $XU \in \gamma(X)$ пересекает $\partial \Omega_n$ в точке вида (5.22), принадлежащей $\bar{\Gamma}_{n, n-1}$.

Для произвольного страта в (5.21) $\dim \Gamma_{nm} = n+m-1$, и при отображении $\Gamma_{nm} \rightarrow \{f\}_m$ каждая функция f_0 , принимающая m значений, имеет

прообраз размерности $n-m$. В каждой точке Y этого прообраза

$$g(Y, z) \equiv g(Y_0, z), \quad h(Y) = h(Y_0), \quad \text{где } Y_0 \in \Omega_m, \quad Y_0 \neq f_0 \in \{f\}_m. \quad (5.23)$$

6. Теорема о точках $\max h$ на ∂_n^1

Пусть $\max h$ на $\Pi_n(X)$, см. (1.16)–(1.18), достигается в точке $Y \in \partial_n^1 = \partial\Omega_n \cap K(X)$. Докажем, что тогда

$$g(Y, 0) = g(X, 0). \quad (6.1)$$

Так как $Y \in \Pi_n(X)$, то $g(Y, 0) \leq g(X, 0)$. Допустим, что вопреки утверждению (6.1)

$$g(Y, 0) < g(X, 0). \quad (6.2)$$

Вследствие (5.10) $Y \in \bar{\Gamma}_n$. Значит, согласно (5.23), найдутся $m < n$ и такая точка $Y_0 = (y_0, \dots, y_{2m-2}) \in \Omega_m$, что $g(Y, z) \equiv g(Y_0, z)$. В частности, $g(Y, 0) = g(Y_0, 0) = y_{2m-3}/y_{2m-2}$, так что (6.2) можно переписать в виде

$$y_{2m-2} x_{2n-3} - y_{2m-3} x_{2n-2} > 0. \quad (6.3)$$

Далее будут рассмотрены два случая: $m=n-1$ и $m < n-1$. В обоих случаях понадобятся следующие две леммы.

Л е м м а 1. Произвольно фиксируем индекс $k \geq 1$, точку $Y_0 = (y_0, \dots, y_{2k-2}) \in \Omega_k$, любые $u_j \in \mathbb{R}$, $0 \leq j \leq 2k-2$ и такие $u_{2k-1}, u_{2k} > 0$, что $y_{2k-2} u_{2k-1} - y_{2k-3} u_{2k} > 0$ (при $k=1$ считаем $y_{-1}=1$). Положим $y_{2k-1} = y_{2k} = 0$, $Y = (y_0, \dots, y_{2k})$, $U = (u_0, \dots, u_{2k})$, $X(t) = Y + Ut$. Тогда $X(t) \in \Omega_{k+1}$ при всех достаточно малых $t > 0$.

Лемма 1 следует из теоремы Рауса-Гурвица (см. п. 1.3) и легко проверяемых соотношений $H_j(X(t)) = H_j(Y) + o(1)$, $j \leq 2k$, $H_{2k+1}(X(t)) = t(y_{2k-2} u_{2k-1} - y_{2k-3} u_{2k}) H_{2k-1}(Y) + o(t)$, $H_{2k+2}(X(t)) = H_{2k+1}(X(t)) u_{2k} t$.

При малых $t > 0$ в условиях леммы 1 перейдем от координат $x_j(t)$ на луче $X(t)$ к координатам $a_j(t)$, $s_j(t)$ (см. п. 1.6):

$$a_j(t) > 0, \quad a_1(t) + \dots + a_{k+1}(t) = 1, \quad 0 < s_1(t) < \dots < s_{k+1}(t) \quad (6.4)$$

и в соответствии с (1.14), (1.15) положим (опуская постоянный множитель σ) $h(t) = a_1(t)/\sqrt{s_1(t)} + \dots + a_{k+1}(t)/\sqrt{s_{k+1}(t)}$.

Л е м м а 2. На луче $X(t)$ в окрестности вершины Y функция $h(t)$ растет как $C\sqrt{t}$, $C > 0$.

«Достаточно убедиться в том, что функции $a_1(t)$ и $s_1(t)$ обращаются в нуль при $t=0$, а их производные $\dot{a}_1(t)$, $\dot{s}_1(t)$ и функции $s_j(t)$, $j > 1$ положительны при $t=0$. Тогда $a_1(t) = \dot{a}_1(0)t + o(t)$, $s_1(t) = \dot{s}_1(0)t + o(t)$, сумма $a_2(t)/\sqrt{s_2(t)} + \dots + a_{k+1}(t)/\sqrt{s_{k+1}(t)}$ имеет конечную производную при $t=0$, и $h(t) \approx C\sqrt{t}$, где $C = \dot{a}_1(0)/\sqrt{\dot{s}_1(0)}$.

Для определенности проведем доказательство при $k=2$. Используем

формулы, связывающие координаты x_j с координатами a_j и s_j :

$$\begin{aligned} x_0 &= s_1 + s_2 + s_3, & x_2 &= s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1, & x_4 &= s_1 s_2 s_3, \\ x_1 &= a_1 (s_2 + s_3) + a_2 (s_3 + s_1) + a_3 (s_1 + s_2), & x_3 &= a_1 s_2 s_3 + a_2 s_3 s_1 + a_3 s_1 s_2. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Переходя к пределу при $t \rightarrow 0$ в (6.4) видим: $0 \leq s_1(0) \leq s_2(0) \leq s_3(0)$. Так как $s_1(0)s_2(0)s_3(0) = x_4(0) = y_4 = 0$, то $s_1(0) = 0$. При этом $y_2 = x_2(0) = s_2(0)s_3(0) > 0$, т.е. $s_j(0) > 0$, $j=2,3$. Так как $a_1(0)s_2(0)s_3(0) = x_3(0) = y_3 = 0$, то $a_1(0) = 0$. Далее $\dot{s}_1(0)s_2(0)s_3(0) = \dot{x}_4(0) = u_4$, так что $\dot{s}_1(0) = u_4/y_2 > 0$. Наконец, $y_1 = x_1(0) = a_2(0)s_3(0) + a_3(0)s_2(0)$, значит, $\dot{x}_3(0) = u_3 = \dot{a}_1(0)y_2 + \dot{s}_1(0)y_1$ и $\dot{a}_1(0) = [u_3 - \dot{s}_1(0)y_1]/y_2 = (y_2 u_3 - y_1 u_4)/y_2^2 > 0$.

В общем случае доказательство совершенно аналогично.»

С л у ч а й $m=n-1$. Положим $k=m$, $Y = (y_0, \dots, y_{2k-2}, 0, 0)$, $u_j = x_j - y_j$, $0 \leq j \leq 2k$ (так что $u_{2k-1} = x_{2n-3}$, $u_{2k} = x_{2n-2}$). Вследствие (6.3) применимы леммы 1, 2. По ним Y не является точкой $\max h$ на $\Pi_n(X)$. Полученное противоречие опровергает (6.2) и доказывает (6.1).

С л у ч а й $m < n-1$. Для ясности рассмотрим конкретные числовые значения: $m=2$, $n=4$. Тогда $X = (x_0, \dots, x_5, x_6)$, $Y_0 = (y_0, y_1, y_2)$ и согласно (6.3)

$$y_2 x_5 - y_1 x_6 > 0. \quad (6.6)$$

Положим $Y = (y_0, y_1, y_2, 0, 0, 0, 0)$ и рассмотрим точку $Y^* = (y_0^*, \dots, y_4^*, 0, 0)$ для которой $P(X, Y^*, z) = \beta z^5 (Z-z)$, $\beta > 0$, так что $X Y^* \in \bar{v}(X)$ и

$$g(Y^*, 0) = g(X, 0) \quad (6.7)$$

« $g(X, z) - g(Y^*, z) = \beta z^5 (Z-z) / [c(X, z)c(Y^*z)] = 0$ при $z=0$ ». Согласно (6.7) $y_3^*/y_4^* = x_5/x_6$, т.е. с учетом (6.6)

$$y_2 y_3^* - y_1 y_4^* > 0. \quad (6.8)$$

Положим $U = \{u_j\} = Y^* - Y$, так что $u_3 = y_3^*$, $u_4 = y_4^*$. По теореме о конусе $v(X)$ $u_4 > 0$, согласно (6.8) $y_2 u_3 - y_1 u_4 > 0$, значит, к Y_0 применимы леммы 1 и 2 (при $k=2$). По ним на отрезке $Y Y^*$ найдется точка $X^* = (x_0^*, \dots, x_4^*, 0, 0)$, в которой $h(X^*) > h(Y)$. При этом $X_0^* = (x_0^*, \dots, x_4^*) \in \Omega_3$, так что $X^* \in \partial \Omega_4$. Так как $Y \succ X$, $Y^* \succ X$, то (из-за выпуклости $K(X)$) и $X^* \succ X$, т.е. $X^* \in P_4(X)$. Итак, Y не является точкой $\max h$ вопреки условию.

В общем случае (при $m < n-1$) доказательство получается индукцией по $n-m$. Таким образом, если $\max h$ на $\Pi_n(X)$ достигается в точке $Y \in \partial_n^1$, то $g(Y, 0) = g(X, 0)$. Пример, показывающий, что $\max h$ на $\Pi_n(X)$ действительно может достигаться на ∂_n^1 , приведен в прил. 2.

7. Теоремы о $\max h$ при $n = 2$

7.1. О границе Γ_2 и точке $Y = \omega(X)$. Рассмотрим границу Γ_2 - ту часть $\partial\Omega_2$, которая расположена в полупространстве $x_2 > 0$. Это ^{<16>} - кусок гиперболического параболоида $x_2 = (x_0 - x_1)x_1$ - линейчатая поверхность, составленная из лучей

$$X(t) = (x_0(t), x_1(t), x_2(t)) = (y_0, 0, 0) + t(1, 1, y_0), \quad t > 0 \quad <17> \quad (7.1)$$

с вершинами

$$Y = (y_0, 0, 0) \Leftrightarrow y_0 \in \Omega_1 = F_1. \quad (7.2)$$

Согласно (5.2) при $k = 1$ функция $g(X(t), z)$ постоянна по t на каждом из лучей (7.1) при любом фиксированном z . Функция h , продолженная по непрерывности на Γ_2 , тоже постоянна на каждом таком луче. « Это утверждение сразу следует из (7.1) и (7.4), см. п.7.3; следующее геофизическое пояснение делает его очевидным. Любой точке луча (7.1) сопоставим (в согласии с п. 1.6 и ^{<15>}) одну и ту же функцию $f \in \{f\}_1$ (а именно - функцию, отвечающую y_0 в биективном соответствии $\Omega_1 \Leftrightarrow \{f\}_1$). Подробнее об этом соответствии говорится в [1]. Его геофизический смысл: каждая точка луча (7.1) изображает одну и ту же скоростную функцию в одномерной обратной кинематической задаче - с волноводом, описываемым функцией f ^{<18>}. Поэтому луч (7.1) - линия уровня h . »

О т о б р а ж е н и е $\omega: X \rightarrow Y$. Каждой точке $X = (x_0, x_1, x_2) \in \bar{\Omega}_2$ сопоставим точку $Y = \omega(X)$ вида (7.2) - конец $\gamma_1(X)$ (см. п. 1.12); так как $g(Y, z)$ монотонно убывает с ростом y_0 « $g = 1/(z + y_0)$ », то $Y = \omega(X)$ - самая левая из точек оси x_0 , предшествующих X ; положение точки Y на оси x_0 в зависимости от X и Z дает формула (1.28).

7.2. Множество $D = D(X, Z)$. К прямой XZ , $Y = \omega(X)$ примыкают (как к ребру двугранного угла) две плоских грани: одна проходит через ось x_0 , вторая - назовем ее $\Gamma(X, Z)$ - через луч (7.1) с вершиной Y . Пересечение двугранного угла, заключенного между этими гранями, с замыканием $\bar{\Omega}_2$ назовем $D = D(X, Z)$. Нетрудно проверить: точка $X^* \in \Omega_2$ содержится в $D(X, Z)$ тогда и только тогда, когда $g(X^*, z) \leq g(X, z)$ при $z=0$ и $z=Z$, и лежит на гранях двугранного угла, когда $g(X^*, 0) = g(X, 0)$ и $g(X^*, Z) = g(X, Z)$ соответственно (второе равенство выполняется при $X^* \in \Gamma(X, Z)$, см. лемму 2 в п.7.3). Пересечение $T_2(X)$ конуса $K(X)$ с областью Ω_2 содержится в D и отраживается от остальной части D конусом $\bar{\gamma}'(X)$; так как $\bar{\gamma}'(X)$ не пересекается с $\partial\Omega_2$ (см. п.5.4. $n = 2$), то $\partial_2^1 = \partial\Omega_2 \cap K(X) = \partial\Omega_2 \cap D$.

Линии уровня h на $\partial\Omega_2 \cap D$ - замкнутые лучи (7.1). С ростом $y_0 > 0$ функция h , очевидно, убывает « $h = 1/\sqrt{y_0}$ ». Поэтому луч (7.1) с вер-

шиной $Y = \omega(X)$ состоит из точек максимума h на ∂_2^1 : в частности, Y является точкой $\max h$ на ∂_2^1 :

$$h(Y) = \max h(X^*), \quad X^* \in \partial_2^1 = \partial\Omega_2 \cap K(X) = \partial\Omega_2 \cap D. \quad (7.3)$$

7.3. Максимум h на D . Найдя $\max h$ на $D(X, Z)$, в качестве следствия получим теоремы о $\max h$ на $\Pi_2(X)$.

Л е м м а 1. В координатах x_0, x_1, x_2 с точностью до множителя σ

$$h = (1+x_1/r) / \sqrt{x_0+2r}, \quad \text{где } r = \sqrt{x_2}. \quad (7.4)$$

« Согласно (1.56) при $n = 2$ с учетом (1.51) $hr = a_1\sqrt{s_2} + a_2\sqrt{s_1}$, $x_0+2r = (\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2})^2$, так что $hr\sqrt{x_0+2r} = (a_1+a_2)\sqrt{s_1s_2} + a_1s_2 + a_2s_1 = r+x_1$. »

Согласно (7.4) при произвольно фиксированных $x_1, x_2 > 0$ функция h монотонно убывает как функция x_0 , $x_0 > 0$.

С л е д с т в и е. Если $\max h$ на $D(X, Z)$ достигается в точке X^0 , то $X^0 \in \Pi(X, Z)$, где

$$\Pi(X, Z) = \Gamma(X, Z) \cap \bar{\Omega}_2. \quad (7.5)$$

Л е м м а 2. $\Pi(X, Z)$ является прообразом Y при отображении $\omega: X \rightarrow Y$. « При любом фиксированном y_0 формула (1.28) является уравнением плоскости. Так как лучи YX и (7.1), очевидно, ей принадлежат, это - плоскость $\Gamma(X, Z)$. Поскольку отображение ω в п. 7.1 определено на $\bar{\Omega}_2$, то прообраз Y - множество (7.5). »

С л е д с т в и е. Каждая точка $X^* = (x_0^*, x_1^*, x_2^*) \in \Pi(X, Z)$, $X^* \neq Y$, связана с Y формулой, аналогичной (1.28):

$$y_0 = [(x_0^* - x_1^*)Z + x_2^*] / (Z + x_1^*). \quad (7.6)$$

Множество $\Pi(X, Z)$ является объединением лучей $L = YX^*$, $X^* \in \Pi(X, Z)$, $X^* \neq Y$.

Л е м м а 3. На каждом луче $L \subset \Pi(X, Z)$, кроме (7.1), h растет вдоль L в окрестности Y . « Это следует из лемм 1, 2 в разд. 6 и из формулы (7.6), согласно которой эти леммы применимы: $u_1 = x_1^* > 0$, $u_2 = x_2^* > 0$, $y_0 u_1 - u_2 = y_0 x_1^* - x_2^* = Z[x_1^*(x_0^* - x_1^*) - x_2^*] / (Z + x_1^*) > 0$. Последнее неравенство выполняется, ибо $x_1^*(x_0^* - x_1^*) - x_2^*$ - это определитель Гурвица $H_3(X^*)$, положительный при всех $X^* \in \Omega_2$. Для X^* на луче (7.1) $H_3(X^*) = 0$ в согласии с тем, что (7.1) - линия уровня $h = h(X)$. »

Положим (сравним с (7.5))

$$\hat{\Pi}(X, Z) = \Gamma(X, Z) \cap \Omega_2. \quad (7.7)$$

С учетом следствия из леммы 1, формулы (7.3) и леммы 3 доказана

Л е м м а 4. Если $\max h$ на $D(X, Z)$ достигается в точке X^0 , то

$$x^0 \in \mathring{\Pi}(X, Z).$$

На каждом луче

$$L = YX^*, \quad X^* \in \mathring{\Pi}(X, Z), \quad X^* \neq Y \quad (7.8)$$

отметим точку

$$\mathring{X}(L) = (\mathring{x}_0, \mathring{x}_1, \mathring{x}_2 = Z^2). \quad (7.9)$$

Реализовав в последующих п.7.4, 7.5 план, намеченный в п. 1.19 для случая $n=2$ (см. формулы (1.68)-(1.71)) убедимся в том, что (с учетом леммы 3) верна

Л е м м а 5. Вдоль каждого луча L в (7.8) функция h монотонно возрастает на участке от Y до $\mathring{X}(L)$, а затем монотонно убывает, так что $\max h$ на L достигается в точке (7.9).

Одновременно будет доказана

Т е о р е м а о $\max h$ на $D(X, Z)$. Максимум $h(X^*)$ на $D(X, Z)$ достигается на пересечении прямой XY , $Y = \omega(X)$ с плоскостью $x_2^* = Z^2$.

7.4. Линейная независимость градиентов ∇h и $\nabla g(z)$. Условие пропорциональности $\tilde{\nabla} h(s)$ и $\tilde{\nabla} g(s, z)$ в (1.66) - коллинеарность

$$\{s_2\sqrt{s_2}, s_1\sqrt{s_1}, 2s_1s_2/(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})\} \text{ и} \quad (7.10)$$

$$\{(z+s_2)^2, (z+s_1)^2, (z+s_1)(z+s_2)\} \quad <19>$$

Коллинеарность (7.10) эквивалентна обращению в нуль определителей

$$\begin{vmatrix} s_2\sqrt{s_2} & , & 2s_1s_2/(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}) \\ (z+s_2)^2 & , & (z+s_1)(z+s_2) \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} s_1\sqrt{s_1} & , & 2s_1s_2/(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}) \\ (z+s_1)^2 & , & (z+s_1)(z+s_2) \end{vmatrix}. \quad (7.11)$$

С точностью до ненулевых множителей определители (7.11) равны соответственно

$$\begin{vmatrix} \sqrt{s_1s_2}+s_2 & , & 2s_1 \\ z+s_2 & , & z+s_1 \end{vmatrix} = (\sqrt{s_1s_2}+s_2-2s_1)z - s_1s_2 + s_1\sqrt{s_1s_2} =$$

$$= (\sqrt{s_2}-\sqrt{s_1})[(2\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})z - s_1\sqrt{s_2}]$$

и

$$\begin{vmatrix} \sqrt{s_1s_2}+s_1 & , & 2s_2 \\ z+s_1 & , & z+s_2 \end{vmatrix} = (\sqrt{s_1}-\sqrt{s_2})[(2\sqrt{s_2}+\sqrt{s_1})z - s_2\sqrt{s_1}],$$

т.е. оба они равны нулю только при $s_1 = s_2$ (а для $(a, s) \in \mathcal{R}_2$, согласно (1.12), $0 < s_1 < s_2$).

В ы в о д. Для $(a, s) \in \mathcal{R}_2$, утверждение (1.69) и эквивалентное ему утверждение (1.68) доказаны. Тем самым, $\max h$ на $D(X, Z)$ не может достигаться ни в одной внутренней точке множества (7.7). Соответственно $\max h$ на $\Pi_2(X)$ не может достигаться ни в одной точке гладкости $\partial T_2(X)$ внутри Ω_2 .

7.5. Условие компланарности ∇h , $\nabla g(0)$ и $\nabla g(Z)$. Согласно (1.66) и (7.10) для выполнения условия (1.71) или эквивалентного ему условия (1.70) при $(a^*, s^*) = (a, s)$ необходимо и достаточно, чтобы (a, s) и Z были связаны соотношением

$$\begin{vmatrix} Z + 2s_2 & s_2^2 & s_2\sqrt{s_2} \\ Z + 2s_1 & s_1^2 & s_1\sqrt{s_1} \\ Z + s_1 + s_2 & s_1s_2 & 2s_1s_2/(\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2}) \end{vmatrix} = 0. \quad (7.12)$$

Уравнение (7.12) линейно по Z . Проверим, что $Z = \sqrt{s_1s_2}$ - его корень. Вычислим определитель в левой части (7.12) при $Z = \sqrt{s_1s_2}$:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{s_2}(\sqrt{s_1} + 2\sqrt{s_2}), & s_2^2, & s_2\sqrt{s_2} \\ \sqrt{s_1}(\sqrt{s_2} + 2\sqrt{s_1}), & s_1^2, & s_1\sqrt{s_1} \\ s_1 + \sqrt{s_1s_2} + s_2, & s_1s_2, & 2s_1s_2/(\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2}) \end{vmatrix} =$$

$$= \sqrt{s_1s_2} \begin{vmatrix} \sqrt{s_1} + 2\sqrt{s_2} & s_2\sqrt{s_2} & s_2 \\ \sqrt{s_2} + 2\sqrt{s_1} & s_1\sqrt{s_1} & s_1 \\ s_1 + \sqrt{s_1s_2} + s_2 & s_1s_2 & 2s_1s_2/(\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2}) \end{vmatrix}.$$

Последний определитель равен 0, так как его третья строка равна сумме первой строки, умноженной на $s_1/(\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2})$, и второй строки, умноженной на $s_2/(\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2})$.

Итак, в согласии с (1.58) для компланарности $\nabla h(a^*, s^*)$, $\nabla g(a^*, s^*, 0)$ и $\nabla g(a^*, s^*, Z)$ необходимо и достаточно, чтобы $\sqrt{s_1^*s_2^*} = Z$ (или $x_2^* = Z^2$).

С л е д с т в и е. Градиент ∇h ортогонален лучу (7.8) в точке (7.9) и только в этой точке.

Отсюда и из леммы 3 следует лемма 5, сформулированная в конце п.7.3. Леммы 4, 5 и вывод в конце п.7.4 приводят к завершающей п.7.3 теореме о $\max h$ на $D(X, Z)$. А вместе с ней, очевидно, доказаны и сформулированные в п.1.13 теоремы о $\max h$ на $\Pi_2(X)$.

8. Теорема о положительности производных $y'_j(\eta)$

8.1. Две формулы для $y'_1(\eta)$. Из (1.48) следуют формулы

$$y'_1 = e(y'_0 z + y'_2), \quad (8.1)$$

$$y'_1 = g(y'_0 \eta + y'_2). \quad (8.2)$$

«Согласно (1.48)

$$ezy_0 - y_1 + ey_2 = z - z^2e, \quad (8.3)$$

$$g = g(\eta) = (\eta + y_1) / (\eta^2 + y_0 \eta + y_2), \quad (8.4)$$

$$q = q(\eta) = [1 - g(2\eta + y_0)] / (\eta + y_1). \quad (8.5)$$

Формула (8.1) получается дифференцированием тождества (8.3) по η .
Вследствие (8.4)

$$d = g'(\eta) = \frac{1 + y'_1 - g(2\eta + y_0 + y'_0 \eta + y'_2)}{\eta^2 + y_0 \eta + y_2} = \frac{1 + y'_1 - g(2\eta + y_0) - g(y'_0 \eta + y'_2)}{\eta + y_1} g,$$

так что

$$q = d/g = \{[1 - g(2\eta + y_0)] + y'_1 - g(y'_0 \eta + y'_2)\} / (\eta + y_1). \quad (8.6)$$

Сравнивая (8.5) и (8.6), приходим к (8.2).»

8.2. Следствие. При каждом фиксированном $\eta \in (0, Z)$ производные $y'_j(\eta)$, $j=0, 1, 2$ имеют один и тот же знак.

«Согласно (8.1) и (8.2)

$$(g - e)y'_2 = (ze - ng)y'_0 \quad (8.7)$$

Вследствие (1.11) и (1.12) коэффициенты при производных в равенстве (8.7) положительны, так как

$$g - e = (z - \eta) \sum \frac{a_j}{(z + s_j)(\eta + s_j)}, \quad ze - ng = (z - \eta) \sum \frac{a_j s_j}{(z + s_j)(\eta + s_j)}.$$

Отсюда и из (8.1) следует: производные $y'_j(\eta)$ либо все положительны, либо все отрицательны, либо все равны нулю.»

8.3. Лемма. Ни при каком $\eta \in (0, Z)$, производные $y'_j(\eta)$, $j=0, 1, 2$ не обращаются в нуль (так что с учетом п.8.2 либо все $y'_j(\eta) > 0$, либо все $y'_j(\eta) < 0$ на всем интервале $0 < \eta < Z$).

Произвольно фиксируем число $\eta \in (0, Z)$ и точку X^* на отрезке $l(X, \eta)$ в (1.32). $l(X, \eta) = [XY]$, $Y = Y(\eta) = \{y_0(\eta), y_1(\eta), y_2(\eta), 0, 0\}$. Наряду с использованным в п.8.2 разложением (1.11) для $g(X, z)$ рассмотрим такое же разложение для $g(X^*, z)$:

$$g(X, z) = \sum a_j / (z + s_j), \quad g(X^*, z) = \sum a_j^* / (z + s_j^*). \quad (8.8)$$

Устремим X^* к Y по отрезку $[XY]$. Согласно разд.6 (см. доказательство леммы 2) $a_1^* \rightarrow 0$, $s_1^* \rightarrow 0$ при $X^* \rightarrow Y$. Пределы a_j^* , s_j^* , $j > 1$ при $X^* \rightarrow Y$ обозначим $\alpha_{j-1} = \alpha_{j-1}(\eta)$ и $\sigma_{j-1} = \sigma_{j-1}(\eta)$ соответственно. Из анализа (6.5) следует, что

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_1 \alpha_2 > 0, \quad 0 < \sigma_1 < \sigma_2,$$

$$g(Y, z) = (z + y_1) / (z^2 + y_0 + y_2) = \alpha_1 (z + \sigma_1) + \alpha_2 / (z + \sigma_2). \quad (8.9)$$

В обозначениях (1.47) вследствие (8.8)

$$e = \sum a_j / (Z + s_j) = \sum \alpha_j / (Z + \sigma_j), \quad (8.10)$$

$$g = \sum a_j / (\eta + s_j) = \sum \alpha_j / (\eta + \sigma_j). \quad (8.11)$$

$$-d = \sum a_j / (\eta + s_j)^2 = \sum \alpha_j / (\eta + \sigma_j)^2 \quad (8.12)$$

Для второй производной $g''(\eta)$ получаем:

$$g''(\eta) = \sum \frac{2a_j}{(\eta + s_j)^3} = \sum \left\{ \frac{2\alpha_j [1 + \sigma'_j(\eta)]}{[\eta + \sigma_j(\eta)]^3} - \frac{\alpha'_j(\eta)}{[\eta + \sigma_j(\eta)]^2} \right\}$$

т.е.

$$2 \sum \left[\frac{a_j}{(\eta + s_j)^3} - \frac{\alpha_j}{(\eta + \sigma_j)^3} \right] = \sum \left[\frac{2\alpha_j \sigma'_j}{(\eta + \sigma_j)^3} - \frac{\alpha'_j}{(\eta + \sigma_j)^2} \right]. \quad (8.13)$$

Докажем, что левая часть (8.13) положительна на $(0, Z)$, а правая равна нулю при $z = \eta$, если все $y'_j(\eta) = 0$.

« 1. Положим $\rho(z) = g(X, z) - g(X^*, z)$ и вычислим $\rho''(z)$ двумя способами. Согласно (8.8)

$$\rho''(z) = 2 \sum \left[\frac{a_j}{(z + s_j)^3} - \frac{a_j^*}{(z + s_j^*)^3} \right].$$

Согласно (1.4) $\rho(z) = P(z)/Q(z)$, где $P(z) = P(X, X^*, z)$, $Q(z) = c(X, z)c(X^*, z)$. Значит, $\rho' = P'/Q - \rho Q'/Q$, $\rho'' = P''/Q + \dots$, где точками обозначено выражение, равное нулю при $z = \eta$, поскольку $P(\eta) = P'(\eta) = 0$ (вспомним, что согласно (1.23) $P = \beta z(z - \eta)^2(Z - z)$, где $\beta = \beta(X^*) > 0$). Таким образом, $\rho''(\eta) = 2\beta\eta(Z - \eta)/Q(\eta)$. При $X^* \rightarrow Y$ множитель $2\beta/Q \rightarrow \mu(\eta) > 0$. Итак, левая часть (8.13) больше $\mu\eta(Z - \eta) > 0$.

2. Вследствие (8.9)

$\alpha'_1 + \alpha'_2 = 0$, $y'_0 = \sigma'_1 + \sigma'_2$, $y'_2 = \sigma'_1 \sigma_2 + \sigma'_2 \sigma_1$, $y'_1 = \alpha_1 \sigma'_1 + \alpha_2 \sigma'_2 + \alpha'_1 \sigma_1 + \alpha'_2 \sigma_2$. Значит, правая часть (8.13) обращается в нуль, если все $y'_j = 0$. »

Лемма о знаковостоянстве производных y'_j доказана.

8.4. Теорема. Все $y'_j(\eta) > 0$ при любом $\eta \in (0, Z)$.

Дифференцируя (8.10) и (8.11) по η , получаем:

$$\sum \alpha'_j / (Z + \sigma_j) = \sum \alpha_j \sigma'_j / (Z + \sigma_j)^2, \quad (8.14)$$

$$\sum \alpha'_j / (\eta + \sigma_j) - \sum \alpha_j (1 + \sigma'_j) / (\eta + \sigma_j)^2 = g'. \quad (8.15)$$

Поскольку $g' = d$, из (8.15) и (8.12) следует, что

$$\sum \alpha'_j / (\eta + \sigma_j) = \sum \alpha_j \sigma'_j / (\eta + \sigma_j)^2. \quad (8.16)$$

Для упрощения вычислений положим $\alpha'_1 = \alpha'$ (так что $\alpha'_2 = -\alpha'$), $\beta_j = \alpha_j \sigma'_j$, $\eta + \sigma_j = \lambda_j$, $Z + \sigma_j = \lambda_j + \delta$ (где $\delta = Z - \eta$) и перепишем (8.14) и (8.16), умножив их сначала на $(\lambda_1 + \delta)(\lambda_2 + \delta)$ и на $\lambda_1 \lambda_2$ соответственно:

$$\alpha'(\sigma_2 - \sigma_1) = \frac{\beta_1(\lambda_2 + \delta)}{\lambda_1 + \delta} + \frac{\beta_2(\lambda_1 + \delta)}{\lambda_2 + \delta}, \quad (8.17)$$

$$\alpha'(\sigma_2 - \sigma_1) = \frac{\beta_1 \lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\beta_2 \lambda_1}{\lambda_2}, \quad (8.18)$$

Сравнение (8.17) и (8.18) дает:

$$\beta_1 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{\lambda_2 + \delta}{\lambda_1 + \delta} \right) = \beta_2 \left(\frac{\lambda_1 + \delta}{\lambda_2 + \delta} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right).$$

или

$$\beta_1 / [\lambda_1(\lambda_1 + \delta)] = \beta_2 / [\lambda_2(\lambda_2 + \delta)]. \quad (8.19)$$

Полагая $\beta_j / [\lambda_j(\lambda_j + \delta)] = \kappa$, $\sigma_2 - \sigma_1 = \lambda_2 - \lambda_1 = \omega$, получаем

$$\beta_j = \kappa \lambda_j (\lambda_j + \delta), \quad j=1, 2, \quad \alpha' \omega = \kappa [(\lambda_1 + \delta)\lambda_2 + (\lambda_2 + \delta)\lambda_1]. \quad (8.20)$$

Тем самым, с учетом формул в конце п.8.3 остается проверить, что $\kappa > 0$. Докажем это неравенство.

«Согласно п.8.3 выражение (8.13) положительно. В новых обозначениях это дает:

$$\sum 2\beta_j / \lambda_j^3 > \alpha' (1/\lambda_1^2 - 1/\lambda_2^2) = \alpha' (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) / \lambda_1^2 \lambda_2^2 = \alpha' \omega (\lambda_1 + \lambda_2) / \lambda_1^2 \lambda_2^2.$$

т.е. согласно (8.20)

$$2\kappa \left(\frac{\lambda_1 + \delta}{\lambda_1^2} + \frac{\lambda_2 + \delta}{\lambda_2^2} \right) > \kappa \frac{2\lambda_1 \lambda_2 + \delta(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} (\lambda_1 + \lambda_2). \quad (8.21)$$

Легко проверить, что разность коэффициентов при κ в левой и правой частях (8.21) положительна (так как $\delta = Z - \eta > 0$ и $\lambda_2 - \lambda_1 = \sigma_2 - \sigma_1 > 0$). Значит, $\kappa > 0$.»

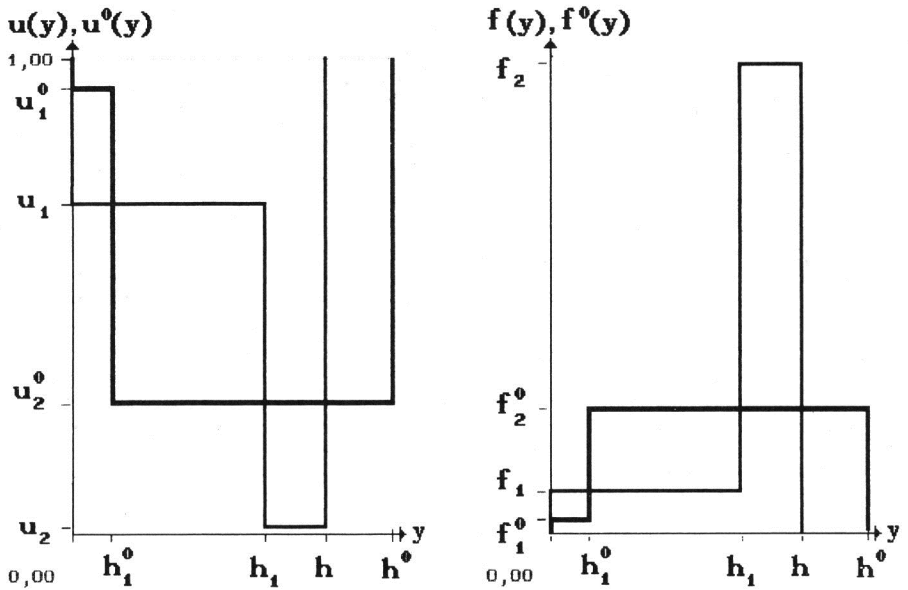
Приложение 1. Об отношении h^0/h

Графики скоростных функций $u(y)$ и $u^0(y)$ в волноводах ширины h и h^0 и графики соответствующих им согласно ^{<1>} ступенчатых функций f и $f^0 \in \{f\}_2$ (рис.1) начерчены с помощью специальной компьютерной программы, в которой для определенности положено $Z = \sigma = 1$. По построению $f^0 \succ f$, причем $h^0 = \max h(f^*)$, $f^* \in \Pi_2(f)$. Тем самым $u^0(y)$ обладает следующими свойствами:

1. Произвольным образом продолжим $u(y)$ на всю полуось $y > 0$ до скоростной функции $\underline{u}(y)$ с одним волноводом. Тогда $u^0(y)$ однозначно продолжается до скоростной функции $\underline{u}^0(y)$, $y > 0$ с тем же годографом, что у функции $\underline{u}(y)$.

2. Для любой ступенчатой функции $u^*(y)$ на отрезке длины $h^* \geq h^0$, принимающей два значения и не равноизмеримой с $u^0(y)$, можно так продолжить $u(y)$ на полуось $y > 0$ до скоростной функции $\underline{u}(y)$, чтобы $u^*(y)$ не допускала продолжения до скоростной функции $\underline{u}^*(y)$, $y > 0$ с тем же годографом, что у функции $\underline{u}(y)$.

В этом смысле $u^0(y)$ - *самый широкий волновод*. Отношение h^0/h его ширины h^0 к ширине h волновода $u(y)$ в рассматриваемом примере приблизительно равно 1,273.



Р и с. 1. $u^0(y)$ - самый широкий волновод: $h^0 = \max h(f^*)$, $f^* \in \Pi_2(f)$

В общем случае подбором $u(y)$ отношение h^0/h можно сделать как угодно большим. « Рассмотрим соответствия

$$u(y) \ni f \ni X \in \Omega_2, \quad u^0(y) \ni f^0 \ni X^0 \in \gamma_1(X) = [XY], \quad Y = (y, 0, 0).$$

Пусть для определенности $Z=1$. Рассмотрим луч

$$YX = \{x_0(t), x_1(t), x_2(t)\} = \{y+At, Bt, t\},$$

X^0 - точка его пересечения с плоскостью $x_2 = Z^2 = 1$: $X^0 = (y+A, B, 1)$.

Согласно (1.27) $1/(1+y) = (1+B)/(y+A+2)$, так что $(1+y)B = A+1$.

По лемме 1 в разд. 7

$$h^2 = h^2(t) = (1+B\sqrt{t})^2 / (y+At+2\sqrt{t}), \quad (h^0)^2 = h^2(1) = (1+B)^2 / (y+A+2).$$

Отсюда

$$h^2(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} h^2(t) = B^2/A, \quad (h^0)^2 = (1+B)/(1+y) = B(1+B)/(1+A).$$

Т.е.

$$(h^0)^2 / h^2(\infty) = (A+AB)/(B+AB) = N+1/2 \quad \text{при } A=1, B=1/2N. \gg$$

В рассмотренном примере (рис.1) $A=1, B=0,25, t=100$, откуда $y=7, X=(107,25,100), X^0=(8;0,25;1)$, так что с учетом (1.52) f принимает значения $f_1 \approx 0,97, f_2 \approx 10,3$ на ступеньках длины $h_1 \approx 0,24, h_2 \approx 0,07$, а f^0 - значения $f_1^0 \approx 0,56, f_2^0 \approx 2,8$ на ступеньках длины $h_1^0 \approx 0,04, h_2^0 \approx 0,35$. Значения $u(y)$ и $u^0(y)$ определяются отсюда по формулам ^{<1>}:

$$u_1 \approx 0,717, u_2 \approx 0,097. u_1^0 \approx 0,942, u_2^0 \approx 0,336.$$

П р и л о ж е н и е 2. Быстрый поиск самого широкого волновода

Пример в прил.1 может служить иллюстрацией к алгоритму быстрого поиска самого широкого волновода при $n=2$:

$$u(y), y \in [Y, Y+h] \rightarrow f \rightarrow X \rightarrow X^0 \rightarrow f^0 \rightarrow u^0(y), y \in [Y, Y+h^0].$$

При $n=3$ переход $X \rightarrow X^0$ усложняется по сравнению со случаем $n=2$. Согласно (1.19) при $n=2$ всегда $X^0 \in \partial_2^2$. При $n=3$ реализуются обе возможности:

$$X^0 \in \partial_3^2 \quad (f^0 \in \{f\}_3) \quad \text{и} \quad X^0 \in \partial_3^1 \quad (f^0 \in \{f\}_2),$$

так что переход $X \in \partial_3 \rightarrow X^0$ осуществляется по схеме

$$X \rightarrow X_1 \in \partial_3^1, \quad h(X_1) = \max h(X^*), \quad X^* \in \partial_3^1 \subset \partial T_3(X);$$

$$X \rightarrow X_2 \in \partial_3^2, \quad h(X_2) = \max h(X^*), \quad X^* \in \nu_2(X) \subset \partial_3^2;$$

$$h(X^0) = \max \{h(X_1), h(X_2)\}. \quad (1)$$

Как и в прил. 1. положим для определенности $Z=\sigma=1$; рис.2 (вверху - графики $u(y), u^0(y), f$ и f^0 , внизу - графики $t_1(n), t_2(n)$ и $t_1(n)-t_2(n), n \in (0,1/9)$, см. п. 1.17) иллюстрирует переход $X \rightarrow X_2$ в (1) и соответствующие переходы $u(y) \rightarrow u^0(y), f \rightarrow f^0$:

Скоростная функция $u(y)$ в волноводе ширины $h=1$ принимает значения $(u_1, u_2, u_3) = (7/\sqrt{53}, 7/\sqrt{74}, 7/\sqrt{674}) \approx (0,962; 0,814; 0,270)$ на отрезках длины $2/7, 4/7$ и $1/7$. Ей соответствует ступенчатая функция $f \in \{f\}_3, (f_1, f_2, f_3) = (2/7, 5/7, 25/7), (h_1, h_2, h_3) = (2/7, 4/7, 1/7)$. В координатах (a, s) это - точка $(a_1, a_2, a_3) = (4/49, 20/49, 25/49), (s_1, s_2, s_3) = (4/49, 25/49, 625/49)$, в координатах x_j - точка

$$X \approx (13,35; 6,62; 7,59; 0,98; 0,53)$$

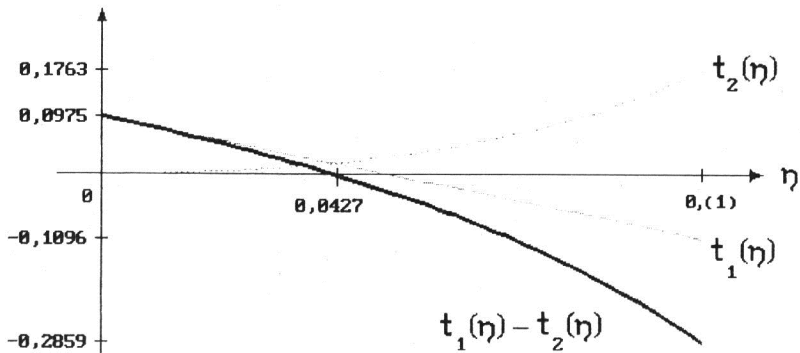
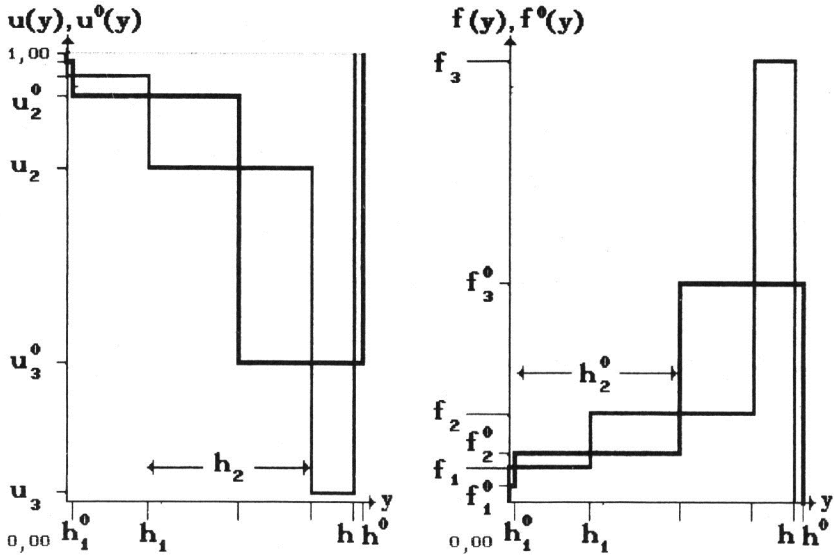
Графики $t_1(\eta)$ и $t_2(\eta)$ пересекаются при $\eta_0 = 0,0427$. Это позволяет вычислить координаты точки $Y = Y(\eta_0)$ для особого отрезка $[XY)$:

$$(y_0, y_1, y_2) \approx (3,15; 0,75; 0,41)$$

и найти точку $X^0 \approx (3,33; 0,85; 0,54; 0,018; 0,0097)$, в которой h достигает максимума на $\gamma_2(X)$. Соответственно для функций f^0 и u^0 :

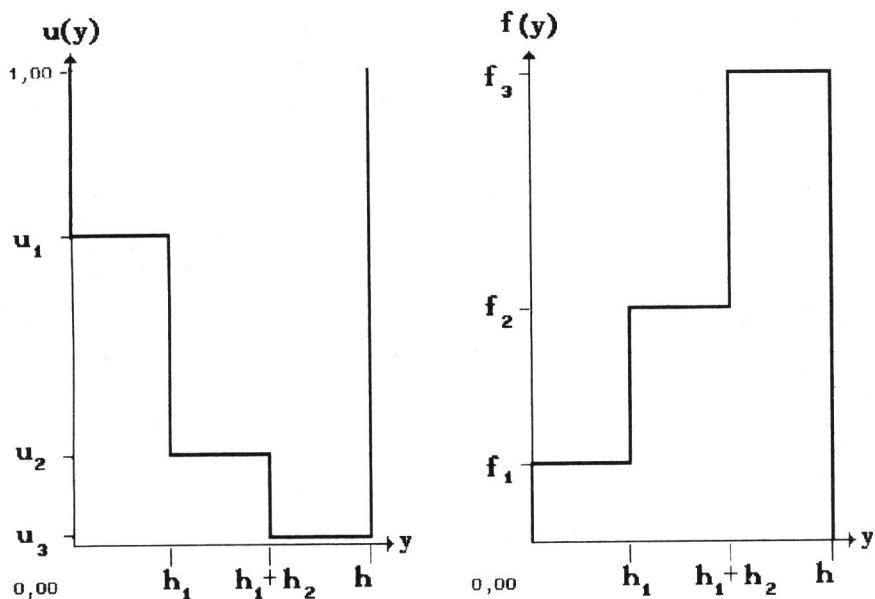
$$(f_1^0, f_2^0, f_3^0) = (0,143; 0,388; 1,778), (u_1^0, u_2^0, u_3^0) = (0,990; 0,932; 0,490),$$

$$(h_1^0, h_1^0 + h_2^0, h^0 = h_1^0 + h_2^0 + h_3^0) = (0,016; 0,593; 1,028), \text{ отсюда } h^0/h \approx 1,028.$$



Р и с. 2. Быстрый поиск самого широкого волновода, $n=3$, $X^0 \in \partial_3^2$

В заключение приведем пример, показывающий, что для некоторых $X \in \Omega_3$, в самом деле, $X^0 \in \partial_3^1$. Пусть $f_1=1, f_2=3, f_3=6, h_1=h_2=h_3=0,1$ (рис.3). так что согласно (1.53) $X=(46; 21,6; 369; 48,6; 324)$.



Р и с. 3. Скоростная функция $u(y)$, для которой $X^0 \in \partial_3^1$

Применяя к этой точке X алгоритм поиска $\max h$ на $\gamma_2(X)$ из п. 1.17, убеждаемся в том, что $t_1(n) < 0$ при $0 < n < 1/9$, поэтому в (1) $X_2 = X$, и остается доказать, что $\max h$ на $\Pi_3(X)$ достигается не в точке X :

$$h(X) = 0,3 < \max h(X^*), \quad X^* \in \Pi_3(X). \quad (2)$$

« Выделим в $\Pi_3(X)$ подмножество \mathcal{F} , отнеся к нему функции f^* со значениями f_j^* на ступеньках длины h_j^* , $j=1,2,3$, такие, что $f_3^*=f_3=6$, $h_3^*=h_3=0,1$. Чтобы доказать неравенство (2), достаточно проверить, что

$$h(f) = 0,3 < \max h(f^*), \quad f^* \in \mathcal{F}. \quad (3)$$

Для проверки (3) рассмотрим функцию $\bar{f} \in \{f\}_2$ со значениями $f_1 = 1, f_2 = 3$ на ступеньках длины $h_1 = h_2 = 0,1$ и соответствующую ей точку $\bar{X} = (10, 3, 9) \in \Omega_2$. По третьей теореме о $\max h$ при $n=2$ максимум h на $\Pi_2(\bar{X})$ достигается в точке $(14/3, 1/3, 1)$, а не в точке \bar{X} . Отсюда с очевидностью следует (3), а значит, и (2). »

Комментарии и примечания

1. Предположим математическим формулировкам вводный геофизический комментарий.

а. Рассмотрим скоростную функцию $u(y)$, $y \geq 0$, нормированную условием $u(0) = 1$. Пусть $u(y)$ имеет ровно один волновод $Y < y < Y+h$ (если волноводов несколько, последующее построение нужно провести в каждом из них). Положим $Q = 1/u(Y)$, $Q \leq 1$. Пусть $u(y)$ кусочно-постоянна в волноводе и принимает там n значений $u_j < 1/Q$ на отрезках длины h_j , $h_1 + \dots + h_n = h$. Занумеровав значения u_j в порядке убывания ($1/Q > u_1 > \dots > u_n > 0$) и положив $f_j = \sqrt{u_j^{-2} - Q^2}$, сопоставим $u(y)$, $y \in (Y, Y+h)$ положительную неубывающую ступенчатую функцию f со значениями f_j на ступеньках длины h_j , $1 \leq j \leq n$. Положим $f_1 h_1 + \dots + f_n h_n = \sigma$ и рассмотрим множество $\{f\}$ положительных неубывающих ступенчатых функций с интегралом σ .

В [1] на $\{f\}$ введено отношение частичной упорядоченности $f^* \succ f$, имеющее следующий геофизический смысл.

Пусть f^* , предшествующая f ($f^* \succ f$), принимает значения f_j^* на ступеньках длины h_j^* , $1 \leq i \leq m$, и $h_1^* + \dots + h_m^* = h^*$. Положим $u_j^* = 1/\sqrt{(f_j^*)^2 + Q^2}$, так что $f_j^* = \sqrt{(u_j^*)^{-2} - Q^2}$, и зададим кусочно-постоянную функцию $u^*(y)$ в интервале $(Y, Y+h^*)$, принимающую значения u_j^* на отрезках длины h_j^* .

Тогда $u^*(y)$ однозначно доопределяется до скоростной функции на всей полуоси $y > 0$ с таким же годографом, как у скоростной функции $u(y)$ (нужно взять $u^*(y)$ равной $u(y)$ при $0 < y < Y$ и доопределить $u^*(y)$ по формуле Гервера-Маркушевича при $y > Y+h^*$).

Подчеркнем: если условие $f^* \succ f$ не выполнено, то сопоставленную f^* функцию $u^*(y)$, вообще говоря, нельзя доопределить с интервала $(Y, Y+h^*)$ на всю полуось до скоростной функции, имеющей тот же годограф, что $u(y)$.

б. Назовем $\{f\}_n$ подмножество $\{f\}$, состоящее из функций, принимающих n значений; $T_n(f) = \{f^* \in \{f\}_n \mid f^* \succ f\}$.

В [1] установлено биективное соответствие $f \leftrightarrow X$, $f^* \leftrightarrow X^*$ между $\{f\}_n$ и областью $\Omega_n \subset \mathbb{R}^{2n-1}$, где отношение $X^* \succ X$ допускает простое геометрическое описание. Для удобства чтения соответствующие построения [1] кратко повторены в п. 1.1-1.6 данной статьи. По определению $f^* \succ f$ тогда и только тогда, когда $X^* \succ X$, так что $T_n(f)$ и $T_n(X) = \{X^* \in \Omega_n \mid X^* \succ X\}$ - по сути одно и то же множество, только заданное в разных координатах. Этим определяется важность для геофи-

зических приложений теорем о свойствах $T_n(X)$. То же относится к $\Pi_n(X)$, см. п. 1.7, и $\Pi_n(f)$ - объединению $T_m(f)$, $1 \leq m \leq n$.

в. Пусть $f^* \in f$. Тогда при $n=1$ обязательно $h^* \leq h$. Может ли случиться (при $n>1$), что $h^* > h$? Вот вопрос, инициировавший данное исследование.

Оказывается, уже при $n=2$ отношение h^*/h может быть сколь угодно большим: для любого $N > 0$ существуют $f \in \{f\}_2$ и $f^* \in T_2(f)$, такие, что $h^*/h > N$.

Более общий вопрос: как для заданной функции $f \in \{f\}_n$ найти максимум h^* на $\Pi_n(f)$ и функцию f^* , на которой этот максимум достигается? Статья отвечает на него при $n = 2$ и $n = 3$.

Этот результат приводит к новой постановке задачи о самом широком волноводе, когда годограф неизвестен, а $u(y)$ задана только при $y \in [Y, Y+h]$. Точная постановка задачи и примеры, иллюстрирующие ее решение для $n \leq 3$ - в прил. 1 и 2.

2. Обозначение отличается от использованного в [1] постоянным множителем σ : в [1] $g(z) = \sigma b(z)/c(z)$.

3. В геофизических приложениях $Z \leq 1$ (Z связано с числом Q из ^{<1>} соотношением $Z=Q^2$).

4. При $X \in \Omega_n$ матрица $M_n(X)$ невырождена, так как ее определитель равен по модулю определителю Гурвица $H_{2n-1}(X)$.

5. Иными словами, H_j можно принять за координаты в Ω_n (при этом нумерация индексов начинается с $j = 2$, поскольку $H_1 \equiv 1$). В этих координатах Ω_n выглядит гораздо проще, чем в координатах x_j : скажем, при $n = 2$ в координатах x_0, x_1, x_2 область Ω_2 - это часть первого октанта между куском плоскости $x_2 = 0$, $x_0 > x_1 > 0$ и лежащим над ним куском гиперболического параболоида $x_2 = (x_0 - x_1) x_1$, а в координатах H_j - это первый октант $H_2 > 0$, $H_3 > 0$, $H_4 > 0$.

6. При $X \rightarrow X_0 \in \partial\Omega_n$ значения $f_j = f_j(X)$ в (1.13) могут сливаться друг с другом и с нулем: длины ступенек $h_j = h_j(X)$ могут стремиться к нулю и к $+\infty$. Поэтому в (1.15) h - это либо $+\infty$, либо ширина волновода, характеризуемого функцией $f_0 \in \{f\}_m$, $1 \leq m \leq n$.

В (1.17) согласно [1] $h(X^*) < +\infty$, так что точкам $X^* \in \Pi_n(X)$ соответствуют функции $f^* \in \{f\}_m$, $1 \leq m \leq n$; при $X^* \in \Pi_n(X) \cap \partial\Omega_n$ согласно [1] $m < n$; см. также ^{<14>} и ^{<15>}.

7. При $n=1$ ответ очевиден: $\max h$ на $\Pi_1(X)$ достигается всегда в точке X .

8. Для всех граничных точек P , кроме вершины, $v \leq n$, так как из-за неотрицательности многочлена (1.10) на отрезке $[0, Z]$ его нули на интервале $(0, Z)$ - кратные.

9. Это сразу следует из свойства точки $P \in \partial K$, доказанного в конце п. 1.10.

10. Число нулей ν подсчитывается без учета кратностей. Поэтому для лучей, принадлежащих замыканиям $\gamma(x)$ и $\gamma'(x)$, вместо (1.30), выполняются соотношения $\nu \leq n$ и $\nu \leq n - 1$ (нули в (1.22) и (1.23) могут сливаться).

11. Откуда берутся уравнения (1.34), (1.35) и уравнение $x_2^* = z^2$ в п. 1.13, выясняется в п. 1.18, 1.19.

12. Отметим, что не любой вектор $H = (H_2, \dots, H_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n-1}$ может служить значением вектор-функции (2.11).

« 1. Пусть $n = 2$. При $X = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$

$$H(X) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_0 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 & x_1 & x_0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 \end{vmatrix}.$$

так что

$$H_2(X) = x_0 - x_1, \quad H_3(X) = (x_0 - x_1)x_1 - x_2, \quad H_4(X) = H_3(X)x_2.$$

Пусть точка X такова, что $H_2(X) = 0$, т.е. $x_0 = x_1$. Тогда $H_3(X) = -x_2$, $H_4(X) = -x_2^2$. Следовательно, при $H_2(X) = 0$ определитель $H_4(X) \leq 0$. Таким образом, при любом H_3 и любом $H_4 > 0$ вектор $(0, H_3, H_4)$ не может служить значением $H(X)$, $X \in \mathbb{R}^3$.

2. Так как (при любом $n \geq 1$) $H_{2n}(X) = H_{2n-1}(X)x_{2n-2}$, то условия $H_{2n-1} = 0$ и $H_{2n} \neq 0$ несовместны.»

Поэтому нельзя полностью отказаться от ограничений на H_j в теореме существования и единственности. Однако эти ограничения можно ослабить. Например, верна

Т е о р е м а 1. А. При любом $n \geq 1$, любых $H_j \neq 0$, $1 < j < 2n$ и любом H_{2n} существует ровно одна точка $X \in \mathbb{R}^{2n-1}$, в которой $H(X) = (H_2, \dots, H_{2n})$.

В. При любом $n > 1$ и любых $H_j \neq 0$, $1 < j < 2n-1$ существует ровно одна прямая в \mathbb{R}^{2n-1} , на которой $H(X) = (H_2, \dots, H_{2n-2}, 0, 0)$.

Теорема 1 допускает усиление: верна

Т е о р е м а 2 (о вложенных аффинных подпространствах). При любых $H_j \neq 0$, $1 < j < k \leq 2n$ и любом H_k множество $A_k = \{X \in \mathbb{R}^{2n-1} | H_j(X) = H_j, 1 < j \leq k\}$ является аффинным подпространством размерности $2n-k$. При $k < 2n$ и $H_k \neq 0$ функция $H_{k+1}(X)$ линейна на A_k .

Прокомментируем теорему 2. Определитель $H_2(X)$ - линейная функ-

ция в \mathbb{R}^{2n-1} « $H_2(X) = x_0$ при $n = 1$. $H_2(X) = x_0 - x_1$ при $n > 1$. »
 Значит, каждое множество уровня $H_2(X) = H_2$, $X \in \mathbb{R}^{2n-1}$ есть аффинное подпространство размерности $2n-2$. При $n > 1$ произвольно фиксируем $H_2 \neq 0$ и рассмотрим $H_3(X)$ только на аффинном подпространстве $A_2 = \{X \in \mathbb{R}^{2n-1} | H_2(X) = H_2\}$. По теореме 2 определитель $H_3(X)$ - линейная функция на A_2 и т.д.

13. Дословно повторяя проведенное доказательство, можем получить следующую модификацию теоремы о связности: множество $T_{mn}(X) = \{X^* \in \Omega_m | X^* \in \Omega_n\}$ связно при всех m и n и любом $X \in \Omega_n$.

14. Интересно проследить за поведением корней r_j многочлена (1.1) при подходе X к границе Ω_n . Рассмотрим произведение сумм $r_j + r_k$ по всем корням (1.1): $\Pi_n = \prod (r_j + r_k)$, $1 \leq j < k \leq 2n$. Для определителя Гурвица $H_{2n-1}(X)$ используем, как и в [1], более компактное обозначение G_n . По формуле Орландо (см. [3. С.458]) $G_n = (-1)^n \Pi_n$, т.е. $G_n = 0$ тогда и только тогда, когда сумма двух корней (1.1) равна 0. В частности, $G_n = 0$, если многочлен (1.1) имеет хотя бы одну пару сопряженных мнимых корней или кратный нулевой корень. Именно последние две возможности соответствуют подходу точки $X \in \Omega_n$ к замыканию Γ_n .

Если при этом $X \rightarrow Y \in \Gamma_n$, то к мнимой оси подходит p пар $(r_j, \overline{r_j})$ корней (1.1); соответственно в (1.7) сливается p пар соседних нулей и полюсов, $1 \leq p < n$.

Переходу точки $X \in \Omega_n$ на положительном расстоянии от Γ_n через гиперплоскость $x_{2n-2} = 0$ из Ω_n в полупространство $x_{2n-2} < 0$ соответствует переход одного из корней r_j через 0 по действительной оси из левой полуплоскости $\text{Re } r < 0$ в правую. В этом случае $H_{2n-1}(X) = (-1)^n \Pi_n$ остается положительным, а $H_{2n}(X) = x_{2n-2} H_{2n-1}(X) = (-1)^n r_1 \dots r_{2n} \Pi_n$ меняет знак: при этом s_1 переходит через 0.

15. Прокомментируем (5.21) в связи с п. 5.1. Одномерная область $\Omega_1 = F_1$ - это полуось $x_0 > 0$. Область $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^3$ расположена в первом октанте $x_0 > 0$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ между куском плоскости $x_2 = 0$, $x_0 > x_1 > 0$ и лежащим над ним куском Γ_2 гиперболического параболоида $x_2 = (x_0 - x_1)x_1$: при отображении Γ_2 на F_1 в каждую точку $x_0 \in F_1$ отображается полупрямая $\mathcal{L}(x_0)$, принадлежащая Γ_2 (содержащая x_0 образующая Γ_2); точки Ω_2 биективно изображают двухступенчатые функции из $\{f\}_2$, все точки полупрямой $\mathcal{L}(x_0)$ изображают одну и ту же функцию $f_0 \in \{f\}_1$, соответствующую точке $x_0 \in F_1$.

Точки пятимерной области Ω_3 находятся в биективном соответствии с функциями из $\{f\}_3$. При отображении Γ_3 на $F_2 = \Omega_2 \cup \Gamma_2$ в каждую точку $X \in F_2$ переходит полупрямая $\mathcal{L}(X)$. При $X \in \Omega_2$ все точки $\mathcal{L}(X)$

изображают одну и ту же функцию $f \in \{f\}_2$, $f \neq x$. Если $x \in \Gamma_2$, то $x \in \mathcal{L}(x_0)$ для некоторой точки $x_0 \in F_1$; в этом случае все точки полупрямой $\mathcal{L}(X)$ изображают одну и ту же функцию $f_0 \in \{f\}_1$, $f_0 \neq x_0$; эту же функцию f_0 изображают все точки полупрямой $\mathcal{L}(Y)$ при любом $Y \in \mathcal{L}(x_0)$, так что прообразом f_0 является двумерное подмножество Γ_3 . В итоге Γ_3 содержит четырехмерный страт Γ_{32} , составленный из полупрямых $\mathcal{L}(X)$, $X \in \Omega_2$, $X \neq f \in \{f\}_2$, и трехмерный страт Γ_{31} , составленный из двумерных прообразов f , $f \in \{f\}_1$.

Подобно этому Γ_4 включает шестимерный страт Γ_{43} , составленный из полупрямых - одномерных прообразов $f \in \{f\}_3$, пятимерный страт Γ_{42} , составленный из двумерных прообразов $f \in \{f\}_2$, и четырехмерный страт Γ_{41} , составленный из трехмерных прообразов $f \in \{f\}_1$.

Аналогично устроена стратификация Γ_n при любом n .

16. В соответствии с формулами для $H_2(X)$, $H_3(X)$ в примеч. ^{<12>}, описанием Ω_2 в примеч. ^{<5>} и ^{<15>} и определением Γ_n в п. 5.1, $n=2$.

17. См. (5.1) при $k=1$. Вместо $\bar{Y}(t) = (\bar{y}_0(t), \bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t))$ в (7.1) использовано обозначение $X(t) = (x_0(t), x_1(t), x_2(t))$.

18. Точнее (см. [1]) - класс эквивалентных допустимых скоростных функций. Все функции в таком классе имеют волноводы одинаковой ширины (поскольку эти волноводы характеризуются функциями, равноизмеримыми с функцией f).

19. При переходе от (1.66) к (7.10) компоненты $\tilde{v}h$ умножены на $2(s_1 s_2)^{3/2}$, а компоненты $\tilde{v}g(z)$ - на $(z+s_1)^2(z+s_2)^2$.

Благодарю М.Жижина, В.Кособокова и Б.Наймарка за помощь в работе на компьютере, О.Дмитриеву, А.Кирюшина, Т.Кронрод и А.Ландера - за советы при составлении и отладке программ, Е.Богунову, А.Козаровицкую, О.Мацевскую и Н.Смирнову - за кропотливый труд при подготовке рукописи к публикации.

Добавление. Все высказанные в этой статье гипотезы уже удалось доказать. Статья с доказательствами готовится к печати.

Литература

1. Гервер М.Л. Волноводы и устойчивые многочлены. I // Компьютерный анализ геофизических полей. М.: Наука, 1990. С. 182-205. (Вычисл. сейсмология: Вып 23).
2. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976. 568 с.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 4-е изд. М.: Наука, 1988. 552 с.
4. Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. 2-е изд. М.: Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. 359 с.