УДК 550.310: 517.984.54

*В.М.Маркушевич, А.С.Цемахман*

# D-ПОСТОЯННЫЕ СРЕДЫ И РЭЛЕЕВСКИЕ ВОЛНЫ В НИХ НА ХАРАКТЕРНЫХ ЧАСТОТАХ. I. ПУАССОНОВЫ СРЕДЫ

*V.M.Markushevich, A.S.Tsemahman*

# D-CONSTANT MEDIA AND RAYLEIGH WAVES IN THEM ON CHARACTERISTIC FREQUENCIES. I. POISSONIAN MEDIA

Sturm-Liouville's matrix problem is described which is equivalent to a system of equations for Rayleigh surface waves. A potential of the system is generated by a symmetrical matrix. Under the assumption that the matrix equals a constant, we analytically construct elastic parameters and density as functions of depth. The paper describes this analytical construction which is especially simple in the case of a Poissonian body, i.e. if $\lambda=\mu$. The medium parameters are determined from the D-matrix, and the modal structure of the Rayleigh waves on characteristic frequencies is analyzed. Examples of media are given in which Rayleigh waves do not propagate for the characteristic frequencies.

В статье рассматривается множество неоднородных упругих полупространств, параметры Ламе $\lambda$, $\mu$ и плотность $\rho$ которых зависят только от глубины $x$ таким образом, что уравнения для стационарных колебаний типа Рэлея [1] на некоторой фиксированной частоте оказываются сравнительно простыми. При этом дисперсионные свойства волн Рэлея на данной частоте, которую мы будем называть характерной, также описываются простыми уравнениями.

Характерная частота входит как параметр в дифференциальное уравнение, задающее связь функций $\lambda$, $\mu$ и $\rho$ в рассматриваемых средах. Данное условие, конечно, не означает, что мы рассматриваем среды, строение которых изменяется в зависимости от частоты колебаний источника. Напротив, оно означает, что среди всех монохроматических колебаний, возбуждаемых в конкретной среде из рассматриваемого класса, выделяется колебание на одной фиксированной частоте, для которой описание модальной структуры рэлеевских волн оказывается сравнительно простым.

Изучаемые среды можно рассматривать как обобщение полупространств, исследованных в [2]. В дальнейшем мы будем называть их D-постоянными, поскольку свойства распространяющихся в них рэлеевских волн могут быть описаны, как было показано в [3], с помощью симметрической матрицы $\mathbb{D}$, причем, как будет видно ниже, для рассматриваемых сред на характерных частотах эта матрица оказывается постоянной. В данной работе изучаются свойства $\mathbb{D}$-постоянной среды. Строится класс физически допустимых функций $\lambda$, $\mu$ и $\rho$, соответствующих постоянной матрице $\mathbb{D}$. Описывается способ восстановления параметров среды по заданному матричному потенциалу. Анализируются дисперсионные свойства волн Рэлея в $\mathbb{D}$-постоянных средах на характерных частотах. Интересной особенностью рассматриваемых сред является то, что при определенной зависимости параметров среды от глубины существуют такие частоты монохроматического излучения, на которых рэлеевские волны вообще не возникают.

В этой статье мы ограничиваемся случаем $\lambda=\mu$, т.е.случаем полупространств Пуассона. Случаю $\lambda\neq\mu$ посвящена следующая статья [4].

Логическим обобщением $\mathbb{D}$-постоянных сред являются $\mathbb{D}$-кусочно-постоянные среды, которыми можно аппроксимировать произвольные вертикально-неоднородные упругие полупространства, причем такая аппроксимация имеет определенные вычислительные преимущества по сравнению со стандартным алгоритмом Томсона-Хаскелла [5,С.259]. Кроме того, определение модальной структуры волн Рэлея для таких сред выглядит более простым по сравнению со стандартным подходом, в частности, исследование $\mathbb{D}$-постоянного слоя на $\mathbb{D}$-постоянном полупространстве определенно оказывается легче изучения модальной структуры в случае однородного слоя на однородном полупространстве. В дальнейшем мы собираемся перейти к изучению таких сред.

## 1. Матричная система Штурма-Лиувилля для волн Рэлея

В [6] было доказано, что система уравнений для волн Рэлея

$$\frac{d}{dx}\left(\mu\frac{dw_1}{dx} - \xi\mu w_2\right) - \xi\lambda\frac{dw_2}{dx} + (\omega^2\rho - \xi^2(\lambda+2\mu))w_1 = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left((\lambda+2\mu)\frac{dw_2}{dx} + \xi\lambda w_1\right) + \xi\mu\frac{dw_1}{dx} + (\omega^2\rho - \xi^2\mu)\ w_2 = 0 \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\left.\begin{aligned} &\mu\frac{dw_1}{dx} - \xi\mu w_2 = 0 \\ &(\lambda+2\mu)\frac{dw_2}{dx} + \xi\lambda w = 0 \end{aligned}\right\}\ \text{при } x = 0 \tag{2}$$

и

$$w_1\to 0,\quad w_2\to 0 \qquad \text{при } x\to\infty \tag{3}$$

подстановкой

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & 1 \\ -\xi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mu_0}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \end{pmatrix} \mathbb{G} \begin{pmatrix} f \\ \varphi \end{pmatrix} \tag{4}$$

сводится к краевой задаче Штурма-Лиувилля

$$\ddot{\mathbf{F}} - \xi^2\mathbf{F} = \mathbb{A}\mathbf{F}\ , \qquad \mathbf{F} = (\ f,\ \varphi\ )^{\mathrm{T}}\ , \tag{5}$$

$$\dot{\mathbf{F}} + \mathbb{T}\mathbf{F} = 0 \qquad \text{при } x = 0\ , \tag{6}$$

$$\mathbf{F} \to 0 \qquad \text{при } x \to \infty\ , \tag{7}$$

где

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} -\frac{\dot{\mu}}{\mu} & \frac{1}{2}\,\frac{\mu}{\lambda+2\mu} \\ 2\xi^2 - \omega^2\,\frac{\rho}{\mu} - \mu\left(\ddot{\frac{1}{\mu}}\right) & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Мы используем в этой статье обычный шрифт для обозначения скалярных величин, полужирный шрифт - для векторов и жирный - для матриц. Здесь и далее обозначение $f_0 = f(0)$ используется для произвольной функции $f$, $\mathbb{X}^{\mathrm{T}}$ обозначает транспонирование матрицы $\mathbb{X}$, $\dot{(\ )} \equiv \frac{d}{dx}$, матрица $\mathbb{G}$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\mathbb{G}} = \mathbb{L}\ \mathbb{G}\ , \tag{9}$$

где

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \frac{1}{2}\,\frac{\mu}{\mu_0}\,\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}, \quad d = -\,\mu_0\left(\ddot{\frac{1}{\mu}}\right)\ ,$$

$$\mathbb{G}(0) = \mathbb{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det\,\mathbb{G}(x) = 1. \tag{10}$$

При этом, как было доказано в [3], матричный потенциал $\mathbb{A}$ в уравнении (5) порождается симметрической матрицей $\mathbb{D}$ по формуле

$$\mathbb{A} = \mathbb{C}\ \dot{\mathbb{D}} - \det\,\mathbb{D}\cdot\mathbb{E}\ , \tag{11}$$

где $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, а матрица $\mathbb{D}$ выражается через $\lambda$, $\mu$ и $\rho$ следующим образом

$$\mathbb{D} = \mathbb{G}^{\mathrm{T}}\ \mathbb{S}\ \mathbb{G}\ , \tag{12}$$

где $\mathbb{G}$ определено в (9),(10), а

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} d & \frac{\dot{\mu}}{\mu} \\ \frac{\dot{\mu}}{\mu} & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\,\omega^2\,\mu_0\,\frac{\rho}{\mu^2} & 0 \\ 0 & -\,\frac{\mu}{\mu_0} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

## 2. Случай постоянной матрицы $\mathbb{D}$

Интересно, может ли матрица $\mathbb{D}$ оказаться постоянной для физически допустимых значений функций $\lambda$, $\mu$ и $\rho$. В этом разделе мы построим такие функции для случая $\lambda=\mu$ (среда Пуассона).

Рассмотрим производную $\dot{\mathbb{D}}$. С учетом (9), (10) имеем

$$\dot{\mathbb{D}} = \mathbb{G}^T \left[ \begin{pmatrix} 0 & d \\ c & 0 \end{pmatrix} \mathbb{S} + \dot{\mathbb{S}} + \mathbb{S} \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} \right] \mathbb{G}. \tag{14}$$

Для того, чтобы $\mathbb{D}$ была постоянной, нужно, чтобы выражение в квадратных скобках в (14) обращалось в нуль. Это условие приводит к системе трех уравнений

$$2d \frac{\dot{\mu}}{\mu} + \dot{d} - \omega^2\mu_0 \left( \dot{\overline{\frac{\rho}{\mu^2}}} \right) = 0, \tag{15}$$

$$2c \frac{\dot{\mu}}{\mu} + \dot{c} - \frac{\dot{\mu}}{\mu_0} = 0, \tag{16}$$

$$\left( 2c - \frac{\mu}{\mu_0} \right) d + \left( \dot{\overline{\frac{\dot{\mu}}{\mu}}} \right) - c\omega^2\mu_0 \frac{\rho}{\mu^2} = 0. \tag{17}$$

Интегрируя (16), получим

$$\lambda = \frac{\mu^3 + 12K\mu_0^3}{\mu^3 - 6K\mu_0^3}\, \mu, \tag{18}$$

где постоянная интегрирования $K$ выбрана безразмерной. По энергетическим соображениям [7.С.22] должно быть

$$\mu > 0 , \quad \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0 .$$

следовательно, условие

$$\mu > \mu_0 \sqrt[3]{6K} \tag{19}$$

должно выполняться в рассматриваемых средах. Введем новые функции

$$p = \frac{\mu_0}{\mu}, \quad q = 3Kp^3. \tag{20}$$

Из (10), (18)-(20) находим

$$c = \frac{1 + q}{3p} , \quad \lambda = \frac{1 + 4q}{1 - 2q}\, \mu , \tag{21}$$

$$\omega^2\mu_0 \frac{\rho}{\mu^2} = \left[ \left( 2c - \frac{\mu}{\mu_0} \right) d + \left( \dot{\overline{\frac{\dot{\mu}}{\mu}}} \right) \right] c^{-1} =$$

$$= \frac{1}{1 + q} \left[ (1-2q)\ddot{p} - 3p \left( \dot{\overline{\frac{\dot{p}}{p}}} \right) \right]. \tag{22}$$

Система уравнений (15)-(17) имеет первый интеграл $\det\mathbb{D}=\mathrm{const}$. Так как из (10) $\det\mathbb{G}(x)=1$ при произвольном $x$ и из (12) $\mathbb{D}=\mathbb{G}^T\mathbb{S}\mathbb{G}$, то и детерминант

$$\det S = \frac{2}{3} L = \mathrm{const}. \tag{23}$$

Выражая $S$ через функции $p, q$, с учетом (21),(22) находим

$$\det S = \left( d - \omega^2\mu_0 \frac{\rho}{\mu^2} \right) \left( c - \frac{\mu}{\mu_0} \right) - \left( \frac{\dot\mu}{\mu} \right)^2 =$$

$$= - \frac{1}{3} (2-q) \dot{\overline{\left( \frac{\dot p}{p} \right)}} + \frac{(2-q)^2 - 3(1+q)}{3(1+q)} \left( \frac{\dot p}{p} \right)^2 .$$

Окончательно, с учетом $\frac{\dot q}{q} = 3 \frac{\dot p}{p}$, получаем основное дифференциальное уравнение для функции $q = 3K\mu_0^3\mu^{-3}$

$$-(2-q)(1+q) \dot{\overline{\left( \frac{\dot q}{q} \right)}} + \frac{1}{3} [(2-q)^2 - 3(1+q)] \left( \frac{\dot q}{q} \right)^2 = 6L(1+q). \tag{24}$$

Это уравнение рассмотрено в следующей статье [4], а здесь мы ограничиваемся наиболее простым случаем $K=0$. При этом условии уравнение (24) существенно упрощается и переходит в

$$-2 \dot{\overline{\left( \frac{\dot p}{p} \right)}} + \left( \frac{\dot p}{p} \right)^2 = 2L. \tag{25}$$

С другой стороны, из (18) следует, что при $K=0$ будет $\lambda=\mu$. Выражение (22) при $K=0$ принимает вид

$$\omega^2\mu_0 \frac{\rho}{\mu^2} = \left[ -2 \dot{\overline{\left( \frac{\dot p}{p} \right)}} + \left( \frac{\dot p}{p} \right)^2 \right] p = 2L \frac{\mu_0}{\mu},$$

откуда очевидно, что $L \ge 0$. Положим $2L=R^2$, тогда

$$\omega^2 \frac{\rho}{\mu} = R^2. \tag{26}$$

Решением уравнения (25) при $R=0$ является

$$\mu = C_1 ( x + C_2 )^2 , \tag{27}$$

где $C_1 = \frac{\dot\mu_0^2}{4\mu_0}$, $C_2 = 2\frac{\mu_0}{\dot\mu_0}$, а при $R \ne 0$

$$\mu = \ell ( 1 - me^{Rx} )^2 e^{-Rx}, \tag{28}$$

где

$$\ell = \frac{( \dot\mu_0 - R\mu_0 )^2}{4R^2\mu_0}, \qquad m = \frac{\dot\mu_0 + R\mu_0}{\dot\mu_0 - R\mu_0}. \tag{29}$$

В частном случае $\dot\mu_0 + R\mu_0 = 0$ или $\dot\mu_0 - R\mu_0 = 0$ функции (28) становятся экспоненциальными.

$$\mu = \mu_0 e^{\pm Rx}. \tag{30}$$

Такие среды с параметрами $\lambda$, $\mu$ и $\rho$, изменяющимися экспоненциально, изучались в [2].

Итак, мы нашли функциональные зависимости $\lambda=\mu$ и $\rho$ от глубины $x$. Однако функции (27),(28) и (30) не при всех значениях параметров удовлетворяют условию строгой положительности $\mu$. Для того, чтобы при $x\in[0,\infty)$ выполнялось условие $\mu>0$, необходимо и достаточно, чтобы в (27)

$$C_1 > 0, \quad C_2 > 0, \tag{31}$$

а в (28)

$$m \in \{(-\infty,0] \cup [1,\infty)\}. \tag{32}$$

Для функций (27) условия (31) эквивалентны условиям $\mu_0>0$, $\dot\mu_0>0$, а для функций (28) условие (32) означает, что должно выполняться ограничение

$$\dot\mu_0 \ge -R\mu_0,$$

или, с учетом (26),

$$\dot\mu_0 \ge -\omega\sqrt{\rho_0\mu_0}. \tag{33}$$

### 3. Характеризация матрицы $\mathbb{D}$ в частном случае

Полученное множество функций $\{\mu(x),\rho(x)\}$ можно рассматривать и с другой точки зрения. Пусть по монохроматическим колебаниям рэлеевского типа удается восстановить матричный потенциал $\mathbb{A}$ или, что то же самое, матрицу $\mathbb{D}$. Возможность восстановления потенциала доказана в [6], но для потенциалов $\mathbb{A}$, убывающих на бесконечности. Однако мы можем считать, что в рассматриваемом случае потенциал тождественно равен нулю, если вместо спектрального параметра $\xi^2$ ввести новый спектральный параметр $\zeta^2=\xi^2-R^2/3$.

После того, как матрица $\mathbb{D}(x)$ определена, желательно найти по ее элементам функции $\lambda(x)$, $\mu(x)$ и $\rho(x)$. Возможно ли определение этих функций, и если это так, то какие ограничения должны быть наложены на эту матрицу, чтобы получающиеся функции имели физически допустимые значения, т.е. $\mu>0$, $\lambda+\frac{2}{3}\mu>0$, $\rho>0$? Выяснение этих условий мы и называем характеризацией матрицы.

До сих пор ответ на этот вопрос легко получался лишь для случая $\mu(x)=\mu_0=\mathrm{const}$. Рассмотрим другой частный, но менее тривиальный пример характеризации матрицы $\mathbb{D}$.

Так как при $x\in[0,\infty)$ матрица-константа $\mathbb{D}(x)=\mathbb{D}(0)=\mathbb{S}(0)$ имеет вид

$$\mathbb{D}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\left[3\left(\frac{\dot\mu_0}{\mu_0}\right)^2+R^2\right] & \frac{\dot\mu_0}{\mu_0} \\ \frac{\dot\mu_0}{\mu_0} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix},$$

то справедливо следующее

Утверждение 1. *Пусть заданы симметричная матрица* $\mathbb{D}(x)=\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}=const\neq 0$, *значения параметров* $\mu_0$ *и частоты* $\omega$. *Тогда при условии* $\beta=-\frac{2}{3}$, *эквивалентном условию* $\lambda(x)=\mu(x)$, *функции* $\mu(x)$ *и* $\rho(x)$ *определяются по* $\alpha(x)$ *и* $\gamma(x)$ *единственным образом по формулам (26)-(28), (30), в которых* $\dot{\mu}_0=\mu_0\gamma$, $R=\sqrt{3\det\mathbb{D}}$, $\rho(x)=R^2\omega^{-2}\mu(x)$. *При этом, чтобы* $\mu(x)>0$, *должны выполняться условия (31) или (33) с такой же заменой констант* $\mu_0$ *и* $\rho_0$ *в этих выражениях.*

## 4. Дисперсия волн Рэлея

В случае, когда $R\neq 0$, уравнение (5) принимает вид

$$\ddot{\mathbb{F}} - \zeta^2\mathbb{F} = 0,$$

где

$$\zeta = \sqrt{\xi^2 - R^2/3}\,. \tag{34}$$

В силу краевого условия на бесконечности его решение имеет вид

$$\mathbb{F} = \mathbb{E}e^{-\zeta x}, \tag{35}$$

где $\mathrm{Re}\zeta>0$ (точно так же можно было бы положить $\mathbb{F} = \mathbb{E}e^{\zeta x}$ при $\mathrm{Re}\zeta<0$). Подставим (35) в краевое условие

$$\det\left(\dot{\mathbb{F}} + \mathbb{T}\mathbb{F}\right) = 0 \qquad \text{при } x = 0, \tag{36}$$

где в соответствии с (8)

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\dot{\mu}}{\mu} & \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\mu}{\lambda+2\mu} \\ 2\xi^2 - \omega^2\dfrac{\rho}{\mu} - \mu\left(\dfrac{1}{\mu}\right)^{\cdot\cdot} & 0 \end{pmatrix}.$$

Разница в записи условия (36) по сравнению с (6) объясняется тем, что в (6) рассматривается вектор-решение, а в (36) - матричное решение, составленное из двух столбцов, каждый из которых представляет линейно независимое решение уравнения (5).

Так как при $x=0$

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} R\,\dfrac{1+m}{1-m} & \dfrac{1}{6} \\ 2\left[\xi^2 - R^2\dfrac{1-m^3}{(1-m)^3}\right] & 0 \end{pmatrix},$$

то дисперсионное уравнение (36) можно переписать в виде

$$\det\left[\begin{pmatrix} -\sqrt{\xi^2-R^2/3} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\xi^2-R^2/3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R\,\dfrac{1+m}{1-m} & \dfrac{1}{6} \\ 2\left[\xi^2-R^2\dfrac{1-m^3}{(1-m)^3}\right] & 0 \end{pmatrix}\right] = 0$$

или, с учетом (34),

$$2(1-m)\zeta^2 - 3R(1+m)\zeta + \frac{R^2}{3}\,\frac{2m^2+5m+2}{1-m} = 0. \qquad (37)$$

Корни этого уравнения даются выражением

$$\zeta_{1,2} = \frac{3\sqrt{3}(1+m) \pm \sqrt{11m^2+14m+11}}{4\sqrt{3}(1-m)}\,R. \qquad (38)$$

Так как для корней должно выполняться условие $\zeta>0$, то с учетом ограничений на параметр $m$, заданных выражением (32), получаем

Утверждение 2. *Дисперсионное уравнение (37) для сред из второго раздела с $R\neq0$, $\mu>0$ имеет 2 вещественных решения, если параметр $m$ принадлежит области $m\in(-\frac{1}{2},0]$, одно вещественное решение при $m\in(-2,-\frac{1}{2}]$ и ни одного решения - вещественного или комплексного - при $m$, лежащем вне области $(-2,0]$.*

В случае, когда R=0, уравнение (5) преобразуется к виду

$$\ddot{\mathbb{F}} - \xi^2\,\mathbb{F} = 0.$$

При $x=0$

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\dot\mu_0}{\mu_0} & \dfrac{1}{6} \\ 2\xi^2 - \dfrac{3}{2}\dfrac{\dot\mu_0^2}{\mu_0^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому дисперсионное уравнение (38) записывается в виде

$$\det\left[\begin{pmatrix} -\xi & 0 \\ 0 & -\xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dfrac{\dot\mu_0}{\mu_0} & \dfrac{1}{6} \\ 2\xi^2 - \dfrac{3}{2}\dfrac{\dot\mu_0^2}{\mu_0^2} & 0 \end{pmatrix}\right] = 0$$

и имеет корни

$$\xi_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{4}\,\frac{\dot\mu_0}{\mu_0}. \qquad (39)$$

С учетом (31) условие $\xi>0$ не выполняется, следовательно, дисперсионное уравнение в статическом случае корней не имеет.

В рассматриваемом классе сред плотность возрастает с глубиной, кроме случая (30) с отрицательным показателем экспоненты. Конечность потока энергии [8.С.60;9] для данной моды связана с конечностью интеграла

$$I = \int_0^\infty \mathbb{F}\,\mathbb{G}^{-1}\mathbb{B}\,\mathbb{G}\,\mathbb{H}\,dx,$$

где $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -\frac{\rho}{\mu} & \mu_0\left(\frac{\rho}{\mu^2}\right)^{\cdot} \\ 0 & -\frac{\rho}{\lambda+2\mu} \end{pmatrix}$, $\mathbb{H} = (h,\chi)^T$ - вектор-решение краевой задачи Штурма-Лиувилля (5)-(7) с потенциалом $\mathbb{A}^T$.

Так как $\| \mathbb{G}^{-1}\mathbb{B}\,\mathbb{G} \| < const < \infty$, то для конечности потока энергии достаточно, чтобы компоненты $\mathbb{F}$ и $\mathbb{H}$ убывали как $e^{-\varepsilon x}$, где $\varepsilon > 0$.

Наиболее неожиданной особенностью рассмотренного примера оказывается существование сред, в которых волны Рэлея вообще не образуются. Однако нужно подчеркнуть, что они не образуются лишь при характерной для данной среды частоте источника. Поэтому мы не знаем, возникнут ли рэлеевские моды в этой среде, если возбуждать в ней колебания на других частотах. Скорее всего, они возникнут, но, возможно, не сразу, а лишь после того, как частота источника станет существенно отличаться от характерной частоты.

Литература


1. *Keilis-Borok V.I., Neigauz M.G., Shkadinskaya G.V.* Application of the theory of eigenfunctions to the calculations of surface wave velocities // Rev. Geophys. 1965. Vol.1, N 1. P.105-109.
2. *Зволинский Н.В.* Волны Рэлея в неоднородном упругом полупространстве частного типа // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1945. Т.IX. N 3. С.261-278.
3. *Маркушевич В.М.* Представление матричных потенциалов в уравнении для волн Рэлея через симметричную матрицу // М.: Наука, 1990. С.227-234. (Вычисл. сейсмология: Вып.23).
4. *Маркушевич В.М., Стеблов Г.М., Цемахман А.С.* D-постоянные среды и рэлеевские волны в них на характерных частотах. II. Непуассоновы среды // Наст. сб. С.158-171.
5. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. Т. 1. М.: Мир, 1983. 520с.
6. *Маркушевич В.М.* Вынужденные гармонические колебания рэлеевского типа и матричная задача рассеяния // Математические методы в сейсмологии и геодинамике. М.: Наука, 1986. С.119-135. (Вычисл. сейсмология: Вып. 19).
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987. 247с.
8. *Зильберглейт А.С., Копилевич Ю.И.* Спектральная теория регулярных волноводов. Л.: ЛФТИ АН СССР, 1983. 301с.
9. *Маркушевич В.М.* Подстановка Пикериса и некоторые спектральные свойства задачи Рэлея // Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука, 1989. С.117-127. (Вычисл. сейсмология; Вып. 22).