

*В.М.Маркушевич. Г.М.Стеблов. А.С.Цемахман*

**D-ПОСТОЯННЫЕ СРЕДЫ И РЭЛЕЕВСКИЕ ВОЛНЫ В НИХ  
НА ХАРАКТЕРНЫХ ЧАСТОТАХ. II. НЕПУАССОНОВЫ СРЕДЫ**

*V.M.Markushevich, G.M.Steblov, A.S.Tsemahman*

**D-CONSTANT MEDIA AND RAYLEIGH WAVES IN THEM  
ON CHARACTERISTIC FREQUENCIES. II. NON-POISSONIAN MEDIA**

A class of elastic heterogeneous media is constructed analytically for the non-Poissonian case. Simple description of Rayleigh waves propagating in the medium is presented. The choice of the class is based on the elementary type of the potential in the corresponding matrix Sturm-Liouville's problem, provided that the symmetrical matrix  $D$ , which determines the potential, is assumed to be constant. This assumption allows us to derive a differential equation for shear modulus and to investigate its solutions. Remaining parameters of the medium can be expressed by shear modulus. Possibility of reconstructing the medium parameters from the potential is considered. Modal structure of Rayleigh waves on characteristic frequencies is analyzed.

В статье изучаются вертикально-неоднородные упругие полупространства, допускающие сравнительно простое аналитическое описание поверхностных волн Рэля. Рассматривается матричная краевая задача Штурма-Лиувилля, соответствующая краевой задаче распространения волн Рэля в упругом полупространстве, параметры Ламе  $\lambda$ ,  $\mu$  и плотность  $\rho$  которого зависят только от глубины [1]. Анализируется частный случай краевой задачи Штурма-Лиувилля с постоянным матричным потенциалом. С учетом физических ограничений на упругие параметры строится модель среды, отвечающая заданному матричному потенциалу. Рассматривается способ восстановления этих параметров по заданному потенциалу. Изучаются дисперсионные свойства волн Рэля.

Статья является продолжением исследования, начатого в [1]. В связи с этим мы будем ссылаться на [1], используя ссылки вида (I.9) и применять те же обозначения для переменных, что и в [1]. В данной работе будут рассмотрены среды непугассонова типа, для которых  $\lambda \neq \mu$ . При этом сохраняется предположение о постоянстве матрицы  $D$ , порождающей потенциал. В [1] для таких сред, названных D-посто-

янными, было выведено уравнение (I.24) относительно функции  $q=3K\mu_0^3\mu^{-3}$ :

$$-(2-q)(1+q)\left(\frac{\dot{q}}{q}\right) + \frac{1}{3}[(2-q)^2 - 3(1+q)]\left(\frac{\dot{q}}{q}\right)^2 = 6L(1+q), \quad (1)$$

описывающее зависимость модуля сдвига  $\mu$  от глубины. Остальные параметры среды выражаются следующим образом:

$$\lambda = \frac{1 + 4q}{1 - 2q} \mu, \quad (2)$$

$$\omega^2 \frac{\rho}{\mu} = \frac{1}{3(1+q)} \left[ -2(1+q)\left(\frac{\dot{q}}{q}\right) + \frac{1-2q}{3}\left(\frac{\dot{q}}{q}\right)^2 \right]. \quad (3)$$

### Область изменения функции $q$

Параметр  $q$  не может меняться в произвольных пределах, так как по энергетическим соображениям  $\lambda + \frac{2}{3}\mu > 0$  (см. ссылки [3.С.26], [4.С.190], [5.С.114], [6.С.100], [7.С.500]). Однако в некоторых руководствах считается, что положительным должен быть сам параметр  $\lambda$  (см. ссылки [8.С.47], [9.С.60]). Приведем границы изменения  $q$ , соответствующие как первому, так и второму условию. Из (2) найдем

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{5 + 8q}{3(1-2q)} \mu. \quad (4)$$

Область допустимых значений функции  $q$  при условии положительности  $\lambda$  имеет вид

$$-1/4 < q < 1/2, \quad (5)$$

а при условии положительности  $\lambda + \frac{2}{3}\mu -$

$$-5/8 < q < 1/2. \quad (6)$$

Из (2) определим также связь коэффициента  $K$  со значениями параметров Ламе на поверхности  $\lambda_0, \mu_0$

$$\lambda_0 = \frac{1 + 12K}{1 - 6K} \mu_0, \quad \lambda_0 + \frac{2}{3}\mu_0 = \frac{5 + 24K}{3(1-6K)} \mu_0.$$

По тем же соображениям, которые мы учитывали при определении области изменения  $q$ , параметр  $K$  может изменяться в интервале  $-1/12 < K < 1/6$  для  $\lambda > 0$  и в интервале  $-5/24 < K < 1/6$  для  $\lambda + \frac{2}{3}\mu > 0$ . Среда Пуассона, для которых  $K=0$ , были рассмотрены в предыдущей статье, а мы ограничимся случаем  $K \neq 0$ . Будем рассматривать параллельно среды при  $K > 0$  и  $K < 0$ , называя первые из них надпуассоновыми, вторые - подпуассоновыми.

Решение основного дифференциального уравнения  
для функции  $q = 3K\mu_0^3 \mu^{-3}$

Раскрывая явно  $\left(\frac{\dot{q}}{q}\right)$ , перепишем (1) в виде

$$q(1+q)(2-q)\ddot{q} + \frac{2}{3}(q^2+2q-\frac{7}{2})\dot{q}^2 + 6Lq^2(1+q) = 0.$$

Положим  $s = \dot{q}^2$ , тогда  $\ddot{q} = \frac{1}{2} \frac{ds}{dq}$ , и уравнение преобразуется в линейное неоднородное относительно функции  $s$ :

$$\frac{q}{2}(1+q)(2-q)\frac{ds}{dq} + \frac{2}{3}(q^2+2q-\frac{7}{2})s + 6Lq^2(1+q) = 0.$$

Применяя метод вариации постоянной, получим решение этого дифференциального уравнения которое в области изменения  $q$ , описанной в предыдущем разделе, имеет вид

$$s = \frac{q^2}{(1+q)^2} \left( M|q|^{1/3}(2-q) + 18L(1-2q) \right),$$

или, возвращаясь к исходной переменной  $q$ ,

$$\frac{dq}{dx} = \pm \frac{q}{1+q} \sqrt{M|q|^{1/3}(2-q) + 18L(1-2q)}. \quad (7)$$

Вывод формул для скоростей SV- и P-волн

Выразив  $\left(\frac{\dot{q}}{q}\right)$  из (1) и  $\left(\frac{\dot{q}}{q}\right)^2$  из (7), преобразуем (3) к виду

$$\omega^2 \frac{\rho}{\mu} = \frac{Mq^{4/3} \text{sign } q + 2L(1+8q-2q^2)}{(1+q)^3}. \quad (8)$$

Используя (2), получим из (8) соотношение

$$\omega^2 \frac{\rho}{\lambda+2\mu} = \frac{1-2q}{3} \frac{Mq^{4/3} \text{sign } q + 2L(1+8q-2q^2)}{(1+q)^3}. \quad (9)$$

Формулы (8) и (9) определяют зависимость скоростей  $V_{SV} = \sqrt{\mu/\rho}$  и  $V_P = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$  поперечных и продольных волн соответственно от глубины.

Условие  $\lambda > 0$  ( $\lambda + \frac{2}{3}\mu > 0$ ) и ограничения на траектории

Рассмотрим в надпуассоновом случае интегральные кривые уравнения (7), которое можно записать в виде

$$\frac{dq}{dx} = \pm \frac{q}{1+q} \sqrt{Mq^{1/3}(2-q) + 18L(1-2q)}. \quad (10)$$

Производная  $\frac{dq}{dx}$  может обращаться в нуль только в окрестности  $q=0$  или если подкоренное выражение обращается в нуль. Последний случай определяет точку поворота  $q^*$  на траектории, так как в этой точке уравнение (10) асимптотически эквивалентно уравнению

$$\frac{dq}{dx} = \pm c \sqrt{q-q^*}.$$

Ось  $q=0$  является асимптотой для интегральных траекторий (7).

Наряду с траекториями, имеющими максимум, в надпуассоновом случае возможны также убывающие функции  $q(x)$ , которые асимптотически стремятся к  $q=0$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Точнее, справедливы следующие утверждения.

**У т в е р ж д е н и е 1.** Из выражения (10) следует, что  $L > 0$ .

Это очевидно для траекторий, которые находятся в области сколь угодно малых значений  $q$ , а для траекторий, не захватывающих эту область, предположение  $L < 0$  приводит к выходу траектории в область  $q > 1/2$ .

**У т в е р ж д е н и е 2.** Если начальное значение  $\frac{dq}{dx} < 0$ , то траектория асимптотически стремится к нулю при любых значениях  $M$ , положительных или отрицательных.

**У т в е р ж д е н и е 3.** Если начальное значение  $\frac{dq}{dx} > 0$ , то обязательно  $M < 0$ . При этом траектория возрастает на некотором интервале, а затем, достигнув максимума при  $q < 1/2$  для любой величины отношения  $L$  к  $|M|$ , начинает убывать и стремится к нулю, как в утверждении 2.

Рассмотрим интегральные кривые уравнения (7) в подпуассоновом случае. Полагая  $t = -q$ , перепишем (7) в виде

$$\frac{dt}{dx} = \pm \frac{t}{1-t} \sqrt{M t^{1/3}(2+t) + 18L(1+2t)}. \quad (11)$$

Траектории уравнения (11) на плоскости  $(x, q)$  напоминают зеркальные относительно прямой  $q=0$  отражения траекторий при  $K > 0$ . Однако для траекторий  $t(x)$ , возрастающих в окрестности  $x=0$ , точка поворота, определяемая условием

$$u(t) = \frac{t^{1/3}(2+t)}{1+2t} = \frac{18L}{|M|} \quad (12)$$

и существующая только при условии  $M < 0$ , может и не принадлежать области допустимых значений. Дифференцируя (12), можно убедиться,

что  $u(t)$  монотонна и, следовательно, уравнение (12) может иметь лишь один корень. Этот корень принадлежит области допустимых значений, если

$$\frac{18L}{|M|} \leq u\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} \sqrt[3]{2} = 0,945 \quad \text{при } 0 < t < 1/4,$$

$$\frac{18L}{|M|} \leq u\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{21}{36} \sqrt[3]{5} = 0,997 \quad \text{при } 0 < t < 5/8. \quad (13)$$

Положительность  $\rho$  на траекториях

В надпуассоновом случае на рассматриваемых траекториях очевидна положительность  $\mu$ , а положительность  $\lambda$  следует из выполнения условия  $0 < q < 1/2$  на траектории. Выясним, будет ли положительна на этих траекториях функция  $\rho$ . Из (8) видно, что для положительности  $\rho$  должно выполняться неравенство

$$\frac{q}{2-q} \left( \frac{\dot{q}}{q} \right)^2 + \frac{4L(1+q)}{2-q} > 0,$$

т.е.

$$4L(1+q) > -q \left( \frac{\dot{q}}{q} \right)^2. \quad (14)$$

Так как в этом случае из утверждения 1 следует, что  $L > 0$ , то это неравенство всегда выполняется для  $q \in (0, 1/2)$ , и поэтому на рассматриваемых нами траекториях  $\rho$  в формуле (8) строго положительно.

В подпуассоновом случае, как и в надпуассоновом, для положительности  $\rho$  должно выполняться неравенство, аналогичное (14),

$$4L(1-t) > t \left( \frac{\dot{t}}{t} \right)^2,$$

из которого видно, что  $L > 0$ . Однако в отличие от надпуассонова случая, где это условие являлось необходимым и достаточным для положительности  $\rho$ , в подпуассоновом случае оно является лишь необходимым. Выясним достаточные условия для этого случая. Переходя в (8) к переменной  $t$ , получим

$$\omega^2 \frac{\rho}{\mu} = \frac{2L(1-8t-2t^2) - t^{4/3}M}{(1-t)^3}. \quad (15)$$

В разрешенной области знак  $\rho$  совпадает со знаком числителя правой части выражения (15), поэтому

$$2L(1-8t-2t^2) - t^{4/3}M > 0, \quad (16)$$

следовательно,

$$M < 2L(1-8t-2t^2)t^{-4/3}. \quad (17)$$

Для траекторий  $t=t(x)$ , монотонно стремящихся к  $t=0$  при  $x \rightarrow \infty$ , отсюда, вследствие монотонности правой части (17), достаточно выполнения неравенства

$$M < 2L(1-8t_0 - 2t_0^2)t_0^{-4/3}. \quad (18)$$

Для немонотонных траекторий условие (17) всегда выполняется при  $0 < \hat{t} < 0,1213$  вследствие того, что  $M < 0$ , а  $t > \hat{t}$  приводит к следующему ограничению на  $M$ :

$$\frac{18L}{|M|} < \frac{9t^{4/3}}{2t^2+8t-1} = r(t). \quad (19)$$

Сравнивая (13) и (19), легко убедиться, что (9) всегда справедливо при ограничениях (13).

Таким образом, условия (13) и (18) вместе с условием  $L > 0$  являются достаточными условиями положительности  $\rho$  в подпуассоновом случае.

#### Зависимость скоростей SV- и P-волн от глубины

Из формул (8), (9) следует, что зависимость скоростей поперечных SV-волн и продольных P-волн от глубины при различных начальных условиях имеет вид, представленный на рис. 1,2. Эта зависимость может иметь волноводную структуру. Зависимости  $1/v_{SV}$  и  $1/v_P$  в общем повторяют друг друга, хотя количество экстремумов может и не совпадать, так что число волноводов на скоростном разрезе поперечных волн не соответствует, вообще говоря, числу волноводов для продольных волн.

#### Конечность энергетического потока

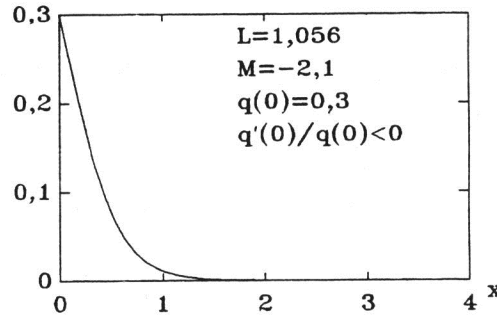
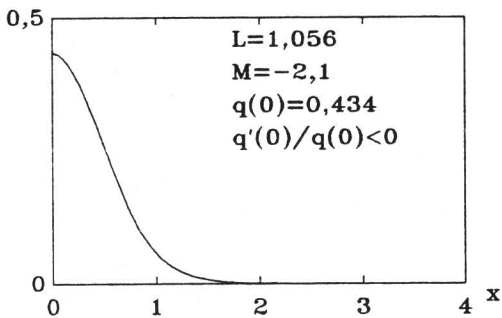
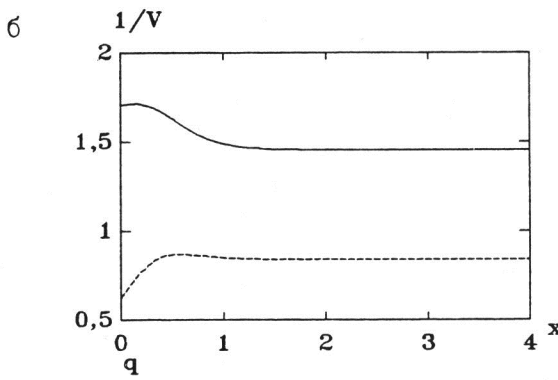
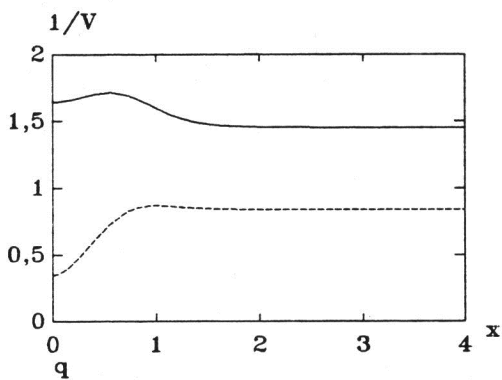
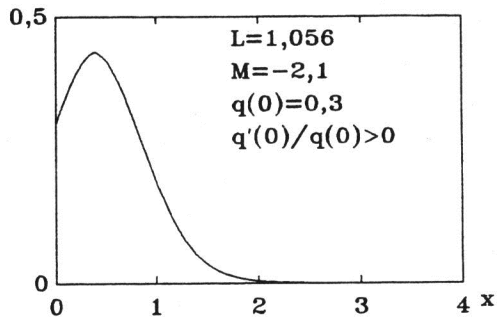
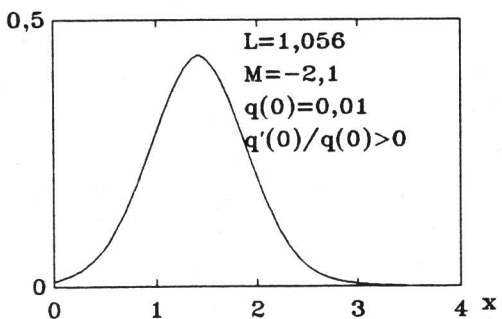
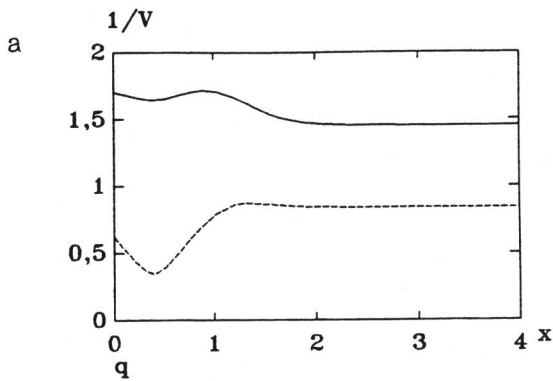
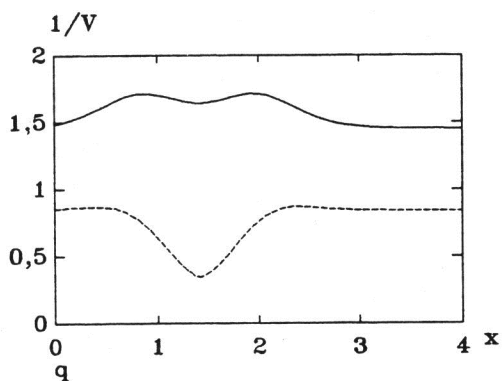
Как было показано в [1], конечность энергетического потока связана с асимптотикой элементов матрицы  $G$  при  $x \rightarrow \infty$ . Раскрывая матричное уравнение (I.9), определяющее  $G$ , получим для ее элементов  $g_{11}(x)$ ,  $g_{12}(x)$  уравнение

$$\ddot{f} - \frac{\dot{c}}{c} \dot{f} - cdf = 0,$$

а для элементов  $g_{21}(x)$ ,  $g_{22}(x)$  - уравнение

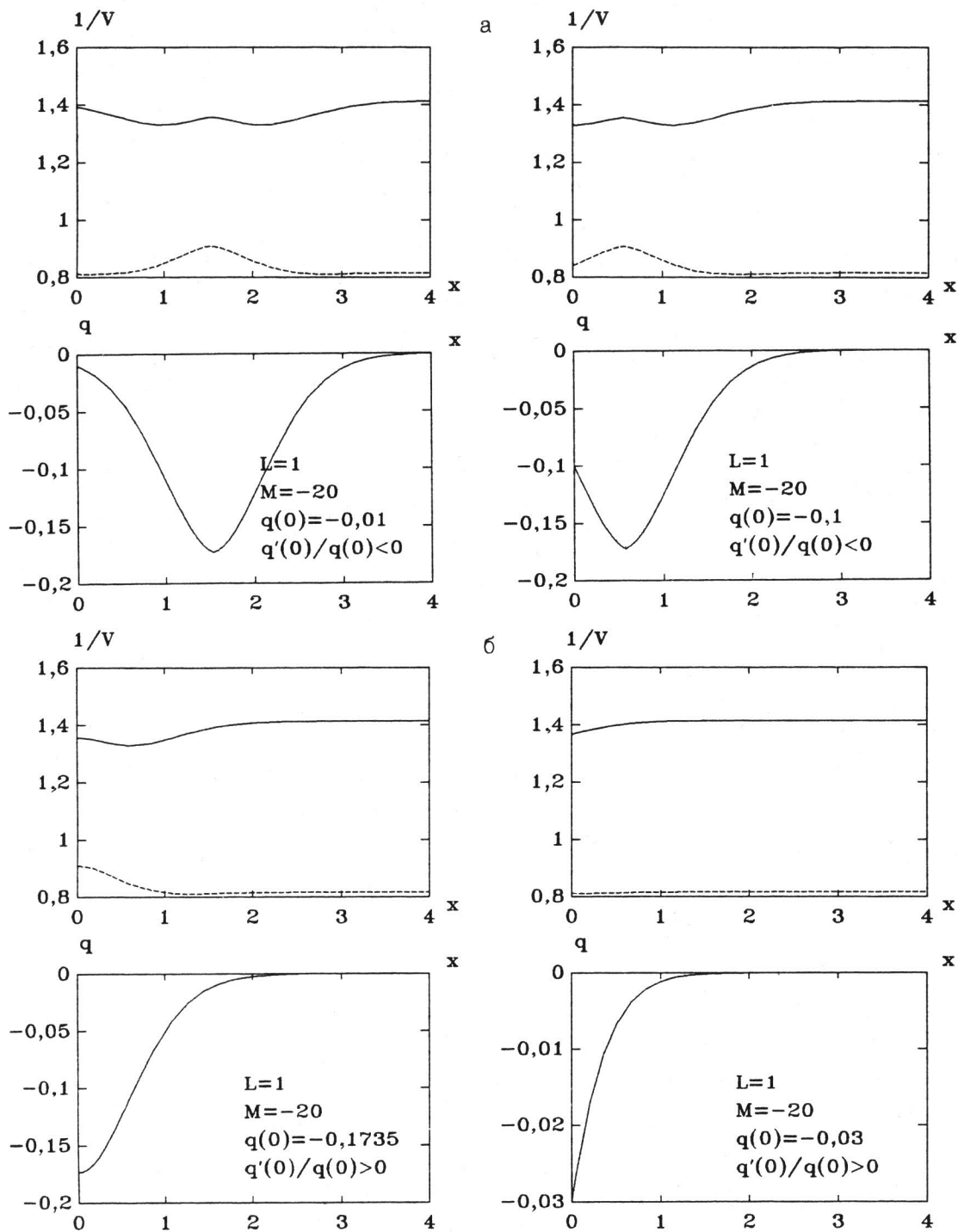
$$\ddot{h} - \frac{\dot{d}}{d} \dot{h} - cdh = 0.$$

Подставляя выражения функций  $c$  и  $d$  (I.10), (I.21), выразим коэффициенты в полученных уравнениях через переменные  $p = \mu_0 \mu^{-1}$  и  $q = 3Kp^3$ :



Р и с. 1. Скоростные разрезы в надпуассоновых средах

Немонотонная (а) и монотонная (б) зависимости  $q(x)$ : скорости поперечных (сплошная линия) и продольных (пунктир) волн (км/с):  $q(x) = 3\kappa_{0\mu}^{-3}(x)$  - интегральные кривые уравнения (7) для значений  $L$ ,  $M$  ( $\text{км}^{-2}$ ) и  $q$ , указанных на рисунках



Р и с. 2. Скоростные разрезы в подпуассоновых средах ( $K < 0$ )  
 Обозначения те же, что на рис. 1



$$\ddot{f} + \frac{\dot{p}}{p} \frac{1-2q}{1+q} \dot{f} + \frac{1+q}{3} \frac{\ddot{p}}{p} f = 0, \quad (20)$$

$$\ddot{h} - \frac{\dot{p}}{p} \dot{h} + \frac{1+q}{3} \frac{\ddot{p}}{p} h = 0. \quad (21)$$

Используя связь функций  $p$  и  $q$ , представим коэффициенты линейных дифференциальных уравнений (20) и (21) в виде

$$\frac{\dot{p}}{p} \frac{1-2q}{1+q} = -R + r_1(x), \quad \frac{1+q}{3} = \frac{R^2}{3} + r_2(x), \quad \frac{\ddot{p}}{p} = R + r_3(x),$$

где  $r_{1,2,3}(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Так как  $q \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ , то, разлагая выражение  $\left(\frac{\dot{q}}{q}\right)^2$  из (20) в биномиальный ряд по степеням  $q$ , можно найти главную часть  $r_i(x)$  и доказать, что

$$\int_0^{\infty} |r_i(x)| dx < \infty.$$

Отсюда, по утверждению из [10. Гл.V, п.3.1], уравнение (20) имеет фундаментальную систему решений с асимптотикой

$$f_{1,2} = \exp[(R/2 \pm i\sqrt{3}/6)x] (1+o(1)), \quad (22)$$

а уравнение (21) - с асимптотикой

$$h_{1,2} = \exp[(-R/2 \pm i\sqrt{3}/6)x] (1+o(1)). \quad (23)$$

Так как  $q \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ , то из формул (12) и (20) следует, что при  $x \rightarrow \infty$

$$\mu = \lambda = O(\exp(Rx)). \quad (24)$$

Поэтому формулы (22)-(24) в соответствии с [1] доказывают конечность энергетического потока.

### Характеризация матрицы D

Так же, как и в предыдущей статье, мы можем рассматривать построенное множество  $\lambda, \mu, \rho$  с точки зрения характеристики матрицы D. Задача характеристики ставится следующим образом. Пусть дана симметричная матрица

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}, \quad (25)$$

зависящая, вообще говоря, от глубины  $x$ . Нужно выяснить, можно ли по элементам этой матрицы найти единственные функции  $\lambda, \mu, \rho$ , и указать ограничения на элементы матрицы D, которые выделяют физически допустимые функции  $\lambda, \mu, \rho$ . В частном случае, когда  $D = \text{const}$  и  $K=0$ , решение этой задачи было описано в [1].

Предположим, что  $K \neq 0$ . Так как матрица  $D$  постоянна, то  $D(x) = D(0) = S(0)$ . Пользуясь (1) и условием  $p(0)=1$ , найдем, что при  $x=0$

$$-\omega^2 \mu_0 \frac{\rho}{\mu^2} - \ddot{p} = \frac{1}{3} \left( \frac{\dot{q}}{q} \right) - \frac{1}{9} \frac{2-q}{1+q} \left( \frac{\dot{q}}{q} \right)^2. \quad (26)$$

Подставляя в (26) выражение  $\left( \frac{\dot{q}}{q} \right)$  из (1), находим

$$-\omega^2 \mu_0 \frac{\rho}{\mu^2} - \ddot{p} = - \frac{\left( \frac{\dot{q}}{q} \right)^2 + 6L}{3(2-q)}.$$

С учетом (7) получим

$$-\omega^2 \mu_0 \frac{\rho}{\mu^2} - \ddot{p} = - \frac{M|q|^{1/3} + 6L(2-q)}{3(1+q)^2}. \quad (27)$$

Таким образом,

$$D(x) = D_0 = \begin{pmatrix} - \frac{M|q|^{1/3} + 6L(2-q)}{3(1+q)^2} & \frac{1}{3(1+q)} \sqrt{\varphi} \\ \frac{1}{3(1+q)} \sqrt{\varphi} & k - 2/3 \end{pmatrix},$$

где введены обозначения  $\varphi = M|q|^{1/3}(2-q) + 18L(1-2q)$ ,  $q=q(0)=q_0$ .

Опишем процедуру построения функций  $\lambda, \mu, \rho$  по матрице  $D$  (25).

**А л г о р и т м.** Определим  $K \neq 0$  по формуле

$$K = \beta + 2/3.$$

Положим  $2L=R^2$  и определим  $R$  по формуле

$$R = \sqrt{3 \det D}.$$

Положим  $q_0 = 3K$  и определим  $M$  из элемента  $\alpha$ . Это можно сделать, если  $K$  лежит в области, указанной в первом разделе. Найдем теперь  $\mu$  из дифференциального уравнения (7), в котором

$$q = 3K \left( \frac{\mu_0}{\mu} \right)^3.$$

Затем определим  $\lambda$  из (2), а  $\rho$  из (3).

**У т в е р ж д е н и е 4.** Строя функции  $\lambda, \mu, \rho$  в соответствии с описанным алгоритмом, получим физически допустимые  $\lambda, \mu, \rho$ , если  $\det D > 0$ ,  $\varphi(0) > 0$  и выполняется одно из следующих условий:

а)  $K > 0$ ,  $\gamma < 0$  и  $M < 0$ ;

б)  $K < 0$ ,  $\gamma > 0$  и  $M/R^2 < (1+8q_0 - 2q_0^2) q_0^{-4/3}$ ;

в)  $K > 0$ ,  $\gamma > 0$ ;

г)  $K < 0$ ,  $\gamma < 0$  и  $M < 0$ ,  $9R^2/M < 3/4 \sqrt[3]{2}$  при  $\lambda > 0$  или

$M < 0$ ,  $9R^2/M < 21/36 \sqrt[3]{5}$  при  $\lambda + 2/3 \mu > 0$ .

### Дисперсионное уравнение

Условия, эквивалентные условиям образования рэлеевской моды, выражаются в матричной задаче Штурма-Лиувилля (I.5)-(I.7) уравнением

$$\det(\dot{\mathbf{F}} + \mathbf{TF}) = 0 \quad \text{при } x=0, \quad (28)$$

где под  $\mathbf{F}$  имеется в виду матричное решение этой краевой задачи. Всюду в данном разделе рассматриваются значения функций  $\lambda, \mu, \rho, \varphi, q$  в точке  $x=0$ , но для упрощения записи нижний индекс 0 у этих значений опущен. Так как  $D = \text{const}$ , а  $\det D = R^2/3$ , то из структуры матричного потенциала  $A$  (I.11) следует, что  $\mathbf{F} = e^{-\zeta x} \mathbf{E}$ , где  $\zeta = \sqrt{\xi^2 - R^2/3}$ . Используя (I.8), запишем (28) в виде

$$\det \left[ \dot{\mathbf{F}} + \begin{pmatrix} -\frac{\dot{\mu}}{\mu} & \frac{1}{2} \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \\ 2\xi^2 - \omega^2 \frac{\rho}{\mu} - \mu \left( \frac{1}{\mu} \right) & 0 \end{pmatrix} \mathbf{F} \right] = 0. \quad (29)$$

С учетом (27) перепишем (29) в виде

$$\det \begin{pmatrix} -\zeta \pm \frac{\sqrt{\varphi}}{3(1+q)} & \frac{1}{6}(1-2q) \\ 2\xi^2 - \frac{M|q|^{1/3} + 3R^2(2-q)}{3(1+q)^2} & -\zeta \end{pmatrix} = 0,$$

где  $\varphi = M|q|^{1/3}(2-q) + 9R^2(1-2q)$ .

Раскрывая этот определитель, получим квадратное уравнение относительно  $\zeta$ :

$$2(1+q)\zeta^2 \mp \frac{\sqrt{\varphi}}{(1+q)}\zeta + \frac{(1-2q)}{6(1+q)^2} \left( M|q|^{1/3} + (1-2q)(4+q)R^2 \right) = 0.$$

Для того, чтобы выяснить вещественность  $\zeta$ , вычислим дискриминант  $\delta$  этого уравнения:

$$\delta = \frac{M|q|^{1/3}(2+q+8q^2) + R^2(1-2q)(27 - 4(1+q)(1-2q)(4+q))}{3(1+q)^2}. \quad (30)$$

Так как всюду на траекториях уравнения (7) обязательно

$$M|q|^{1/3} > -9R^2 \frac{1-2q}{2-q},$$

то, подставив вместо  $M|q|^{1/3}$  выражение  $-9R^2 \frac{1-2q}{2-q}$ , оценим этот дискриминант снизу. После некоторых преобразований найдем, что

$$\delta_{\min} = \frac{R^2(1-2q)^2(1+q)}{(2-q)} . \quad (31)$$

Из (31) вытекает, что для любых сред дискриминант (30) всегда положителен, и, следовательно, волновые числа Рэлея вещественные.

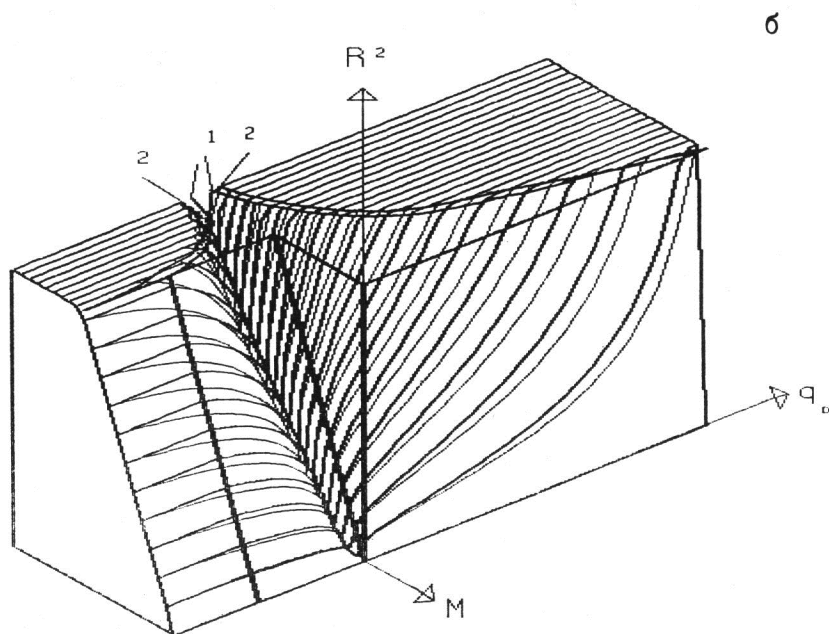
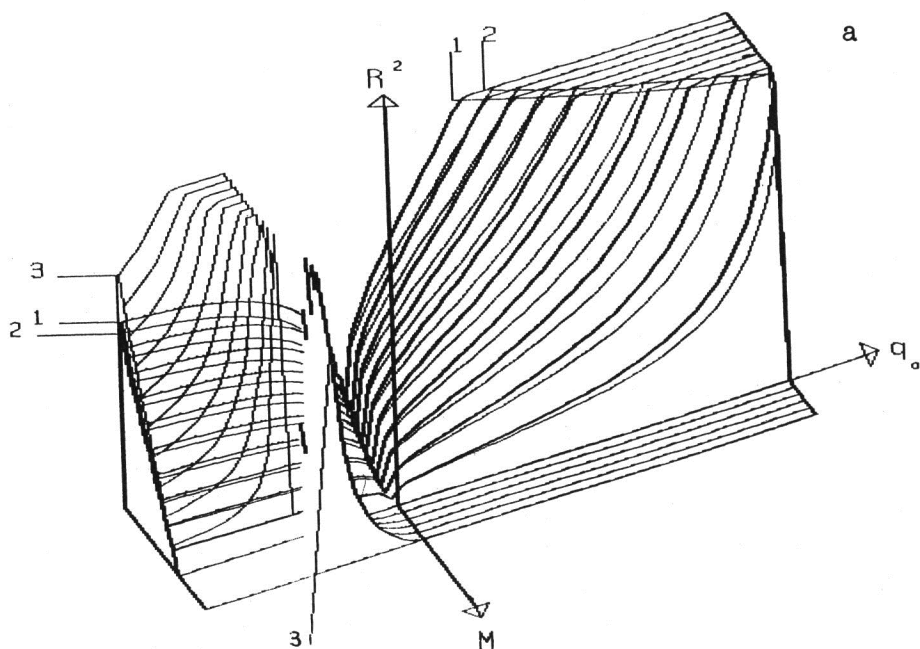
Дисперсионные свойства волн Рэлея в непуассоновых средах иллюстрируются на рис.3,а,б. Оба трехмерных графика относятся к случаю  $\lambda > 0$ ; вид поверхности при  $\lambda + 2/3 \mu > 0$  качественно тот же самый. Рис.3,а иллюстрирует дисперсионные свойства в тех полупространствах, где  $\mu$  монотонно возрастает с глубиной, а рис.3,б - в средах с немонотонным  $\mu$ . На обоих рисунках область положительных значений  $q_0$  соответствует надпуассоновому случаю, а область  $q_0 < 0$  - подпуассоновому случаю.

Опишем смысл различных областей в пространстве с осями  $q_0, M, R^2$ , которое разделяется поверхностями, изображенными на рис.3,а. В подпуассоновом случае при  $M > 0$  физически допустимые среды находятся выше поверхности 3; при  $M < 0$  эти среды занимают область выше поверхности 2, если над ней нет поверхности 3, или область между 2 и 3 там, где поверхность 3 существует. В надпуассоновом случае физически допустимые среды находятся выше поверхности 2 там, где она существует; в противном случае они занимают весь октант. Поверхность 1 в обоих случаях разделяет область с одной рэлеевской модой (ниже поверхности) и область, в которой рэлеевские волны отсутствуют (выше поверхности):

На рис.3,б область существования расположена между фронтальной поверхностью, состоящей из двух плоскостей (вертикальной и наклонной), и поверхностью 2. Между фронтальной поверхностью и поверхностью 1 находятся среды с одной, а между 1 и 2 - с двумя рэлеевскими модами.

Таким образом, при рассмотрении непуассоновых сред с постоянной матрицей  $D$  поведение рэлеевских мод оказывается в общих чертах таким же, как и в пуассоновом случае, а именно, в различных средах на характерной частоте могут существовать две рэлеевские моды с вещественными волновыми числами, одна такая мода или же ни одной.

В дальнейшем мы собираемся выяснить дисперсионные свойства этих сред во всем диапазоне частот, ниже и выше рассмотренной характерной частоты.



Р и с. 3. Дисперсионная поверхность и область допустимых значений параметров  $M$ ,  $R^2$ ,  $q_0$  для монотонных (а) и немонотонных (б) интегральных кривых уравнения (7)

**З а м е ч а н и е.** Одной из особенностей рассматриваемых сред является бесконечный рост напряжений с глубиной для части решений. Можно отбросить эту часть, потребовав, чтобы напряжения стремились к нулю с глубиной. Это приводит к рассмотрению условия  $\zeta > R/2$  как в (1.37), так и в (29). При этом область существования волн Рэлея сужается.

Мы благодарны В.Е.Федорову, который обратил наше внимание на это свойство.

### Литература

1. Маркушевич В.М., Цемахман А.С. D-постоянные среды и рэлеевские волны в них на характерных частотах. I. Пуассоновы среды // Наст. сб. С.149-157.
2. Маркушевич В.М. Вынужденные гармонические колебания рэлеевского типа и матричная задача рассеяния // Математические методы в сейсмологии и геодинемике. М.:Наука, 1986. С.119-135. (Вычисл. сейсмология; Вып. 19).
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.:Наука, 1987. 246с.
4. Фейнман Ф., Лейтон Ф., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т.7. Физика сплошных сред. М.: Мир, 1966. 290с.
5. Ляв А. Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 674с.
6. Панкович П.Ф. Теория упругости. М.; Л.: Оборонгиз, 1939. 640 с.
7. Вебстер А.Г. Механика материальных точек, твердых, упругих и жидких тел. М.; Л.: Гостехтеоретиздат., 1933. 635 с.
8. Снеддон Н.Н., Берри Д.С. Классическая теория упругости. М.: Физматгиз, 1961. 221 с.
9. Хан Х. Теория упругости. М.: Мир, 1988. 343 с.
10. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.

УДК 550.310:517.984.54

*Л.Ю.Бродов, В.В.Локцик, В.М.Маркушевич, Н.Н.Новикова,  
С.В.Синюхина, В.Е.Федоров*

ОПЫТ МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ВЕРХНЕЙ ЧАСТИ РАЗРЕЗА  
С ПОМОЩЬЮ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ВИБРАТОРА

*L.Yu.Brodov, V.V.Loctsik, V.M.Markushevich, N.N.Novikova,  
S.V.Sinyukhina, V.E.Feodorov*

MONOCHROMATIC SOUNDING OF THE UPPER PART OF VELOCITY  
CROSS-SECTION BY A HORIZONTAL VIBRATOR

Real in-field experiment with excitation of the stationary field  
of horizontal vibrations by a monochromatic horizontal vibrator