

**З а м е ч а н и е.** Одной из особенностей рассматриваемых сред является бесконечный рост напряжений с глубиной для части решений. Можно отбросить эту часть, потребовав, чтобы напряжения стремились к нулю с глубиной. Это приводит к рассмотрению условия  $\zeta > R/2$  как в (1.37), так и в (29). При этом область существования волн Рэлея сужается.

Мы благодарны В.Е.Федорову, который обратил наше внимание на это свойство.

### Литература

1. Маркушевич В.М., Цемахман А.С. D-постоянные среды и рэлеевские волны в них на характерных частотах. I. Пуассоновы среды // Наст. сб. С.149-157.
2. Маркушевич В.М. Вынужденные гармонические колебания рэлеевского типа и матричная задача рассеяния // Математические методы в сейсмологии и геодинатике. М.:Наука, 1986. С.119-135. (Вычисл. сейсмология; Вып. 19).
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.:Наука, 1987. 246с.
4. Фейнман Ф., Лейтон Ф., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т.7. Физика сплошных сред. М.: Мир, 1966. 290с.
5. Ляв А. Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 674с.
6. Панкович П.Ф. Теория упругости. М.:Л.: Оборонгиз, 1939. 640 с.
7. Вебстер А.Г. Механика материальных точек, твердых, упругих и жидких тел. М.:Л.: Гостехтеоретиздат., 1933. 635 с.
8. Снеддон Н.Н., Берри Д.С. Классическая теория упругости. М.: Физматгиз, 1961. 221 с.
9. Хан Х. Теория упругости. М.: Мир, 1988. 343 с.
10. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.

УДК 550.310:517.984.54

*Л.Ю.Бродов, В.В.Локцик, В.М.Маркушевич, Н.Н.Новикова,  
С.В.Синюхина, В.Е.Федоров*

ОПЫТ МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ВЕРХНЕЙ ЧАСТИ РАЗРЕЗА  
С ПОМОЩЬЮ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ВИБРАТОРА

*L.Yu.Brodov, V.V.Loetsik, V.M.Markushevich, N.N.Novikova,  
S.V.Sinyukhina, V.E.Feodorov*

MONOCHROMATIC SOUNDING OF THE UPPER PART OF VELOCITY  
CROSS-SECTION BY A HORIZONTAL VIBRATOR

Real in-field experiment with excitation of the stationary field  
of horizontal vibrations by a monochromatic horizontal vibrator

is described. The purpose of the experiment was to check practical possibility of determining velocity dependence on depth with the help of the Love modes characteristics on the fixed frequency of the source. Results of the data processing are presented and agree with results of the standard methods in general.

При сейсмической разведке, в особенности методом поперечных волн, большое значение имеет изучение верхней части разреза [1]. Общепринятые методы определения строения горизонтально-однородной упругой среды основаны на использовании волновых полей, возбуждаемых импульсными (или приведенными к импульсным) источниками, и анализе времени прихода упругих волн на поверхность. Возможен и другой способ решения задачи, основанный на изучении стационарного поля колебаний, создающегося гармоническим виброисточником. Исследование структуры этого поля и, в частности, поверхностных волн, являющихся наиболее важной его составляющей, также позволяет определить упругие свойства среды. Заметим, что этот метод дает дополнительно зависимость плотности от глубины. С математической точки зрения задача определения скорости распространения волн в горизонтально-однородной упругой среде по стационарному полю, возбуждаемому гармоническим виброисточником на свободной поверхности этой среды, была рассмотрена в работах [2-5].

Целью эксперимента, которому посвящена эта статья, является опытная проверка практической возможности восстановления модели среды с помощью стационарных горизонтально поляризованных поперечных волн.

#### Решение обратной задачи

Разработке методов решения обратной задачи посвящены работы [2-5]. Показано, что приближенное решение обратной задачи можно получить, используя информацию только о волнах Лява, не учитывая другие компоненты волнового поля. Было, в частности, доказано, что для каждого разреза существует своя, достаточно высокая частота зондирования, при которой практически вся информация о разрезе сосредотачивается в характеристиках бегущих волн Лява. Таким образом, получаемое приближенное решение обратной задачи очень близко к точному. Как показывает моделирование на ЭВМ [4], для разрезов со сравнительно слабой дифференциацией свойств это происходит при умеренных частотах зондирования, соответствующих обычным частотам, используемым при сейсморазведке.

В [2-5] задача рассматривалась для осесимметричного источника вращательного типа, который возбуждает исключительно  $SH$ -колебания. Значения смещений (их амплитуды и фазы), замеренные на поверхности вдоль некоторой прямой, проведенной из центра осесимметричного источника, есть та информация, которую достаточно использовать для решения обратной задачи. Так как источник осесимметричный, то направление, вдоль которого производятся измерения, может быть любым. Замеры вдоль прямой делаются тем дальше, чем большая глубина исследуется. Моделирование показало, что длина горизонтального профиля должна составлять около 10 глубин [4]. Пространственный спектральный анализ смещений вдоль этого профиля, рассматриваемых в функции расстояния до источника, позволяет выделить волновые числа и амплитуды мод волн Лява.

В работах [2-5] были получены явные формулы, позволяющие с большой точностью находить скорость распространения волн в твердой упругой среде по характеристикам поверхностных волн Лява. То же было сделано для определения скорости распространения волн в жидкой среде по нормальным (они называются также бегущими или прогрессивными) модам. Однако свойства этих аналитических выражений не позволяют проводить вычисления непосредственно по ним, так как получается численно неустойчивый алгоритм. Для того, чтобы вычисления можно было проводить на ЭВМ со стандартной точностью, был разработан специальный алгоритм [4]. Вначале он был приспособлен для решения обратной задачи для жидкой упругой среды [6]. На его основе было промоделировано возбуждение, сосчитаны обратные задачи для стационарного поля в слоистой жидкости и выяснено, что при частотах 5-30 Гц по давлению вблизи поверхности можно определить структуру океанического низкоскоростного волновода.

Приведенные в [6] графики для модельных примеров подтвердили теоретическое положение [5], что с ростом частоты зондирования точность аппроксимации увеличивается. Были также даны оценки погрешности в определении волновых чисел и амплитуд из экспериментальных данных, при соблюдении которых сохраняется сходимость процедуры восстановления среды.

Так как формулы для восстановления моделей жидкой среды по колебаниям давления и твердой среды по  $SH$ -колебаниям имеют много общего, то на основе методов, предложенных в [2-8], были разработаны модификации алгоритма и программы обращения, приспособленные к расчетам скорости распространения волн в твердых упругих средах. В настоящей работе эта программа используется для решения обратной

задачи для модельного примера и обращения данных, полученных в результате полевого эксперимента. Краткое описание математической теории, на основе которой был создан алгоритм вычисления скорости распространения волн в твердой упругой вертикально-неоднородной среде, отнесено в дополнение. Сделаем замечание о применимости идеально упругой модели к реальной среде, которая изучается в нашей статье. Эффекты диссипации и рассеяния волн на неоднородностях одного порядка и в реальных средах их величина пропорциональна частоте. Вклад этих процессов на используемой частоте и базе наблюдений не стоит преувеличивать, но, несомненно, его стоит учесть, и мы надеемся сделать это в будущем.

### Моделирование метода обращения на ЭВМ

Анализ качества получаемого по характеристикам волн Лява решения обратной задачи для разрезов, представляющих интерес для сейсморазведки, а также проверка конкретной вычислительной схемы осуществлялась с помощью численного моделирования. Для этого использовалась программа решения прямой задачи. Она предполагает, что источник - осесимметричный, однако наряду с вычислением волнового поля, которое определяется и средой, и источником, данный алгоритм позволяет рассчитывать параметры волн Лява - волновые числа  $\lambda_k$  и числа, обратные квадратам норм соответствующих собственных функций -  $C_k$ . Величины  $\lambda_k$ ,  $C_k$  зависят только от параметров среды и частоты  $\omega$ , на которой работает источник. В дальнейшем именно эти параметры используются для решения обратной задачи. Таким образом, имеющийся алгоритм решения прямой задачи вполне пригоден для сопоставления с результатами работы программы для решения обратной задачи и для случая, когда источник не осесимметричный.

В программе [2,8] для решения прямой задачи рассматривались упругие среды, удовлетворяющие следующим соотношениям. Среда состоит из конечного числа пластов. Первый массив чисел  $z_i, i=1, \dots, n$ , указывает глубины границ этих пластов. Модуль сдвига  $\mu$  является непрерывной функцией,  $a\sqrt{\mu}$  - линейной в каждом пласте,  $\mu$  задается значением  $\mu(0) = \mu_0$  на поверхности и массивом нормированных значений  $\bar{\mu}_i = \mu_i / \mu_0$ , где  $\mu_i$  - значение на подошве  $i$ -го слоя. Оказалось удобно проводить вычисления в следующих единицах измерения: длина - км, время - с, масса - т, сила - т·км/с<sup>2</sup>, сила на единицу площади - т/(с<sup>2</sup>·км). В этих единицах модуль сдвига имеет порядок  $10^{12}$  т·с/км<sup>2</sup>. Нормировка вызвана большими значениями  $\mu$  в моделируемых средах. Скорость поперечных волн в каждом пласте постоянна, и ее значения

$b_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) задаются. Так как  $\mu$ , по предположению, является непрерывной функцией глубины, то для сред, где  $\mu$  меняется скачком от слоя к слою, приходится вводить фиктивные тонкие слои, в которых  $\sqrt{\mu}$  линейно меняется, а скорость постоянна (следовательно, плотность  $\rho$  меняется согласованно с  $\mu$ ). Действуя таким образом, можно слоисто-однородную среду аппроксимировать моделью с непрерывным изменением  $\mu$ .

В приведенном ниже модельном примере по заданной слоистой среде сначала по алгоритму прямой задачи находятся параметры волн Лява  $\lambda_k, C_k$ , а затем эта среда вновь восстанавливается по алгоритму решения обратной задачи. Результаты вычислений изображены на рис.1, где ступенчатая функция - заданная модель среды, а осциллирующая - результат ее восстановления при фиксированной частоте  $\omega$ . Среда задана следующим образом:

$z_0 = 0.0$ (км),	$\mu_0 = 10^{10}$ (т·с/км <sup>2</sup> ),	$b_0 = 0.25$ (км/с),
$z_1 = 0.010$ ,	$\mu_1 = 1.00$ ,	$b_1 = 0.25$ ,
$z_2 = 0.011$ ,	$\mu_2 = 2.88$ ,	$b_2 = 0.4$ ,
$z_3 = 0.05$ ,	$\mu_3 = 2.88$ ,	$b_3 = 0.4$ ,
$z_4 = 0.051$ ,	$\mu_4 = 33.6$ ,	$b_4 = 1.25$ .

В данном случае изучаемая среда состоит из двух слоев и подстилающего полупространства, где подошвы слоев имеют следующие глубины:  $z_1 = 0.01$  км,  $z_2 = 0.05$  км, а модуль сдвига  $\mu$  меняется скачком от слоя к слою. Для сохранения непрерывности  $\mu$  на границах введено два дополнительных тонких слоя. В верхнем слое  $\mu = \mu_0 = 10^{10}$  т·с/км<sup>2</sup>. Частота зондирования равна 20 Гц.

На рис.1 изображен результат решения обратной задачи для модельного примера. Функция  $1/b^2(z)$ , построенная по шести модам ( $\lambda_i, C_i, i=1, \dots, 6$ ), является непрерывной осциллирующей функцией и отображает изменение скоростей в среде с глубиной. Сопоставление ее с исходной моделью, изображенной на этом рисунке в виде ступенчатой функции, показывает, что в однородных слоях функция  $1/b^2(z)$  колеблется около постоянного значения  $1/b^2$ , соответствующего заданной модели. Можно показать, что период и амплитуда колебаний функции  $1/b^2(z)$  около постоянного значения скорости в однородных слоях с увеличением частоты зондирования уменьшается. Резкие изменения значений  $1/b^2(z)$  соответствуют глубинам границ между слоями. Функция  $1/b^2(z)$  всегда начинается из нуля, и поэтому тонкий приповерхностный слой плохо описывается. Причиной этого является пренебрежение иными, кроме волн Лява, компонентами волнового поля.



Этот пример подтверждает возможность определения по стационарному полю волн Лява модели среды, представляющей интерес для сейсморазведки, при обычной для сейсморазведки частоте зондирования.

#### Описание эксперимента

Эксперимент по восстановлению скоростного разреза с помощью поверхностных волн Лява в натуральных условиях проводился в Волгоградской области в 50 км от поселка Красный Яр, на Алешниковском участке. Запись велась сейсмостанцией "Прогресс-3". Колебания возбуждались вибратором СВГ-10/60. Регистрация проводилась по системе Y-Y. Горизонтальные сейсмоприемники, объединенные в 48 групп, располагались на поверхности вдоль профиля и были ориентированы перпендикулярно направлению излучения. Каждая группа длиной 50 м состояла из 11 сейсмоприемников, находящихся на расстоянии 5 м друг от друга. Таким образом, если пронумеровать группы от 1 до 48, двигаясь от вибратора, то ближайший к вибратору сейсмоприемник последующей группы и самый удаленный от вибратора сейсмоприемник предыдущей группы находились в одной точке. Все 11 сейсмоприемников каждой группы соединены последовательно, так что напряжение на каждом канале (сигнал) равно сумме напряжений на 11 сейсмоприемниках группы. Центры групп размещались на пикетах  $1^{25}$  -  $24^{45}$ . Вибратор работал в монохроматическом режиме поочередно на частотах  $f = 10, 15,$

20, 25 Гц на следующих пикетах:  $0^{00}$ ,  $26^{45}$ ,  $26^{40}$ ,  $26^{35}$ ,  $26^{30}$ ,  $26^{25}$ ,  $26^{20}$ ,  $26^{15}$ ,  $26^{10}$ ,  $26^{05}$ .

При работе с экспериментальным материалом возникли некоторые отклонения от теоретической схемы, изложенной в дополнении. Прежде всего, использовался не осесимметричный источник, а вибратор горизонтального типа. Поэтому, в соответствии с замечанием, сделанным в дополнении, необходимо уметь определять для этого источника  $C_k$  по амплитудам поверхностных волн Лява  $A_k$  и волновым числам  $\lambda_k$ . В случае, когда размеры источника малы по сравнению с расстоянием до приемника удобно использовать представление о точечном сосредоточенном источнике. В данном эксперименте приемники располагались на таком расстоянии от вибратора, что источник можно было считать с хорошим приближением точечной горизонтально-направленной силой, а также воспользоваться асимптотической формулой для волнового поля [9]. Приведем для этого случая связь между  $C_k$  и  $A_k$ . Пусть на поверхности действует сосредоточенная сила  $F=F_y$ , тогда для лявовского смещения, перпендикулярного профилю (система  $Y-Y$ ), имеет место следующая формула, связывающая (с точностью до постоянного множителя)  $A_k, C_k, \lambda_k$ :

$$C_k = A_k \sqrt{2} \pi \lambda_k .$$

Дальнейшая интерпретация проводилась в предположении, что в колебаниях преобладают волны Лява. Так как вибратор работал в монохроматическом режиме, то через некоторое время после начала его работы наблюдалась стационарная картина колебаний.

При обработке полевых данных для определения волновых чисел и амплитуд мод волн Лява при некоторой фиксированной частоте зондирования необходимо знать амплитуду и сдвиг фазы смещения относительно вибратора на каждом канале. Характеристики поверхностных волн можно найти с помощью спектрального преобразования амплитуд и фаз смещений как функций расстояния до вибратора. Для повышения разрешающей способности спектрального анализа были объединены данные по 48 каналам для различных положений вибратора при фиксированной частоте. Если среда горизонтально-однородна, то это дает правильный результат. Объединение сейсмограмм для 10 различных положений вибратора равносильно уменьшению расстояния между соседними каналами в 10 раз, т.е. до 5 м. К сожалению, из-за высокого уровня шума данные последних 18 каналов в каждой совокупности из 48 сейсмограмм не учитывались. Пока мы провели анализ данных эксперимента для частот зондирования равной 20 Гц. На каждом канале регистрировались смещения, представляющие собой сумму смещений на

И2.Зак.1304

всех 11 сейсмоприемниках группы, отстоящих друг от друга на расстоянии  $\Delta x = 5\text{м}$ . Чтобы получить истинную зависимость амплитуды от волнового числа, необходимо учесть группирование.

Пусть  $x_0$  - фиксированная точка на поверхности, в которой производятся измерения,  $r$  - расстояние до вибратора. Смещения в этой точке приближенно можно представить в виде

$$U_0(x_0, t) \approx \frac{1}{\sqrt{r_0}} \sum_{k=1}^n A_k \exp[i(\omega t + \lambda_k x_0)],$$

а в точке  $x_j = r_0 + \Delta x j$  -

$$U_j(x_0 + \Delta x j, t) \approx \frac{1}{\sqrt{r_0 + \Delta x j}} \sum_{k=1}^n A_k \cos[\omega t + \lambda_k (x_0 + \Delta x j)].$$

Если рассматривать сумму смещений для  $j=0, \dots, 10$  и если  $\Delta x j$  мало по сравнению с  $r_0$ , то

$$U \approx \frac{1}{\sqrt{r_0}} \left\{ \sum_{j=0}^{10} \sum_{k=1}^n A_k \cos[\omega t + \lambda_k (x_0 + \Delta x j)] \right\}.$$

С помощью несложных вычислений получаем

$$U \approx \frac{1}{\sqrt{r_0}} \sum_{k=1}^n A_k \left[ 1 + \sum_{m=1}^5 (2 \cos(m \Delta x \lambda_k)) \right] \cos(\omega t + \lambda_k x_0 + 5 \Delta x \lambda_k).$$

Обозначив через  $B_k(\lambda_k)$  амплитуды, которые можно получить с помощью спектрального анализа (по расстоянию) смещений, когда сейсмоприемники в косо объединены в группе, получаем выражение для истинных амплитуд поверхностных волн  $A_k(\lambda_k)$ :

$$A_k = \frac{B_k}{\left\{ 1 + \sum_{m=1}^5 (2 \cos(m \Delta x \lambda_k)) \right\}}, \quad k=1, \dots, n. \quad (1)$$

Нули знаменателя имеют вид

$$11/2 \Delta x \lambda_k = \pi m, \quad m=1, 2, \dots,$$

откуда

$$\lambda_k \approx 114 m \text{ при } \Delta x = 0,005, \quad m=1, 2, \dots \quad (2)$$

При  $\lambda_k$  близких к значениям, указанным в (2), формула (1) теряет смысл, так как любые ошибки приводят к очень большим отклонениям амплитуды от действительного значения.



Итак, из-за группирования выпадает часть информации, так как группа сейсмоприемников почти полностью подавляет волны, длина которых  $L_k = 2\pi/\lambda_k$ , где  $\lambda_k$  удовлетворяет (2).

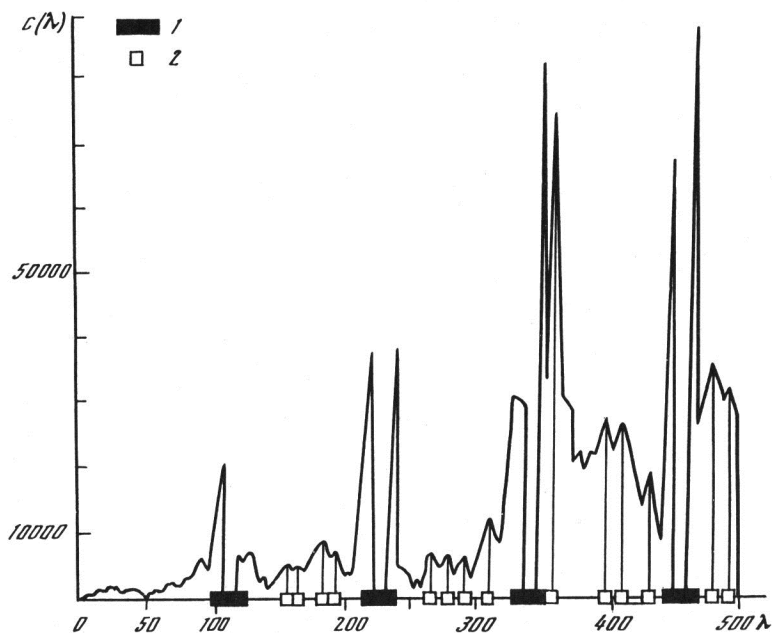
Таким образом, для определения  $A_k$  использована формула (1), (за исключением интервалов  $[-s+\lambda_k, \lambda_k+s]$ , где  $\lambda_k$  удовлетворяет (2)). Далее, используя формулу (Д3) (см. дополнение), можно получить нормы  $C_k$ .

Функция  $C(\lambda)$  получена как  $C(\lambda) = \sqrt{\lambda} A(\lambda)$ .  $A(\lambda)$  - результат преобразования Фурье от  $A(x)$ , где  $A(x)$  - амплитуда смещения на поверхности на расстоянии  $x$  от вибратора. На рис.2 отмечены наиболее выделяющиеся пики значений -  $C_i$  и соответствующие им значения  $\lambda_i$ . Набор значений  $C_i, \lambda_i, (i=1, \dots, 15)$  - исходная информация для решения обратной задачи.

На рис.3 изображены результаты решения обратной задачи по экспериментальным данным. Полученная в результате обработки экспериментальных данных функция  $1/b(z)$  в целом аналогична по характеру кривой на рис.1. На ней также выделяются участки резких изменений  $1/b$  и осцилляции вблизи постоянных значений  $1/b$ . Аппроксимация этой кривой кусочно-постоянной функцией позволяет выделить в разрезе четыре однородных слоя на полупространстве. Таким образом, получается модель со следующими параметрами:

$$\begin{array}{ll} z_1 = 0,033 \text{ (км)}, & b_1 = 0,253 \text{ (км/с)}, \\ z_2 = 0,055, & b_2 = 0,307, \\ z_3 = 0,100, & b_3 = 0,430, \\ z_4 = 0,145, & b_4 = 0,745. \end{array}$$

Сопоставление с априорными представлениями показывает, что в результате эксперимента получены более детальные данные. Удовлетворительно совпадает по положению граница на глубине около 50 м, а также величина скорости в первом слое, оказавшемся в результате эксперимента несколько большей мощности. Совпала и скорость в подстилающих отложениях, но подошва их сместилась приблизительно на 50 м. Выделилось также дополнительно к априорному разрезу два слоя с промежуточными значениями скоростей. Несмотря на отмеченные различия, полученный результат не противоречит явно исходным предположениям о строении среды. Более того, экспериментальные данные находятся в хорошем согласии с годографом первых вступлений поперечных волн на данном конкретном участке, где проводился эксперимент.



Р и с. 2. Пример выделения величин  $C_k$  по экспериментальным значениям функции  $C(\lambda)$

1 - интервалы, выпавшие из анализа из-за группирования сейсмоприемников. 2 - значения  $\lambda_i$  ( $i=1, \dots, 15$ ), которым соответствуют наибольшие значения  $C_i$  ( $i=1, \dots, 15$ ) функции  $C(\lambda)$



Р и с. 3. Восстановление скоростного разреза в результате обработки экспериментальных данных при частоте зондирования 20 Гц

1 - априорные сведения о строении верхней части разреза в данном районе; 2 - кривая, полученная в результате решения обратной задачи по экспериментальным данным (по 15 модам волн Лява); 3 - модель среды, полученная в результате интерпретации кривой 2; 4 - разрез по годографу первых вступлений ( $\tau$ -метод)

## Выводы

Очевидно, что описанный в статье эксперимент является лишь первым шагом в применении метода обращения стационарных полей колебаний для изучения верхней части разреза при сейсморазведке. Для более уверенного выяснения разведочных возможностей данного подхода необходимо проведение соответствующих экспериментов в более широком масштабе с более надежным и детальным изучением разреза другими методами в месте проведения экспериментов. Необходимо совершенствовать и методику экспериментов: вести регистрацию волн в отдельных точках без группирования, увеличить длительность излучения и базу наблюдений на системах увязанных профилей. Необходимо повысить эффективность обработки данных - автоматизировать ее, проводя усреднение по большим ансамблям данных, повысить точность отсчета фаз и амплитуд. Необходимо опробовать зондирование на разных частотах, с тем, чтобы наряду с повышением точности и детальности определения скоростного разреза найти зависимость плотности и модулей упругости от глубины.

## Д О П О Л Н Е Н И Е

1. Установившиеся крутильные колебания от осесимметричного источника с частотой  $\omega$  в горизонтально-однородной среде с плотностью  $\rho(z)$  и модулем сдвига  $\mu(z)$  описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \left( \omega^2 \frac{\rho}{\mu} - \frac{(\sqrt{\mu})''}{\sqrt{\mu}} \right) v = 0$$

с краевым условием

$$\left( \mu \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{2} \mu' v \right) \Big|_{z=0} = F(r),$$

где  $V(r, z) \exp(i\omega t) \sqrt{\frac{\mu(0)}{\mu(z)}}$  - компонента смещения;  $F(r) \exp(i\omega t)$  - функция источника и по определению  $( )' \equiv \frac{d}{dz} ( )$ .

После преобразования Фурье-Бесселя по переменной  $r$

$$y(z, \lambda) = \int_0^{\infty} V(r, z) r I_1(\lambda r) dr,$$

где  $I_1$  - функция Бесселя первого порядка; рассматриваемая задача нахождения параметров среды по смещениям на поверхности сводится к обратной задаче Штурма-Лиувилля: найти потенциал  $q(z)$  на полуоси  $0 \leq z < \infty$  в уравнении

$$y''(z, \lambda) + (q(z) - \lambda^2) y(z, \lambda) = 0 \quad (Д1)$$

по известной из измерений так называемой функции Вейля:  $\frac{Y}{Y' - \theta Y}(0, \lambda)$ , которая приближенно представима в виде [2,3]

$$\frac{Y}{Y' - \theta Y}(0, \lambda) \approx -\frac{1}{\lambda - \lambda_0} - \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{\lambda^2 - \lambda_k^2} - \sum_{j=1}^m \frac{D_j}{\lambda^2 + \mu_j^2}, \quad (D2)$$

где  $C_k, D_j > 0, 0 \leq \lambda < \infty$ ;  $y(z, \lambda)$  - решение (D1), стремящееся к нулю

$$\text{при } x \rightarrow \infty, \theta = \frac{1}{2} \frac{\mu'}{\mu}(0), \quad \varphi(z) = \left( \omega^2 \frac{\rho}{\mu} - \frac{(\sqrt{\mu})''}{(\sqrt{\mu})} \right).$$

Для того, чтобы потенциал  $\varphi(z)$  не имел особенностей в нуле, нужно, чтобы

$$\lambda_0 = -\theta - \sum_{k=1}^n C_k - \sum_{j=1}^m D_j.$$

Хотя явные формулы для нахождения  $\varphi(z)$  выписаны в [3] для общего случая, когда  $n \neq 0$  и  $m \neq 0$ , мы пользуемся фактически лишь характеристиками отрицательного дискретного спектра  $\{C_k\}$  и  $\{\lambda_k\}$ . Это связано с тем, что только эти характеристики мы пока можем эффективно извлекать из результатов экспериментов, поскольку  $\lambda_k$  соответствуют волновым числам поверхностных волн, а величины  $C_k$  можно определить, зная параметры источника,  $\lambda_k$  и амплитуды поверхностных волн  $A_k$ .

Для крутильного источника формула, связывающая амплитуды колебаний на поверхности, функцию источника, волновые числа  $\lambda_k$  с нормами собственных функций и с функцией Вейля имеет вид [7,8]:

$$A_k = \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tilde{F}(\lambda_k) \right) \frac{1}{\mu(0)} C_k \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}, \quad (D3)$$

где  $C_k$  - коэффициенты в разложении функции Вейля (D2);  $\tilde{F}(\lambda_k)$  - преобразование Фурье-Бесселя от функции источника;  $A_k$  - определяются формулами для смещений в дальней зоне

$$U(0, r, t) = V(r, 0) \exp(i\omega t) \approx \frac{1}{\sqrt{r}} \left[ \sum_{k=1}^n A_k \exp(i\lambda_k r + \frac{\pi}{4}) \right] \exp(i\omega t).$$

Сделаем одно важное замечание. Хотя при вычислении  $C_k$  по экспериментальным данным используются амплитуды поверхностных волн  $A_k$ , которые зависят не только от среды, но и от источника, сами  $C_k$  от источника не зависят и определяются, как и  $\lambda_k$ , только средой. Если существует метод определения  $C_k$  по амплитудам поверхностных волн, вызванных источником, отличающимся от крутильного, то данные экс-

перимента с таким источником можно также использовать для восстановления среды по характеристикам дискретного спектра.

Зная характеристики дискретного спектра  $C_k$  и  $\lambda_k$ , мы можем при достаточно большой частоте  $\omega$  восстановить не весь потенциал  $q(z)$ , а его часть  $\omega^2 \rho(z)/\mu(z)$ , т.е. находить скорость распространения волн в соответствующей среде.

Величины  $-\lambda_k^2$  образуют отрицательный дискретный спектр, а величины  $C_k$  (так называемые нормировочные числа) есть величины, обратные квадратам норм собственных функций уравнения (Д1), удовлетворяющих в нуле краевому условию

$$y'(0)=0, y(0)=1. \quad (Д4)$$

Для задачи (Д1), (Д4) потенциал  $q(z)$  находится по следующим формулам [2,3], уточняющим известные формулы Гельфанда-Левитана-Иоста-Кона [10]:

$$q(z)=2\frac{d^2}{dz^2} \ln \det W(z), \quad (Д5)$$

$$W_{sr} = \frac{2\text{sh}[(\xi_s + \lambda z) + (\xi_r + \lambda_r z)]}{\lambda_s + \lambda_r} + (1-\delta_{sr}) \frac{2\text{sh}[(\xi_s + \lambda_s z) - (\xi_r + \lambda_r z)]}{\lambda_s - \lambda_r} + \\ + \delta_{sr} \left[ 2 \left( z - \frac{\lambda_0}{\lambda_0^2 - \lambda_r^2} \right) - \frac{4\lambda_r^2}{C_r} \frac{1}{\lambda_0^2 - \lambda_r^2} \right], \quad (Д6)$$

где

$$\xi_i = -\text{Arcth} \frac{\lambda_0}{\lambda_i}, \quad \delta_{sr} = \begin{cases} 1, & s=r, \\ 0, & s \neq r, \end{cases} \quad \lambda_0 = -\theta - \sum_{j=1}^m C_j - \sum_{j=1}^m D_j.$$

Будем считать, что  $\lambda_0 \leq 0$ .

Для водной среды был разработан алгоритм и создана программа для вычисления  $q(z)$  [4,6]. Матрица  $W(z)$  в этом случае выглядит так:

$$W_{sr} = \frac{1 - \exp(-2(\lambda_s + \lambda_r)z)}{\lambda_s + \lambda_r} - (1 - \delta_{sr}) \frac{\exp(-2\lambda_s z) - \exp(-2\lambda_r z)}{\lambda_s - \lambda_r} + \\ + \delta_{sr} \exp(-2\lambda_r z) (2z + 4\lambda_r^2/C_r). \quad (Д7)$$

Чтобы в случае твердой упругой среды использовать уже созданный алгоритм, потребовалось преобразовать формулу (Д6) записи матрицы  $W(z)$  к виду, максимально приближенному к (Д7):

$$W_{sr}(z) = \frac{1 - \text{sgn}(|\lambda_0| - \lambda_r) \text{sgn}(|\lambda_0| - \lambda_s) \exp(-2(\eta_s + \eta_r))}{\lambda_s + \lambda_r} +$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - \delta_{sr}) \frac{\operatorname{sgn}(|\lambda_0| - \lambda_s) \exp(-2\eta_s) - \operatorname{sgn}(|\lambda_0| - \lambda_r) \exp(-2\eta_r)}{\lambda_s - \lambda_r} - \\
& - \delta_{sr} \operatorname{sgn}(|\lambda_0| - \lambda_r) \exp(-2\eta_r) \left[ 2 \left( z + \frac{|\lambda_0|}{\lambda_0^2 - \lambda_r^2} \right) - \frac{4\lambda_r^2}{C_r} \frac{1}{\lambda_0^2 - \lambda_r^2} \right]. \quad (D8)
\end{aligned}$$

Здесь  $\eta_i = \xi_i + \lambda_i z$ ;  $\xi_i = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{|\lambda_0| + \lambda_i}{|\lambda_0| - \lambda_i} \right|$ ;  $i = 1, \dots, n$ .

Если существует номер  $k_0$  такой, что  $\lambda_{k_0} = |\lambda_0|$ , то элементы  $k$ -го столбца, стоящие вне диагонали, будут иметь вид

$$W_{sk_0}(z) = (1 - \exp(-2\lambda_s z)) \frac{1}{|\lambda_0| + \lambda_s}, \quad s = 1, \dots, k_0 - 1, k_0 + 1, \dots, n;$$

элементы  $k_0$ -й строки, стоящие вне диагонали -

$$W_{k_0 r}(z) = (1 - \exp(-2\lambda_r z)) \frac{1}{|\lambda_0| + \lambda_r}, \quad k = 1, \dots, k_0 - 1, k_0 + 1, \dots, n;$$

диагональный элемент -

$$W_{k_0 k_0}(z) = (1 - \exp(-2|\lambda_0|z)) \frac{1}{2|\lambda_0|} + \exp(-2|\lambda_0|z) \frac{1}{C_k}.$$

Таким образом, вычисление потенциала для задачи (D1), (D4) по формулам (D5), (D8) потребовало небольших изменений в уже действующей программе [4].

Результаты расчетов при  $\lambda_0 = 0$  оказались столь же хорошими, как и в [6] для водной среды. Неожиданно, использование  $\lambda_0 \neq 0$  в (D6) привело не к ожидаемому улучшению, а к ухудшению точности восстановления потенциала. Этот экспериментальный факт пока не имеет объяснения.

#### Литература

1. Пузырев Н. Н., Тригубов А. В., Бродов Л. Ю. и др. Сейсмическая разведка методом поперечных и обменных волн. М.: Недра, 1985. 277с.
2. Маркушевич В.М., Резников Е.Л. Явное выражение  $q(z)$  через рациональную  $y'/y(0, \lambda)$  для уравнения  $y''(z, \lambda) + (q(z) - \lambda^2)y(z, \lambda) = 0$  на полуоси // Логические и вычислительные методы в сейсмологии. М.: Наука, 1984, С. 103-110. (Вычисл. сейсмология; Вып. 17).
3. Маркушевич В.М., Новикова Н.Н. Явное восстановление потенциала через рациональную функцию Вейля для задачи Штурма-Лиувилля на полуоси // Теория и анализ сейсмологической информации. М.: Наука, 1985. С. 185-200. (Вычисл. сейсмология; Вып. 18).
4. Маркушевич В. М., Новикова Н.Н. Метод вычисления потенциалов для некоторых рациональных импедансов: Препр. ВИНТИ. N7583-84. М., 1984. 72 с.

5. Новикова Н.Н., Хенкин Г.М. О восстановлении оператора Штурма-Лиувилля по характеристикам дискретного спектра // Численное моделирование и анализ геофизических процессов. М.: Наука, 1987. С.174-185. (Вычисл. сейсмология; Вып. 20).
6. Маркушевич В.М., Новикова Н.Н., Повзнер Т.А. и др. Метод определения акустического профиля по нормальным монохроматическим волнам // Математические методы в сейсмологии и геодинамике. М.: Наука, 1986. С. 135-145. (Вычисл. сейсмология; Вып. 19).
7. Маркушевич В.М., Резников Е.Л. Применение метода Фурье к уравнению стоячих SH-волн в полупространстве // Теория и анализ сейсмологических наблюдений. М.: Наука, 1979. С. 69-79. (Вычисл. сейсмология; Вып. 12).
8. Левшенко В.Т., Маркушевич В.М., Резников Е.Л. О расчете смещений среды при вибросондировании крутильными колебаниями // Математические модели строения строения Земли и прогноза землетрясений. М.: Наука, 1981. С. 134-145. (Вычисл. сейсмология; Вып. 14).
9. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология: Теория и методы. Т.1. М.: Мир, 1983. 520 с.
10. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М.: Наука, 1984. 238 с.

УДК.550.344

*Т.Б. Яновская*

**РАВНОМЕРНОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЯ  
ОТРАЖЕННОЙ ВОЛНЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ**

*T. B. Yanovskaya*

**UNIFORM ASYMPTOTIC REPRESENTATION OF REFLECTED WAVE FIELD  
IN ELASTIC MEDIUM**

A method for constructing the uniform asymptotic expansion of reflected and head wave fields in elastic medium, which is valid both in the vicinity and far apart from critical ray, is outlined. The formula for the main term of the uniform series, which describes the main part of the reflected P- or S-wave field, is derived. It appears to be of the same form as in the ray series, but with reflection coefficient dependent on frequency. In spite of apparent complexity of the formula for the reflection coefficient it is simple for calculations. For a set of frequencies the reflection coefficient of P-wave has been calculated for a contact of two homogeneous half-spaces as a function of the angle of incidence.