

5. Новикова Н.Н., Хенкин Г.М. О восстановлении оператора Штурма-Лиувилля по характеристикам дискретного спектра // Численное моделирование и анализ геофизических процессов. М.: Наука, 1987. С.174-185. (Вычисл. сейсмология; Вып. 20).
6. Маркушевич В.М., Новикова Н.Н., Повзнер Т.А. и др. Метод определения акустического профиля по нормальным монохроматическим волнам // Математические методы в сейсмологии и геодинамике. М.: Наука, 1986. С. 135-145. (Вычисл. сейсмология; Вып. 19).
7. Маркушевич В.М., Резников Е.Л. Применение метода Фурье к уравнению стоячих SH-волн в полупространстве // Теория и анализ сейсмологических наблюдений. М.: Наука, 1979. С. 69-79. (Вычисл. сейсмология; Вып. 12).
8. Левшенко В.Т., Маркушевич В.М., Резников Е.Л. О расчете смещений среды при вибросондировании крутильными колебаниями // Математические модели строения строения Земли и прогноза землетрясений. М.: Наука, 1981. С. 134-145. (Вычисл. сейсмология; Вып. 14).
9. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология: Теория и методы. Т.1. М.: Мир, 1983. 520 с.
10. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М.: Наука, 1984. 238 с.

УДК.550.344

*Т.Б. Яновская*

**РАВНОМЕРНОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЯ  
ОТРАЖЕННОЙ ВОЛНЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ**

*T. B. Yanovskaya*

**UNIFORM ASYMPTOTIC REPRESENTATION OF REFLECTED WAVE FIELD  
IN ELASTIC MEDIUM**

A method for constructing the uniform asymptotic expansion of reflected and head wave fields in elastic medium, which is valid both in the vicinity and far apart from critical ray, is outlined. The formula for the main term of the uniform series, which describes the main part of the reflected P- or S-wave field, is derived. It appears to be of the same form as in the ray series, but with reflection coefficient dependent on frequency. In spite of apparent complexity of the formula for the reflection coefficient it is simple for calculations. For a set of frequencies the reflection coefficient of P-wave has been calculated for a contact of two homogeneous half-spaces as a function of the angle of incidence.

## Введение

Простейший и широко используемый способ расчета поля волны, вызванной сосредоточенным источником и отраженной от границы раздела упругих сред, основан на лучевом методе при учете только главного члена лучевого ряда (нулевого приближения). В рамках такого приближения выражение для амплитуды отраженной волны представляет собой произведение двух сомножителей - члена, содержащего геометрическое расхождение, и коэффициента отражения, который совпадает с коэффициентом отражения плоской волны, отраженной от плоской границы раздела. Такое приближение достаточно точно описывает волновое поле вдали от критического угла даже для не слишком высоких частот, но за счет того, что в окрестности критического угла лучевой ряд расходится начиная со второго члена (первого приближения), указанное выше представление поля отраженной волны оказывается справедливым только для бесконечно высоких частот.

Асимптотическое представление акустического волнового поля в окрестности критического угла, выраженное через функции Вебера, было дано в [1]. В [2] выведено выражение для волнового поля в упругой среде в окрестности точки выхода головной волны через интегралы специального вида. В [3,4] получены формулы для амплитуд отраженных сейсмических волн в окрестности критического угла при использовании подхода, предложенного в [1], и вычислены амплитуды отраженных волн для разных частот. Однако выражения для амплитуд, полученные в упомянутых работах, справедливы только в достаточно узкой окрестности критического угла, а вдали от этого угла они не сшиваются с лучевыми.

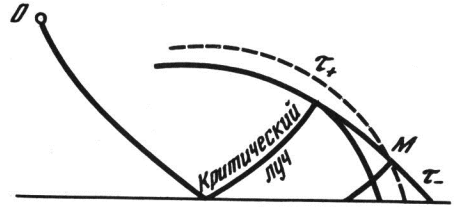
Равномерная асимптотика поля акустической отраженной волны, которая пригодна в любой окрестности критического угла, в том числе и на больших удалениях, где уже оказываются справедливыми лучевые формулы, была предложена в [5]. В настоящей статье этот подход распространен на случай контакта упругих сред и применен к анализу поля продольной волны, возбужденной сосредоточенным источником и отраженной от плоской границы между неоднородным и однородным полупространствами. Формулы для расчета амплитуд оказываются удобными для вычислений несмотря на кажущуюся сложность.

### Постановка задачи

Рассмотрим среду, состоящую из двух полупространств, находящихся в жестком контакте вдоль границы  $z=0$ . В верхнем (неоднородном) полупространстве (1) в точке  $x=y=0$ ,  $z=H$  расположен сосредоточенный

источник. Нижнее полупространство (2) однородное либо неоднородное только по горизонтальным координатам  $x, y$ . Скорость на границе в нижнем полупространстве больше, чем в верхнем, так что при возбуждении волны в верхней среде на границе образуется головная волна (рис.1).

Р и с. 1. Схема волновых фронтов отраженной и головной волн. В каждую точку  $M$ , расположенную справа от критического луча, приходят две волны: отраженная с эйконалом  $\tau_+$  и головная с эйконалом  $\tau_-$ , причем  $\tau_+ > \tau_-$ .



Если верхнее полупространство однородно и нас интересует только продольная волна, то можно использовать подход, разработанный в [5], поскольку в однородной среде вектор смещения в  $P$ -волне может быть выражен через потенциал  $u = \nabla\phi$ , а для скалярного потенциала мы можем использовать равномерное асимптотическое разложение, полученное для акустического случая, с той только разницей, что будет другим выражение для коэффициента отражения. Но для более общего случая, который мы собираемся рассмотреть, необходимо построить решение уравнений динамической теории упругости в форме асимптотического ряда, аналогичного тому, который был получен ранее.

Заметим, что необходимость использования асимптотического разложения, отличного от лучевого, обусловлена неаналитичностью эйконала в окрестности критического угла, где решение уравнения эйконала становится неединственным.

Аналогично скалярному (акустическому) случаю представим решение уравнений динамической теории упругости:

$$L(u) = (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u + \mu \Delta u + \nabla \lambda \operatorname{div} u + (\nabla \mu \times \operatorname{rot} u) + 2(\nabla \mu, \nabla) u - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

для гармонической волны  $u(x, t) = U(x) \exp(-i\omega t)$  в виде суммы двух рядов:

$$U(x) = U_1(x) + U_2(x),$$

где

$$U_1(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{U^m}{(i\omega)^m} \exp(i\omega \tau_+),$$

$$U_2(x) = \exp(i\omega \Phi) \omega^{-1/4} \sum_{m=0}^{m=\infty} \left( a_m V(\sqrt{\omega} \xi) + \frac{b_m V'(\sqrt{\omega} \xi)}{i\sqrt{\omega}} \right) (i\omega)^{-m}; \quad (2)$$

а  $V(z)$  есть решение уравнения

$$V''(z) + z^2 V(z) = 0.$$

Первый ряд является обычным лучевым рядом, который описывает аналитическую часть решения. Форма второго ряда обусловлена неаналитичностью эйконала в окрестности критического угла. Разделение поля на два разных по форме ряда определяется представлением коэффициента отражения в виде

$$x(\theta) = f_1(\theta) + f_2(\theta) \sqrt{1 - \sin^2 \theta / \sin^2 \theta_0}, \quad (3)$$

где  $\theta$  - угол падения;  $\theta_0$  - критический угол;  $f_1(\theta)$  и  $f_2(\theta)$  - аналитические функции. Вклад в волновое поле за счет первого слагаемого описывается лучевым рядом  $U_1(x)$ , а за счет второго (неаналитического в окрестности  $\theta = \theta_0$ ) - рядом  $U_2(x)$ . Разумеется, это представление справедливо в таком интервале углов, где  $f_1(\theta)$  и  $f_2(\theta)$  - аналитические функции.

Поскольку оба эти ряда являются разложениями по разным степеням  $\omega$  (первый - по целым степеням  $\omega^{-1}$ , а второй - по степеням  $\omega^{1/4}$ ,  $\omega^{-1/4}$ ,  $\omega^{-3/4}$  и т.д.), они могут рассматриваться отдельно.

Определение главного члена ряда  $U_2(x)$

Подставляя ряд  $U_2(x)$  в уравнение движения (1) и приравнявая нулю коэффициенты при высших степенях  $\omega$  (т.е. при  $\omega^{9/4}$  и  $\omega^{7/4}$ ) получаем следующие уравнения:

$$(\lambda + \mu) \left[ (a_0, \nabla \psi) \nabla \psi + \xi^2 (a_0, \nabla \xi) \nabla \xi + (\xi^2 b_0, \nabla \psi) \nabla \xi + (\xi^2 b_0, \nabla \xi) \nabla \psi \right] + a_0 \left[ \mu \left[ (\nabla \psi)^2 + \xi^2 (\nabla \xi)^2 \right] - \rho \right] + 2\mu \xi^2 b_0 (\nabla \xi, \nabla \psi) = 0, \quad (4a)$$

$$(\lambda + \mu) \left[ (a_0, \nabla \psi) \nabla \xi + (a_0, \nabla \xi) \nabla \psi + (b_0, \nabla \psi) \nabla \psi + (\xi^2 b_0, \nabla \xi) \nabla \xi \right] + b_0 \left[ \mu \left[ (\nabla \psi)^2 + \xi^2 (\nabla \xi)^2 \right] - \rho \right] + 2\mu a_0 (\nabla \xi, \nabla \psi) = 0. \quad (4б)$$

Умножим (4б) на  $\xi$  и сложим и вычтем из (4а). Введя обозначения

$$\tau_{\pm} = \psi \pm \xi^2/2, \quad A_0^{\pm} = a_0 \pm \xi b_0, \quad (5)$$

получим

$$N(A_0^{\pm}) = (\lambda + \mu) (A_0^{\pm}, \nabla \tau_{\pm}) \nabla \tau_{\pm} + A_0^{\pm} \left[ \mu (\nabla \tau_{\pm})^2 - \rho \right] = 0. \quad (6)$$

Это уравнение в точности совпадает с тем, которое получается в лучевом методе для главного члена ряда, соответствующего уравнению движения. Оно приводит к уравнениям эйконала для Р- и S-волн и к условиям, определяющим поляризацию этих волн в нулевом приближении

[6]. В (6)  $\tau_{\pm}$  является эйконалом отраженной (+) и головной (-) волн. На критическом луче эти эйконалы равны и  $\xi^2 = 0$ .

Переменная  $\xi^2$  является разностью между эйконалами отраженной и головной волны:

$$\xi^2 = \tau_+ - \tau_-.$$

Примем  $\xi < 0$  для закритических и  $\xi > 0$  для докритических углов падения. Если  $\xi^2$  достаточно велико (т.е. точка наблюдения удалена от точки выхода головной волны), ряд  $U_2(\mathbf{x})$  может быть представлен в виде суммы двух лучевых рядов с эйконалами  $\tau_+$  и  $\tau_-$ . Очевидно, что для больших  $\xi > 0$  ряд с эйконалом  $\tau_-$  должен исчезнуть, так как головная волна существует только в области закритических углов падения. Это требование приводит к следующему виду функции  $V(z)$  [5]:

$$V(z) = Ci_4(z/2) + iSi_4(z/2), \quad (7)$$

где  $Ci_4(\alpha)$  и  $Si_4(\alpha)$  - интегралы Эйри-Харди, которые выражаются через бесселевы функции следующим образом [7]:

$$\begin{aligned} Ci_4(\alpha) &= \frac{\pi\sqrt{\alpha}}{8\sin(\pi/8)} \left[ J_{-1/4}(2\alpha^2) - J_{1/4}(2\alpha^2) \right], \\ Si_4(\alpha) &= \frac{\pi\sqrt{\alpha}}{8\cos(\pi/8)} \left[ J_{-1/4}(2\alpha^2) + J_{1/4}(2\alpha^2) \right], \\ Ci_4(-\alpha) &= \frac{\pi\sqrt{\alpha}}{8\sin(\pi/8)} \left[ J_{-1/4}(2\alpha^2) + J_{1/4}(2\alpha^2) \right], \\ Si_4(-\alpha) &= \frac{\pi\sqrt{\alpha}}{8\cos(\pi/8)} \left[ J_{-1/4}(2\alpha^2) - J_{1/4}(2\alpha^2) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Определим теперь главный член ряда  $U_2(\mathbf{x})$  (т.е. коэффициенты  $a_0$  и  $b_0$ ) точно так же, как это было сделано в [5]. Вдали от критического луча ряд  $U_2(\mathbf{x})$  может быть представлен в виде суммы двух рядов, один из которых описывает поле головной волны, а другой - неаналитическую часть поля отраженной волны. Члены, соответствующие  $m=0$  в этих двух рядах, имеют коэффициенты  $A_0^+$  (отраженная волна) и  $A_0^-$  (головная волна). Но известно, что главный член лучевого разложения поля головной волны соответствует первому приближению ( $m=1$ ). Это означает, что  $A_0^- = 0$  и, следовательно,  $a_0 = \xi b_0$ . Таким образом, главный член ряда  $U_2(\mathbf{x})$  может быть записан в виде:

$$\omega^{1/4} \exp(i\omega\psi(\mathbf{x})) b_0(\mathbf{x}) \left( \xi V(\sqrt{\omega} \xi) + \frac{V'(\sqrt{\omega} \xi)}{i\sqrt{\omega}} \right).$$

Обозначим

$$Z(z) = zV(z) - iV'(z). \quad (9)$$

Тогда главный член принимает вид:

$$\omega^{-1/4} \exp(i\omega\Phi(\mathbf{x})) \mathbf{b}_0(\mathbf{x}) Z(\sqrt{\omega} \xi).$$

Чтобы определить неизвестный коэффициент  $\mathbf{b}_0(\mathbf{x})$ , мы должны использовать асимптотическое представление функции  $Z(z)$  и учесть, что при больших  $z = \sqrt{\omega} \xi$  (т.е. для не слишком малых  $\xi$ ) этот член должен совпадать с неаналитической частью главного члена в лучевом разложении поля отраженной волны. Из (7), (8), (9) и асимптотики функций Ханкеля получаем

$$Z(z) \sim \sqrt{\frac{\pi z}{2}} \exp\left(\frac{iz^2}{2} + \frac{\pi i}{4}\right). \quad (10)$$

Главный член ряда для отраженной волны может быть записан в виде

$$\frac{\kappa(\theta) \mathbf{F}(\theta) \exp(i\omega\tau_+)}{\sqrt{J\rho v}} \mathbf{e}, \quad (11)$$

где  $\kappa(\theta)$  определяется выражением (3);  $J$  - геометрическое расхождение;  $\mathbf{e}$  - единичный вектор поляризации (направленный вдоль  $\nabla\tau_+$  для Р-волны и ортогональный этому направлению для S-волны);  $\mathbf{F}(\theta)$  - множитель, включающий функцию направленности источника и произведение коэффициентов преломления на всех промежуточных границах, если таковые существуют;  $v=a$  или  $v=b$  для Р- или S-волн соответственно. Вклад в это выражение, обусловленный аналитической частью  $\kappa(\theta)$ , включен в ряд  $U_1(\mathbf{x})$ , а главный член в  $U_2(\mathbf{x})$  для больших  $\sqrt{\omega} \xi$  совпадает с тем членом в (11), который содержит неаналитическую часть  $\kappa(\theta)$ .

Учитывая (9), (10) и (5), мы можем записать этот член для больших  $\sqrt{\omega} \xi$  в следующей форме:

$$\sqrt{\pi\xi/2} \mathbf{b}_0(\mathbf{x}) \exp(i\omega\tau_+ + i\pi/4).$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{b}_0(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \exp(-i\pi/4) \frac{\mathbf{F}_2(\theta) \sqrt{1 - \sin^2\theta / \sin^2\theta_0}}{\sqrt{J\rho v}} \mathbf{e}.$$

Таким образом, вектор  $\mathbf{b}_0$  направлен вдоль  $\mathbf{e}$ , т.е. отраженная волна поляризована так же, как и в нулевом приближении лучевого метода, и окончательное выражение для главного члена разложения поля отраженной волны, справедливое в широком интервале углов падения, может быть записано в виде

$$\left[ \mathbf{f}_1(\theta) \exp(i\omega\tau_+) + \right.$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \exp\left(-\frac{1\pi}{4}\right) f_2(\theta) \sqrt{1 - \sin^2 \theta / \sin^2 \theta_0} \omega^{-1/4} Z(\sqrt{\omega\xi}) \exp(i\omega\Phi) \left] \frac{F(\theta)}{\sqrt{J\rho v}} e, \quad (12)$$

где  $Z(z)$  определено (9).

Нетрудно вывести уравнения, аналогичные уравнениям переноса в лучевом методе. С этой целью достаточно рассмотреть пары уравнений, которые получаются приравниванием нулю коэффициентов при последовательных степенях  $\omega$  в рядах, получающихся после подстановки  $U_2(\mathbf{x})$  в уравнение движения (1). Как было показано выше, первая пара уравнений приводит к двум уравнениям (6), а следующая пара после преобразований, аналогичных тем, которые были использованы при выводе (6), дает следующие уравнения:

$$(\lambda + \mu) \left\{ \left[ \operatorname{div} \mathbf{A}_0^\pm \mp (\mathbf{b}_0, \nabla \xi) \right] \nabla \tau_\pm + \nabla (\mathbf{A}_0^\pm, \nabla \tau_\pm) \mp \left[ (\mathbf{b}_0, \nabla \Phi) + (\mathbf{a}_0, \nabla \xi) \right] \nabla \xi \right\} + \\ + \mu \left\{ \mathbf{A}_0^\pm \left[ \Delta \tau_\pm \mp (\nabla \xi)^2 \right] + 2(\nabla \tau_\pm, \nabla) \mathbf{A}_0^\pm \right\} + \nabla \lambda (\mathbf{A}_0^\pm, \nabla \tau_\pm) + (\nabla \mu, \mathbf{A}_0^\pm) \nabla \tau_\pm + \\ + (\nabla \mu, \nabla \tau_\pm) \mathbf{A}_0^\pm + \mathbf{N}(\mathbf{A}_1^\pm) = 0.$$

Теперь, если мы рассмотрим компоненты этих уравнений вдоль вектора поляризации, то получим следующие уравнения:

для Р-волны

$$(\lambda + 2\mu) \left[ \mathbf{A}_0^\pm \Delta \tau_\pm + \frac{2}{a^2} \frac{\partial \mathbf{A}_0^\pm}{\partial \tau_\pm} \right] + \frac{\partial (\lambda + 2\mu)}{a^2 \partial \tau_\pm} \mathbf{A}_0^\pm \mp \frac{\lambda + \mu}{2\xi a^2} \left\{ \left[ \mathbf{A}_0^+ \frac{\partial \xi}{\partial \tau_+} - \mathbf{A}_0^- \frac{\partial \xi}{\partial \tau_-} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial \xi}{\partial \tau_\pm} (\mathbf{A}_0^+ - \mathbf{A}_0^-) \right\} \mp \frac{\mu \mathbf{A}_0^\pm}{2a^2 \xi} \left[ \frac{\partial \xi}{\partial \tau_+} - \frac{\partial \xi}{\partial \tau_-} \right] = 0,$$

для S-волны

$$\mu \left[ \mathbf{A}_0^\pm \Delta \tau_\pm + \frac{2}{b^2} \frac{\partial \mathbf{A}_0^\pm}{\partial \tau_\pm} \right] \mp \frac{\mu \mathbf{A}_0^\pm}{2b^2 \xi} \left[ \frac{\partial \xi}{\partial \tau_+} - \frac{\partial \xi}{\partial \tau_-} \right] + \frac{1}{b^2} \frac{\partial \mu}{\partial \tau_\pm} \mathbf{A}_0^\pm = 0.$$

Уравнения с верхним значком определяют изменение амплитуды отраженной волны вдоль луча:

$$\frac{\rho \mathbf{A}_0^+ a}{J} \frac{\partial}{\partial \tau_+} \left( \frac{J}{a} \right) + 2\rho \frac{\partial \mathbf{A}_0^+}{\partial \tau_+} + \frac{\mathbf{A}_0^+}{a^2} \frac{\partial (\rho a^2)}{\partial \tau_+} - \frac{\mathbf{A}_0^+ \rho}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \tau_+} = 0, \quad \text{для Р-волны,} \\ (13) \\ \frac{\rho \mathbf{A}_0^+ b}{J} \frac{\partial}{\partial \tau_+} \left( \frac{J}{b} \right) + 2\rho \frac{\partial \mathbf{A}_0^+}{\partial \tau_+} + \frac{\mathbf{A}_0^+}{b^2} \frac{\partial (\rho b^2)}{\partial \tau_+} - \frac{\mathbf{A}_0^+ \rho}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \tau_+} = 0, \quad \text{для S-волны.}$$

Оба эти уравнения имеют решение одного и того же вида:

$$A_0^+ = \frac{\Phi(\theta)\sqrt{\xi}}{\sqrt{J\rho v}} e_+, \quad v=a \text{ или } v=b$$

и оно в точности совпадает с тем, которое получается путем приравнивания главного члена асимптотического разложения при больших  $\xi$  главному члену лучевого ряда.

Уравнения с нижним значком отличаются от (13) знаком последнего члена ("+" вместо "-"). Благодаря этому решение для  $A_0^-$  принимает форму

$$A_0^- = \frac{\Phi(\theta)}{\sqrt{J\rho v}} e_-. \quad (14)$$

Но из (14) следует, что необходимо положить  $A_0^- = 0$ , иначе главный член равномерного асимптотического разложения станет бесконечно большим на критическом луче. Этот вывод согласуется с известным фактом, что главный член лучевого ряда для головной волны убывает как  $\omega^{-1}$ , т.е. член, соответствующий нулевому приближению для головной волны равен нулю.

#### Вычислительные аспекты

Если функция  $Z(z)$  табулирована, то вычисление амплитуды отраженной волны не представляет трудностей. Практически эта задача сводится к расчету двух эйконолов  $\tau_+$  и  $\tau_-$ . Эйконал  $\tau_+$  вычисляется элементарно, а при расчете  $\tau_-$  следует иметь в виду, что эта функция определена лишь при  $\xi < 0$ . Поэтому мы должны аналитически продолжить  $\tau_-$  в область  $\xi > 0$ . Это можно сделать следующим образом. Как ясно из рис.2, эйконал  $\tau_-$  для  $\xi < 0$  вычисляется по формуле

$$\tau_- = t_0 + l/v_2,$$

где  $t_0$  есть время пробега вдоль отрезков луча 1 и 2, а  $l$  - расстояние между точками А и В. Для докритических углов ( $\xi > 0$ ) мы можем использовать эту же формулу, но считать  $l = AB' < 0$ .

Чтобы вычислить амплитуду отраженной волны по формуле (12), запишем ее выражение в виде

$$\left[ f_1(\theta) + f_2(\theta) F(\sqrt{\omega} \xi) \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta / \sin^2 \theta_0}}{\omega^{1/4} \sqrt{\xi}} \right] \frac{\Phi(\theta) \exp(i\omega \tau_+)}{\sqrt{J\rho v}}, \quad (15)$$

где

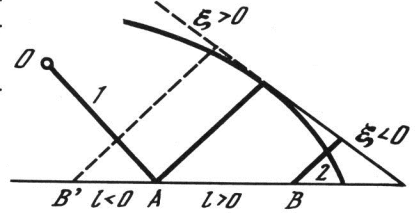
$$F(z) = \sqrt{2/\pi} Z(z) \exp(-iz^2/2 - i\pi/4).$$

Выражение в квадратных скобках можно рассматривать как "обобщенный" коэффициент отражения  $K(\theta, \sqrt{\omega} \xi)$ . Для больших  $z$   $F(z) \rightarrow z$  и



Р и с. 2. Построение аналитического продолжения эйконала головной волны в область докритических углов

Сплошная линия - фронт головной волны, пунктир - аналитическое продолжение



$K \rightarrow k(\theta)$ . Таким образом, достаточно табулировать функцию  $F(z)$  для не слишком больших значений  $z$ , а для больших  $z$  можно использовать обычные лучевые формулы для коэффициента отражения.

Для вычисления  $F(z)$  мы должны вычислить функцию  $V(z)$  и ее производную  $W(z) = V'(z)$ . Это делается путем численного решения системы дифференциальных уравнений:

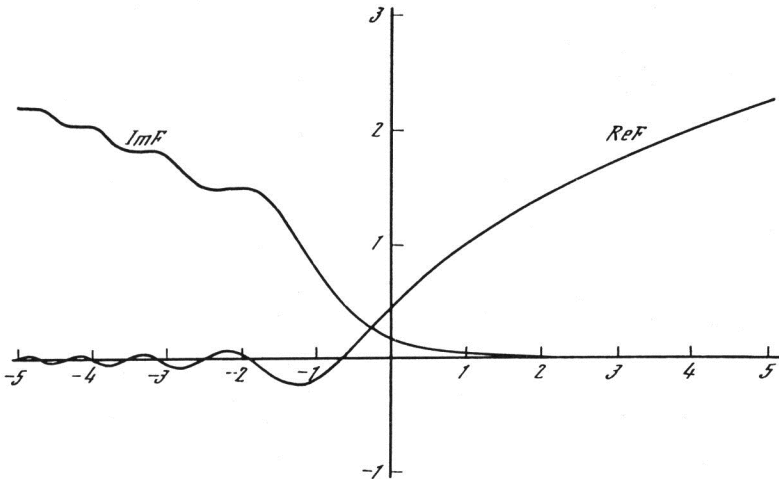
$$\begin{aligned} V'(z) &= W(z), \\ W'(z) &= -z^2 V(z). \end{aligned} \quad (16)$$

При этом, чтобы получить решение, которое совпадало бы с (7), систему (16) следует решать при следующих начальных данных:

$$V(0) = \frac{\pi}{8\Gamma(3/4)} \left[ \frac{1}{\sin(\pi/8)} + \frac{i}{\cos(\pi/8)} \right],$$

$$W(0) = \frac{\pi}{4\Gamma(1/4)} \left[ -\frac{1}{\sin(\pi/8)} + \frac{i}{\cos(\pi/8)} \right].$$

Функция  $F(z)$  изображена на рис.3.



Р и с. 3. Вещественная и мнимая части функции  $F(z)$

Для близких к нулю значений  $\xi$  формула (15) неудобна, так как числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю. В этом случае следует раскрыть неопределенность. В частности, если скорость в полупространстве 1 изменяется только вдоль координаты  $z$ , то

$$\sqrt{1 - \sin^2 \theta / \sin^2 \theta_0} \rightarrow \sqrt{2\delta p / p_0},$$

где  $p$  - лучевой параметр, а индекс 0 относится к критическому лучу и

$$\sqrt{\xi} = \sqrt{\tau_+ - \tau_-} \rightarrow \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \Delta}\right)_0 / 2} \sqrt{\delta \Delta},$$

так что

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta / \sin^2 \theta_0}}{\sqrt{\xi}} \rightarrow \frac{2^{3/4}}{\sqrt{p_0}} \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \Delta}\right)_0}.$$

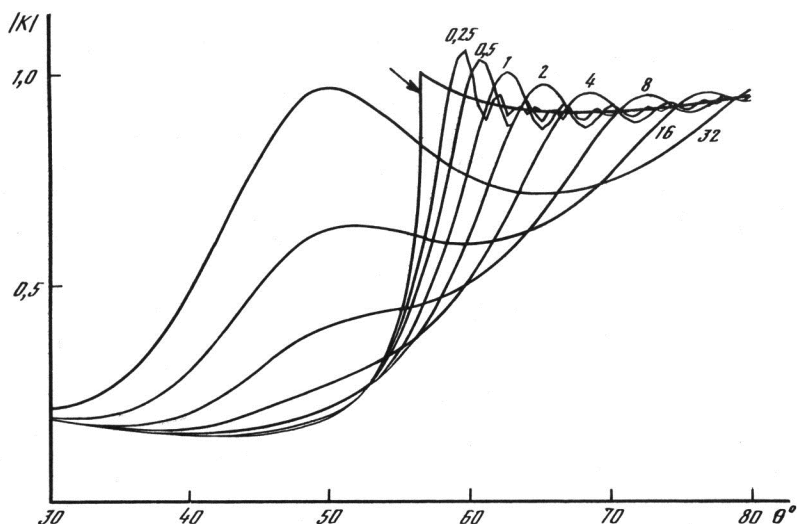
Итак, для вычисления обобщенного коэффициента отражения достаточно вычислить эйконалы отраженной и головной волн, приходящих в данную точку, определить угол падения  $\theta$  и критический угол  $\theta_0$ , и, используя табулированную функцию  $F(z)$ , рассчитать по формуле (15) требуемый коэффициент.

На рис.4 приведены расчеты коэффициента отражения продольной волны для следующей модели: источник и приемник расположены на расстоянии 100 км от плоской границы раздела двух однородных полупространств; скорости и плотности в полупространствах приняты следующими:

$$a_1 = 5 \text{ км/с}, \quad a_2 = 6 \text{ км/с}, \quad b_{1,2} = a_{1,2} / \sqrt{3}, \quad \rho_2 / \rho_1 = 2/3.$$

### Выводы

Результаты расчетов коэффициента отражения для разных частот в окрестности точки выхода головной волны качественно согласуются с теми, которые были получены в [4] при использовании локальной асимптотики, справедливой только в узкой окрестности критического угла. Однако при больших удалениях от критического угла формулы локальной асимптотики не переходят в лучевые, что ограничивает их применимость и не дает возможности оценивать поле отраженной волны в промежуточной области, где оказываются неприменимыми также и формулы лучевого метода. Этот недостаток особенно существенен при низких частотах, где (как видно из рис.4) область неприменимости лучевых формул оказывается весьма широкой. Соответственно в этой же области неприменимы и формулы для расчета амплитуд головных волн и поэтому лучевой метод даже с добавлением локальной асимпто-



Р и с. 4. Коэффициент отражения как функция угла падения для ряда периодов

Линия со стрелкой – коэффициент отражения плоской волны. Цифры у кривых – периоды (с)

тики оказывается довольно неудобным для расчетов волновых полей в слоистых средах.

Хотя в настоящей работе не приводятся формулы для амплитуд головных волн в рамках равномерной асимптотики, однако, используя общее выражение для равномерного асимптотического ряда (2) и схему определения амплитуд  $\Phi_{\pm}^{\pm}$  последующих приближений, описанную в [5], принципиально несложно вывести формулы и для амплитуд головных волн. Использование в расчетах таких формул вместо лучевых не должно слишком усложнить вычислительную процедуру, но зато даст возможность рассчитывать теоретические сейсмограммы в слоистых средах в широком диапазоне расстояний. Это может оказаться перспективным для интерпретации данных ГСЗ путем сопоставления экспериментальных и теоретических сейсмограмм.

#### Литература

1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М. Изд-во АН СССР. 1957. 502 с.
2. Смирнова Н.С. К вопросу о вычислении волновых полей в области предельных лучей // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Сб. VIII. Л.: Наука, 1966. С.5-15.
3. Cerveny V. The amplitude-distance curves for waves reflected at a plane interface for different frequency ranges // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1967. Vol.13. P.187-196.

4. *Cerveny V.* The theory of reflected and head waves in the case of layered overburden // *Geophys. Sbornik.* 1968, Vol.15. P.133-180.
5. *Yanovskaya T.V.* Uniform asymptotic representation of a field of reflected and head waves // *Proc.Roy.Soc. London. A.* 1969. Vol. 313. P.477-490.
6. *Алексеев А.С., Бабич В.М., Гельчинский Б.Я.* Лучевой метод вычисления интенсивностей волновых фронтов // *Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн.Сб. V.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1961. С 3-24.
7. *Ватсон Г.* Теория бесселевых функций. М.: Изд-во иностр.лит., 1949. 798 с.

УДК 523.038

*Е.М.Граева*

ВОЗБУЖДЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ТЕЧЕНИЕМ КУЭТТА-ПУАЗЕЙЛЯ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

*E.M.Graeva*

GENERATION OF MAGNETIC FIELD BY THE COUETTE-POISEUILLE FLOW OF A CONDUCTING FLUID FOR LARGE REYNOLDS NUMBERS

The boundary-value problem for such flow is considered. A new simple approach to the asymptotic decomposition of eigenvalues and eigenfunctions is described.

### 1. Введение

В [1,2] рассматривалась задача о возбуждении магнитного поля течением Куэтта-Пуазейля проводящей жидкости между двумя цилиндрами из идеального проводника. Эта задача разделением переменных в уравнениях Максвелла была сведена к вопросу о существовании собственного значения  $p$  с  $\text{Re } p > 0$  следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{dr^2} - r^{-1} \frac{dR}{dr} - [q(r)+p]R - 2inr^{-2}\Phi &= 0, \\ \frac{d^2 \Phi}{dr^2} - r^{-1} \frac{d\Phi}{dr} - [q(r)+p]\Phi + r^{-2}[2in-2R_m B]R &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$R(\eta) = R(1) = 0,$$

$$\left. \frac{d\Phi}{dr} \right|_{r=\eta} = \left. \frac{d\Phi}{dr} \right|_{r=1} = 0.$$

Здесь  $R_m$  - магнитное число Рейнольдса:  $\eta = a/b$ , где  $a < b$  - радиусы цилиндров:  $q(r) = n^2/r^2 + \alpha^2 + iR_m \bar{q}(r)$ , где  $\bar{q}(r)$  - заданная явно глад-