4. *Cerveny V.* The theory of reflected and head waves in the case of layered overburden // Geophys. Sbornik. 1968, Vol.15. P.133-180.

5. *Yanovskaya T.B.* Uniform asymptotic representation of a field of reflected and head waves // Proc.Roy.Soc. London. A. 1969. Vol. 313. P.477-490.

6. *Алексеев А.С.,Бабич В.М.,Гельчинский Б.Я.* Лучевой метод вычисления интенсивностей волновых фронтов // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн.Сб. V. Л.: Изд-во ЛГУ, 1961. С 3-24.

7. *Ватсон Г.* Теория бесселевых функций. М.: Изд-во иностр.лит., 1949. 798 с.

УДК 523.038

Е.М.Граева

ВОЗБУЖДЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ТЕЧЕНИЕМ КУЭТТА-ПУАЗЕЙЛЯ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

E.M.Graeva

GENERATION OF MAGNETIC FIELD BY THE COUETTE-POISEUILLE FLOW OF A CONDUCTING FLUID FOR LARGE REYNOLDS NUMBERS

The boundary-value problem for such flow is considered. A new simple approach to the asymptotic decomposition of eigenvalues and eigenfunctions is described.

1.Введение

В [1.2] рассматривалась задача о возбуждении магнитного поля течением Куэтта-Пуазейля проводящей жидкости между двумя цилиндрами из идеального проводника. Эта задача разделением переменных в уравнениях Максвелла была сведена к вопросу о существовании собственного значения p с $\operatorname{Re} p>0$ следующей краевой задачи:

$$\begin{gathered}
\frac{d^2R}{dr^2} - r^{-1}\frac{dR}{dr} - [q(r)+p]R - 2inr^{-2}\Phi = 0, \\
\frac{d^2\Phi}{dr^2} - r^{-1}\frac{d\Phi}{dr} - [q(r)+p]\Phi + r^{-2}[2in-2R_mB]R = 0, \\
R(\eta) = R(1) = 0, \\
\left.\frac{d\Phi}{dr}\right|_{r=\eta} = \left.\frac{d\Phi}{dr}\right|_{r=1} = 0.
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь R_m - магнитное число Рейнольдса: $\eta=a/b$, где $a<b$ - радиусы цилиндров: $q(r)=n^2/r^2+\alpha^2+iR_m\bar{q}(r)$, где $\bar{q}(r)$ - заданная явно глад-

кая вещественная функция от r на отрезке $[\eta, 1]$ и B - константа, зависящая от параметров течения [1].

В [3, 4] исследовалось асимптотическое поведение при $R_m \to \infty$ такого собственного значения p и отвечающих ему собственных функций R и Φ. Искомые решения строились в виде асимптотических рядов:

$$p \sim -i\varepsilon^{-4}\bar{q}(r_0) + \varepsilon^{-2}(p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p + \dots) ,$$

$$R \sim R_0(x) + \varepsilon R_1(x) + \varepsilon^2 R_2(x) + \dots ,$$

$$\Phi \sim \Phi_0(x) + \varepsilon\Phi_1(x) + \varepsilon^2\Phi_2(x) + \dots$$

где $\varepsilon = R_m^{-1/4}$, $x = \varepsilon^{-1}(r - r_0)$, а $r_0 \in (a, b)$ определялось из уравнения $\bar{q}'(r_0) = 0$. При этом однородные краевые условия при $x = \varepsilon^{-1}(\eta - r_0)$ и заменялись однородными условиями при $x = \pm\infty$, что оправдывалось малостью ε. Вопрос о фактическом существовании решений с такой асимптотикой не обсуждался, но полученные результаты хорошо согласовывались с результатами численного решения краевой задачи (1) при больших R_m.

В данной статье дается новый подход к решению задачи об асимптотике собственного значения краевой задачи. Этот подход существенно упрощает вычисления и делает более обозримыми результаты. Для искомых решений строятся асимптотические ряды (иного типа, чем в [3, 4]), а существование решений с указанной асимптотикой следует из общей теории.

2. Постановка и решение математической задачи

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\varepsilon^2 x y'' - (\lambda(\varepsilon) + u(x, \varepsilon))y = 0, \tag{2.1}$$

где $u(x, \varepsilon)$ - заданная бесконечно дифференцируемая функция при $a \le x \le b$ $(a > 0)$ и малых $\varepsilon > 0$. Ищется пара

$$\lambda(\varepsilon), \quad y(x, \varepsilon) = z(x, \varepsilon)\exp[\varepsilon^{-1} r(x)(x - x_0)^2],$$

удовлетворяющая (2.1), где $\lambda(\varepsilon)$, $r(x)$, $z(x, \varepsilon)$ - бесконечно дифференцируемые функции при $a \le x \le b$ и достаточно малых ε, причем $\mathrm{Re}\, r(x) < 0$ на $[a, b]$, $a < x_0 < b$. (Число x_0 и функция $r(x)$ также подлежат определению.)

З а м е ч а н и е. Приводимая далее конструкция сохраняет смысл при замене множителя x при y'' любой гладкой функцией, отличной от нуля всюду на $[a, b]$.

В дальнейшем функцию, стоящую в показателе, удобно представлять в виде $\varepsilon^{-1}\int_{x}^{x}(x - x_0)s(x)dx$. Таким образом,

$$y(x,\varepsilon) = z(x,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-1}\int_{x}^{x}(x-x_0)s(x)dx). \qquad (2.2)$$

Предполагается, что $\mathrm{Re}\ s(x)<0$ на $[a,b]$. При этом предположении $y(x,\varepsilon)$ стремится при $\varepsilon \longrightarrow 0$ к функции, сосредоточенной в точке x_0. Ее значения в точках $x\neq x_0$ отрезка $[a,b]$, в том числе и на его концах, суть $o(\varepsilon^n)$ для любого натурального n.

Подставив выражение (2.2) в (2.1), получаем дифференциальное уравнение для $z(x,\varepsilon)$:

$$\varepsilon^2xz''+2\varepsilon x(x-x_0)s(x)z'-(\lambda(\varepsilon)+v(x,\varepsilon))z = 0, \qquad (2.3)$$

где

$$v(x,\varepsilon) = u(x,\varepsilon)-x(x-x_0)^2s^2(x)-\varepsilon x((x-x_0)s(x))'.$$

Прежде всего найдем $\lambda_0=\lambda(0)$, x_0 и $s(x)$. Введя $u_0(x)=u(x,0)$, $z_0(x)=z(x,0)$ и положив $\varepsilon=0$, получаем из (2.3),

$$[\lambda_0+u_0(x)-x(x-x_0)^2s^2(x)]z_0(x) = 0,$$

откуда

$$\lambda_0+ u_0(x) = x(x-x_0)^2s^2(x). \qquad (2.4)$$

Отсюда имеем

$$u_0'(x_0) = 0, \qquad (2.5)$$

$$\lambda_0= -u_0(x_0), \qquad (2.6)$$

$$s(x) = \sqrt{\frac{u_0(x) - u_0(x_0)}{x(x-x_0)^2}}\ . \qquad (2.7)$$

Из уравнения (2.5) определяется x_0. Сделаем следующие два предположения:

1. Существует решение уравнения (2.5). принадлежащее интервалу (a,b). В дальнейшем под x_0 подразумевается одно из таких решений. Подставляя x_0 в (2.6) и (2.7), находим λ_0 и $s(x)$.

2. Функция $\dfrac{u_0(x)-u_0(x_0)}{(x-x\ )^2}$ не принимает на $[a,b]$ вещественных неположительных значений. При этом предположении $\mathrm{Re}\ s(x)\neq 0$ всюду на $[a,b]$, и мы выбираем в (2.6) знак квадратного корня, при котором $\mathrm{Re}\ s(x)<0$ на $[a,b]$.

Представим $\lambda(\varepsilon)$ и $u(x,\varepsilon)$ в виде

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda_0+ \varepsilon\bar{\lambda}(\varepsilon), \qquad (2.8)$$

$$u(x,\varepsilon) = u_0(x)+ \varepsilon\bar{u}(x,\varepsilon), \qquad (2.9)$$

где $\overline{u}(x,\varepsilon) = u_1(x)+\varepsilon u_2(x)+\dots$.

Подставив (2.8), (2.9) в уравнение (2.3), получаем в силу (2.4)

$$\varepsilon x z''+2x(x-x_0)s(x)z'-[\lambda(\overline{\varepsilon})+u(x,\overline{\varepsilon})-x((x-x_0)s(x))']z = 0. \qquad (2.10)$$

Задача свелась, таким образом, к отысканию пары $z(x,\varepsilon)$ и $\overline{\lambda}(\varepsilon)$, удовлетворяющей уравнению (2.10). Найдем такую пару при дополнительном предположении, что функция $z_0(x)=z(x,0)$ отлична от нуля в точке x_0. В этом случае удобно перейти от функции z к функции $\varphi=z'/z$. Для φ получаем следующее уравнение:

$$\varepsilon x(\varphi'+\varphi^2)+2x(x-x_0)s(x)\varphi = \lambda(\overline{\varepsilon})+u(x,\overline{\varepsilon})-x((x-x_0)s(x))' \qquad (2.11)$$

Уравнения такого типа, являющиеся обобщением уравнения Ван-дер-Поля, исследуются методами нестандартного анализа [5,6]. На основании [5] можно утверждать, что существует решение $(\varphi(x,\varepsilon),\ \overline{\lambda}(\varepsilon))$ уравнения (2.11), для которого имеют место асимптотические разложения

$$\overline{\lambda}(\varepsilon) \sim \lambda_1+ \lambda_2\varepsilon + \lambda_3\varepsilon^2+\dots , \qquad (2.12)$$

$$\varphi(x,\varepsilon) \sim \varphi_0(x) + \varphi_1(x)\varepsilon + \varphi_2(x)\varepsilon^2+\dots , \qquad (2.13)$$

где λ_i и $\varphi_i(x)$ получаются подстановкой (2.12) и (2.13) в уравнение (2.11) и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях ε.

З а м е ч а н и е. Решение $(z,\overline{\lambda})$ с указанной асимптотикой, вообще говоря, не единственно. При этом, если $(z_1,\overline{\lambda}_1)$, $(z_2,\overline{\lambda}_2)$ - два таких решения, то имеет место оценка $|\overline{\lambda}_2- \overline{\lambda}_1|<Ce^{-M/\varepsilon}$ для некоторого $M>0$ [5].

Приведем выражения для λ_i и $\varphi_i(x)$. Имеем

$$\lambda_1= - u_1(x_0) + x_0 s(x_0), \qquad (2.14)$$

$$\varphi_0(x)= \frac{(u_1(x)-u_1(x_0)) - (xs(x)-x_0s(x_0))}{2x(x-x_0)s(x)} - \frac{s'(x)}{2s(x)} . \qquad (2.15)$$

Последующие пары (λ_n,φ_n) определяются из рекуррентных соотношений

$$\lambda_{n+1}= -u_{n+1}(x_0) + x_0\varphi'_{n-1}(x_0) + x_0\sum_{p+q=n-1}\varphi_p(x_0)\varphi_q(x_0), \qquad (2.16)$$

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) = \frac{1}{2x(x-x_0)}\Big\{&(u_{n+1}(x)-u_{n+1}(x_0)) - \\ &- (x\varphi_{n-1}(x)- x_0\varphi_{n-1}(x_0)) - \\ &- \sum_{p+q=n-1}(x\varphi_p(x)\varphi_q(x) - x_0\varphi_p(x_0)\varphi_q(x_0))\Big\}. \end{aligned} \qquad (2.17)$$

Мы исходили в вычислениях из предположения, что $z_0(x_0)\neq 0$. Можно было бы искать решение (z,λ) нашей задачи в предположении, что функция $z_0(x)$ имеет в точке x_0 нуль порядка k, т.е. $z_0(x)= =(x-x_0)^k\bar{z}_0(x)$, где $\bar{z}_0(x_0)\neq 0$. Не обосновывая существование этого решения, приведем выражение для его асимптотики. Будем искать $z(x,\varepsilon)$ в виде асимптотического ряда

$$z(x,\varepsilon) \sim z_0(x) + \varepsilon z_1(x) + \varepsilon^2 z_2(x) + \ldots, \qquad (2.18)$$

$\bar{\lambda}(\varepsilon)$ - в виде асимптотического ряда (2.12).

Подставив эти ряды в уравнение (2.10) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем:

$$2x(x-x_0)s(x)z_0'(x) = [\lambda_1+ u_1(x) - x((x-x_0)s(x))']z_0(x), \qquad (2.19)$$

$$2x(x-x_0)s(x)z_1'(x) = [\lambda_1+ u_1(x) - x((x-x_0)s(x))']z_1(x)+ + (\lambda_2+ u_2(x))z_0(x) - xz_0''(x), \qquad (2.20)$$

$$2x(x-x_0)s(x)z_n'(x) = [\lambda_1+ u_1(x) - x((x-x_0)s(x))']z_n(x)+ + \sum_{s=2}^{n}(\lambda_s+u_s(x))z_{n+1-s}(x)+(\lambda_{n+1}+ u_{n+1}(x))z_0(x)- xz_{n-1}''(x) \qquad (2.21)$$

при $n=2,3,4,\ldots$ Подставив $z_0(x)=(x-x_0)^k\bar{z}_0(x)$, нетрудно получить из (2.19), что

$$\lambda_1= - u_1(x_0) + (2k+1)x_0s(x_0), \qquad (2.22)$$

$$z_0(x) = (x - x_0)^k \exp\int_{x_0}^{x}\frac{v(x)}{2s(x)}\,dx,$$

где $$v(x) = \frac{u_1(x)-u_1(x_0)-(2k+1)(xs(x)-x_0s(x_0))}{x(x-x_0)} - s'(x).$$

З а м е ч а н и е. Из (2.22) видно: поскольку $\mathrm{Re}\, s(x_0)<0$, то $\mathrm{Re}\,\lambda_1$ с ростом k может только уменьшиться. Поэтому, если $\mathrm{Re}\,\lambda_0=0$, то для отыскания параметров, при которых существует λ с $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, существенно рассматривать лишь случай $k = 0$.

Из уравнений (2.20) и (2.21) пары (z_n,λ_{n+1}) при $n = 1,2,3,\ldots$ могут быть найдены с помощью рекуррентных соотношений. А именно, из (2.21) следует, что $z_n(x) = c_n(x)z_0(x)$, где

$$c_1(x) = \int_{x_0}^{x}\left[\frac{\lambda_2+ u_2(x)}{2x(x-x_0)s(x)} - \frac{z_0'(x)}{2x(x-x_0)s(x)z_0(x)}\right]dx,$$

$$c_n(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \left[\frac{\sum\limits_{s=2}^{n} (\lambda_s + u_s(x)) z_{n+1-s} - x z''_{n-1}}{2x(x-x_0)s(x)z_0(x)} + \right. \tag{2.23}$$

$$\left. + \frac{\lambda_{n+1} + u_{n+1}(x)}{2x(x-x_0)s(x)} \right] dx, \qquad n = 2,3,\ldots$$

Подынтегральная функция $F(x)$ имеет особенность в точке x_0 и представима в следующем виде:

$$F(x) = \frac{a_k}{(x-x_0)^{k+1}} + \ldots + \frac{a_1}{(x-x_0)^2} + \frac{a_0}{x-x_0} + f(x),$$

где $f(x)$ - гладкая функция; в случае $n=1$ $a_s=0$ при $s>2$. Следовательно,

$$c_n(x) = \frac{a'_k}{(x-x_0)^k} + \ldots + \frac{a'_1}{x-x_0} + a_0 \ln|x-x_0| + \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx,$$

где $a'_s=-a_s/k$. Требование гладкости членов $z_n(x)$ асимптотического ряда (2.18) эквивалентно требованию $a_0=0$, т.е.

$$\frac{\lambda_2 + u_2(x_0)}{2x_0 s(x_0)} - \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{(x-x_0)^2 z''_0(x)}{2s(x)z_0(x)}\right]\Bigg|_{x=x_0} = 0,$$

$$\frac{\lambda_{n+1} + u_{n+1}(x_0)}{2x_0 s(x_0)} + \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{\sum\limits_{s=2}^{n}(\lambda_s+u_s(x))z_{n+1-s}(x) - xz''_{n-1}(x)}{2xs(x)\bar{z}_0(x)}\right]\Bigg|_{x=x_0} = 0$$

при $n=2,3,\ldots$

Следовательно,

$$\lambda_2 = - u_2(x_0) + x_0 s(x_0)\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{(x-x_0)^2 z''_0(x)}{2s(x)z_0(x)}\right]\Bigg|_{x=x_0},$$

$$\lambda_{n+1} = - u_{n+1}(x_0) - \tag{2.24}$$

$$- \frac{2x_0 s(x_0)}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{\sum\limits_{s=2}^{n}(\lambda_s+u_s(x))z_{n+1-s}(x) - xz''_{n-1}(x)}{2xs(x)\bar{z}_0(x)}\right]\Bigg|_{x=x_0},$$

$n=2,3,\ldots$

Подставив (2.24) в (2.23), находим $c_n(x)$, а значит, и $z_n(x)$.

3. Приложение к краевой задаче (1) при больших R_m

Сделаем в (1) следующие замены: $r^2=x$, $R_m=\varepsilon^{-2}$, $F = \varepsilon\sqrt{\dfrac{in}{B-\varepsilon^2 in}}\,\Phi$. Умножим оба уравнения системы (1) на ε^2 и положим $\lambda=\varepsilon^2 p/4$, $Q(x)=$ $=\varepsilon^2 q(\sqrt{x})/4$. Мы получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2 xR''(x)-(\lambda+Q(x,\varepsilon))R(x)-\frac{\varepsilon}{2x}\sqrt{in(B-\varepsilon^2 in)}\;F(x) = 0,\\ &\varepsilon^2 xF''(x)-(\lambda+Q(x,\varepsilon))F(x)-\frac{\varepsilon}{2x}\sqrt{in(B-\varepsilon^2 in)}\;R(x) = 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $\sqrt{in(B-\varepsilon^2 in)}=(B-\varepsilon^2 in)\sqrt{\dfrac{in}{B-\varepsilon^2 in}}$. Выбор знака $\sqrt{in(B-\varepsilon^2 in)}$ будет сделан позднее. Краевые условия задачи (1) заменим следующим требованием: для всякого натурального числа n

$$\begin{aligned} &R(\eta^2) = o(\varepsilon^n), \quad R(1) = o(\varepsilon^n),\\ &F'(x)\Big|_{x=\eta^2} = o(\varepsilon^n), \quad F'(x)\Big|_{x=1} = o(\varepsilon^n). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Инвариантность системы уравнений (3.1) относительно замены $(R,F) \longrightarrow (F,R)$ позволяет свести решение этой системы к решению уравнения (2.1) при $u(x,\varepsilon)=Q(x,\varepsilon)+\dfrac{\varepsilon}{2x}\sqrt{in(B-\varepsilon^2 in)}$, $a=\eta^2$, $b=1$. Если $\lambda(\varepsilon)$ и $y(x,\varepsilon)$ вида (2.2) - решение задачи (2.1), то λ, $R=F=y$ - решение задачи (3.1), (3.2).

Согласно [1] положим в (3.1)

$$q(\sqrt{x})=n^2/x + \alpha^2+ i\varepsilon^{-2}\,\overline{q}(\sqrt{x}),$$

где

$$\begin{aligned} \overline{q}(\sqrt{x}) = {} & n\left\{b\Omega_2(1-\eta)^{-1}U_m^{-1}- B + B/x\right\} +\\ & + \alpha(1-\eta)^{-1}(1+\varkappa^2)^{-1/2}(U_c^2+U_p^2)^{-1/2}\Big\{U_c\ln x/2\ln\eta +\\ & + U_p d^{-1}(\eta)[(1-x^2)\ln\eta + (\eta^2-1)\ln x]\Big\}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\varkappa = a(\Omega_1- \Omega_2)(U_c^2+U_p^2)^{-1/2},$$

$$B = \eta\varkappa(1-\eta^2)^{-1}(1-\eta)^{-1}(1-\varkappa^2)^{-1/2},$$

$$d(\eta) = \ln\eta^2(\eta^2-1)\left\{-1 + \ln((\eta^2-1)/\ln\eta^2)\right\}.$$

Смысл обозначений Ω_1, Ω_2, U_c, U_p, U_m, n, α см. в [1].

Для $Q(x,\varepsilon)$ получаем выражение

$$Q(x,\varepsilon) = \varepsilon^2(\alpha^2/4 + n^2/4x) + i\overline{Q}(x)/4. \tag{3.4}$$

где $\bar{Q}(x)=\bar{q}(\sqrt{x})$. Кроме того,

$$\sqrt{in(B-\varepsilon^2 in)} = \sqrt{inB}\,(1- \varepsilon^2 in/2B + \varepsilon^2 n^2/8B^2+ \ldots). \qquad (3.5)$$

Используя (3.4), (3.5) получаем для трех первых коэффициентов в разложении $u(x,\varepsilon)$ по степеням ε следующие выражения:

$$u_0(x) = i\bar{Q}(x)/4,$$
$$u_1(x) = \sqrt{inB}/2x,\ u_2(x) = \alpha^2/4 + n^2/4x. \qquad (3.6)$$

Из (2.5)-(2.7) и (3.6) получаем уравнение для нахождения x_0:

$$\bar{Q}'(x_0) = 0. \qquad (3.7)$$

и далее находим

$$\lambda_0= - i\bar{Q}(x_0)/4, \qquad (3.8)$$

$$s(x) = \sqrt{\frac{i(\bar{Q}(x)-\bar{Q}(x_0))}{2x(x-x_0)^2}}\,, \qquad (3.9)$$

где знак корня выбран так, что $\mathrm{Re}\, s(x)<0$ (см. разд.2). Из (3.8) следует, что λ_0- чисто мнимое число, а значит, знак $\mathrm{Re}\,\lambda$ определяется знаком $\mathrm{Re}\,\lambda_1$.

В случае k=0 получаем из (2.14)

$$\lambda_1= - \sqrt{inB}/2x_0+ \frac{1}{2}\sqrt{ix_0\bar{Q}''(x_0)}\,. \qquad (3.10)$$

в случае произвольного k -

$$\lambda_1= - \sqrt{inB}/2x_0+ \frac{1}{2}\sqrt{ix_0\bar{Q}''(x_0)}\,(2k+1). \qquad (3.11)$$

Знак $\sqrt{inB}$ следует выбрать так, что $\mathrm{Re}\sqrt{inB}<0$: в противном случае заведомо $\mathrm{Re}\,\lambda_1<0$. Необходимым условием для существования λ с $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ является выполнение неравенства $\frac{1}{2}\mathrm{Re}\sqrt{ix_0\bar{Q}''(x_0)} > \mathrm{Re}\sqrt{inB}$.

Уравнение (3.7) совпадает с уравнением для x_0 из [3], где оно подробно исследовалось при различных значениях параметров. Выражения (3.8)-(3.11) также соответствуют полученным и исследованным в [3].

На основании (2.15)-(2.17) нетрудно найти и последующие коэффициенты λ_i (для случая k=0) асимптотического разложения λ. Приведем вычисление λ_2 при k=0 для случая, когда $U_p=0$ (спиральное течение Куэтта). В этом случае $\bar{Q}''(x_0)=nBx_0^{-3}$, $\bar{Q}'''(x_0)=-4nBx_0^{-4}$, $\bar{Q}''''(x_0)=18nBx_0^{-5}$, откуда на основании (2.7) находим

$$s(x) = \sqrt{inB}\, x_0^{-2}(1 - \frac{7}{6}\xi + \frac{89}{72}\xi^2+\ldots)/2\sqrt{2}.$$

где $\xi=(x-x_0)/x_0$. Кроме того, из (3.6)

$$u_1(x) = \sqrt{inB}\, x_0^{-1}(1 - \xi + \xi^2+\ldots).$$

Подставляя эти выражения в равенство (2.15), получим

$$\varphi_0(x) = x_0^{-1}(2/3-\sqrt{2}/2) + x_0^{-1}(5\sqrt{2}/12-83/144)\xi +\ldots \qquad (3.12)$$

Используя (3.12) и учитывая, что $u_2(x_0)=\alpha^2/4+n^2/4x_0$, получаем из равенства $\lambda_2=-u_2(x_0)+x_0\varphi_0'(x_0)+x_0\varphi_0^2(x_0)$ ((2.16) при n=1)

$$\lambda_2= - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{1}{4x_0}(n^2+ \sqrt{2} - \frac{53}{36}).$$

Это выражение также соответствует выражению из [3], полученному там путем более громоздких вычислений.

Литература

1. *Соловьев А.А.* Численное исследование проблемы магнитного динамо для течения Куэтта-Пуазейля проводящей жидкости // Теория и анализ сейсмологической информации. М.: Наука, 1985. С.90-97. (Вычисл.сейсмология; Вып.18).

2. *Соловьев А.А.* Возбуждение магнитного поля спиральным течением проводящей жидкости. М.: ИФЗ АН СССР, 1987. 132 с.

3. *Граева Е.М., Соловьев А.А.* Асимптотика поведения процесса возбуждения магнитного поля течением Куэтта-Пуазейля проводящей жидкости // Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука, 1989. С.84-92. (Вычисл.сейсмология; Вып.22).

4. *Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д., Соловьев А.А., Шукуров А.М.* Течение Куэтта-Пуазейля как винтовое динамо // Магнитная гидродинамика. 1989. N 1. С.9-14.

5. *Звонкин А.К., Шубин М.А.* Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН.1984. Т.39, вып.2. С.77-127.

6. *Cartier P.* Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non-standard // Séminaire Bourbaki. 34-e année, 1981/82. N 580. P. 1-24.(Novembre, 1981).