УДК 523.038

В.А.Желиговский

О ГЕНЕРАЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ДВИЖЕНИЕМ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЫ, ИМЕЮЩИМ ВНУТРЕННИЙ МАСШТАБ. II

Zheligovsky V.A.

ON MAGNETIC FIELD GENERATION BY CONDUCTING FLUID MOTION WITH INTERNAL SCALING. II

The paper is a continuation of the parer with the same title Computational Seismology in the previous issue. A complete asymptotic decomposition of induction operator eigenvalues and eigenvectors is construted in the kinematic dynamo problem of magnetic field generation by a motion of conducting medium with internal scaling along three spatial variables in a sphere with the α-effect.

Данная статья является непосредственным продолжением [1].

1. **Постановка задачи.** В настоящей работе на основе теории осреднения эллиптических операторов построено полное асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций оператора магнитной индукции

$$\mathcal{L}^n H \equiv d_m \Delta H + \mathrm{rot}[v^n, H] \qquad (1)$$

(d_m - коэффициент магнитной диффузии) в задаче о генерации магнитного поля движением проводящей жидкости в сфере Ω радиуса R с заданным полем скорости $\mathbf{v}^n$, имеющим флуктуирующую составляющую, зависящую от трех быстрых переменных, при наличии α-эффекта.

Пусть в Ω задано гладкое векторное поле $\mathbf{W}(\mathbf{x},P,\Theta,\Phi)$, периодическое по параметрам P, Θ и Φ (имеющим смысл быстрых переменных) с периодами R, π и 2π соответственно ($\mathbf{x}=(\rho,\theta,\varphi)$ - точка в Ω в сферической системе координат),

$$\langle \mathbf{W} \rangle = 0 \qquad (2)$$

$$(\langle g(\mathbf{x},P,\Theta,\Phi)\rangle \equiv (2\pi^2)^{-1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} g(\mathbf{x},P,\Theta,\Phi)\,dP\,d\Theta\,d\Phi \text{ - усреднение } g).$$

Статья посвящена рассмотрению асимптотического разложения собственных значений Λ_i и собственных векторов $\mathbf{H}_i^n$ оператора $\mathcal{L}^n$ для поля скорости специального вида:

$$v^n = U(x) + n^{-1/2}\mathrm{rot}(W(x,P,\Theta,\Phi)|_{P=n\rho,\Theta=n\theta,\Phi=n\varphi}) \tag{3}$$

в пространстве соленоидальных полей:

$$\mathrm{div}H = 0, \tag{4}$$

удовлетворяющих краевым условиям, отвечающим диэлектрику вне Ω:

$$\mathrm{div}H = 0, \quad \mathrm{rot}H = 0 \quad \text{в } \Omega' = R^3\backslash\Omega; \quad [H]_{\partial\Omega} = 0; \quad H\to 0 \text{ при } \rho\to\infty \tag{5}$$

($[\cdot]_{\partial\Omega}$ - скачок функции на $\partial\Omega$ - границе Ω) при $n\to\infty$ целых положительных. Указанное разложение имеет вид

$$H^n = H_0(x) + \sum_{l\geq 1} n^{-l/2}(H_l(x) + G_l(x,P,\Theta,\Phi)|_{P=n\rho,\Theta=n\theta,\Phi=n\varphi}), \tag{6}$$

$$\langle G_l\rangle = 0, \tag{7}$$

$$\Lambda^n = \sum_{l\geq 0} n^{-l/2}\lambda_l. \tag{8}$$

Главные члены этих рядов H_0 и λ_0 оказываются соответственно собственной функцией и собственным значением оператора

$$\mathcal{L}^{\infty}H \equiv d_m\Delta H + \mathrm{rot}[U, H] + \mathrm{rot}\mathcal{A}H,$$

в некотором смысле предельного для $\mathcal{L}^n$: линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе ортов сферической системы координат $(i_\rho, i_\theta, i_\varphi)$ задается симметрической матрицей

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha^{\rho\rho}(x), & \alpha^{\rho\theta}(x), & \alpha^{\rho\varphi}(x) \\ \alpha^{\theta\rho}(x), & \alpha^{\theta\theta}(x), & \alpha^{\theta\varphi}(x) \\ \alpha^{\varphi\rho}(x), & \alpha^{\varphi\theta}(x), & \alpha^{\varphi\varphi}(x) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

коэффициенты которой явно вычисляются. Вновь появившийся член $\mathrm{rot}\mathcal{A}H$, отвечает α-эффекту теории кинематического динамо.

Частный случай, когда геометрия задачи аксиально-симметрична, удобно рассматривать в цилиндрической системе координат (r,φ,z). Пусть $W=W(r,z,P,\Theta,\Phi)$, $U=U_p(r,z)+U(r,z)i_\varphi$. $H^\infty=\mathrm{rot}\ \chi(r,z)i_\varphi+H(r,z)i_\varphi$ - разложение U и аксиально-симметричной собственной функции H^∞ оператора $\mathcal{L}^\infty$ на полоидальную и тороидальную компоненты. Переходя к азимутальной компоненте и потенциалу полоидальной составляющей уравнения собственной функции, получаем

$$d_m(\Delta - r^{-2})\chi - r^{-1}(U_p,\nabla)(r\chi) + \alpha^{\varphi\rho}r^{-1}\mathcal{D}_1 r\chi + \alpha^{\varphi\theta}\mathcal{D}_2\chi + \alpha^{\varphi\varphi}H = \lambda_0\chi,$$

$$d_m(\Delta - r^{-2})H - r(U_p,\nabla)(H/r) + [\nabla(U/r),\nabla(r\chi)]^{(\varphi)} -$$

$$- \mathcal{D}_1(\alpha^{\rho\rho}r^{-1}\mathcal{D}_1 r\chi + \alpha^{\rho\theta}\mathcal{D}_2\chi + \alpha^{\rho\varphi}H) +$$

$$+ \mathcal{D}_2(\alpha^{\theta\rho}r^{-1}\mathcal{D}_1 r\chi + \alpha^{\theta\theta}\mathcal{D}_2\chi + \alpha^{\theta\varphi}H)) = \lambda_0 H.$$

$$\mathcal{D}_1 \equiv (r^2+z^2)^{-1/2}(z\partial/\partial r - r\partial/\partial z), \quad \mathcal{D}_2 \equiv (r^2+z^2)^{-1/2}(1+r\partial/\partial r + z\partial/\partial z)$$

$$(\text{вне } \Omega\ H=0,\ (\Delta - r^{-2})\chi=0;\ [H]_{\partial\Omega}=[\chi]_{\partial\Omega}=0).$$

Эта система является обобщением уравнений генерации Брагинского и уравнений для собственных функций предельного оператора, рассмотренного в [1].

Как и в [1], данная задача характеризуется величиной глобального магнитного числа Рейнольдса $R_m=\mathcal{O}(n^{1/2})$ и локального (в расчете на одну ячейку - система ячеек возникает вследствие зависимости поля скорости v^n от быстрых переменных) числа Рейнольдса $R_m^l=\mathcal{O}(n^{-1/2})$.

2. Формальное асимптотическое разложение. Переходя к безразмерным переменным, будем считать, что $d_m=1$, и что Ω - сфера $\rho\le 1$ $(R=1)$. Построим формальное решение уравнения

$$\mathcal{L}^n H^n = \Lambda^n H^n \tag{10}$$

в виде рядов (8) и

$$H^n = \sum_{l\ge 0} n^{-l/2}\left(H_l + G_l(x,P,\Theta,\Phi)\big|_{P=n\rho,\,\Theta=n\theta,\,\Phi=n\varphi}\right) \tag{6'}$$

(H_l удовлетворяют (4),(5), а G_l -(7)). Обозначим

$$D_P = \partial/\partial P, \quad D_\Theta = \rho^{-1}\,\partial/\partial\Theta, \quad D_\Phi = \rho^{-1}\sin^{-1}\theta\,\partial/\partial\Phi,$$

$$\mathbf{R}g = (D_\Theta g^{(\varphi)} - D_\Phi g^{(\theta)})i_\rho + (D_\Phi g^{(\rho)} - D_P g^{(\varphi)})i_\theta + (D_P g^{(\theta)} - D_\Theta g^{(\rho)})i_\varphi,$$

тогда

$$\mathrm{rot}\left(g(x,P,\Theta,\Phi)\big|_{P=n\rho,\,\Theta=n\theta,\,\Phi=n\varphi}\right) = \mathrm{rot}_x g + n\mathbf{R}g(g^{(\rho)},g^{(\theta)},g^{(\varphi)}) \quad -$$

координаты вектора g в базисе ортов сферической системы координат $(i_\rho, i_\theta, i_\varphi)$; дифференциальные операторы с нижним индексом x вычисляются при постоянных P,Θ и Φ). D_P, D_Θ, D_Φ и $\mathbf{R}$, очевидно, коммутируют. Подстановка (1),(3) и рядов (6'),(8) в (10) дает

$$\sum_{l\ge -4} n^{-l/2}\Big\{\sum_{m=-1}^{4}(a_m H_{l+m} + b_m G_{l+m}) - \sum_{m=0}^{l}\lambda_{l-m}(H_m + G_m)\Big\} = 0 \tag{11}$$

(используются обозначения $Q=\mathrm{rot}_x W$,

$a_{-1}H = \mathrm{rot}_x[Q,H]$, $\qquad b_{-1}G = \mathrm{rot}_x[Q,G]$,

$a_0 H = \Delta H + \mathrm{rot}[U,H]$, $\qquad b_0 G = \Delta_x G + \mathrm{rot}_x[U,G]$,

$a_1H = \mathrm{rot}_x[RW,H] + R[Q,H]$, $\qquad b_1G = \mathrm{rot}_x[RW,G] + R[Q,G]$,

$b_2G = 2D_P{}^{\partial G}/_{\partial\rho}+\rho^{-1}(2D_PG+2\sin^{-1}\theta\ D_\Phi{}^{\partial G}/_{\partial\varphi}+2D_\Theta{}^{\partial G}/_{\partial\theta}+\mathrm{ctg}\theta\ D_\Theta G)+R[U,G]$,

$a_3H = (H^{(\rho)}D_P+ H^{(\theta)}D_\Theta+ H^{(\varphi)}D_\Phi)RW$, $\qquad b_3G = R[RW,G]$,

$a_2H = a_4H = 0$, $\qquad b_4G = (D_P^2 + D_\Theta^2 + D_\Phi^2)G$;

при $l<0$ в (11) $H_l=0$, $G_l=0$, а последняя сумма $\sum\limits_{m=0}^{l}$ отсутствует). Последовательно приравняем к нулю выражения при различных степенях $n^{-1/2}$ в (11).

i. $l=-4$. $(D_P^2 + D_\Theta^2 + D_\Phi^2)G_0= 0 \Rightarrow G_0=0$.

ii. $l=-3$. $(D_P^2 + D_\Theta^2 + D_\Phi^2)G_1+(H_0^{(\rho)}D_P+ H_0^{(\theta)}D_\Theta+ H_0^{(\varphi)}D_\Phi)RW = 0$.

Пусть $\xi \in C^\infty(\bar\Omega\times[0,1]\times[0,\pi]\times[0,2\pi])$ при $0<\theta<\pi$ - решение уравнения $(D_P^2+D_\Theta^2+D_\Phi^2)\xi=-W$ с периодическими граничными условиями по P, Θ и Φ, $\langle\xi\rangle=0$ (это решение существует, так как $D_P^2+D_\Theta^2+D_\Phi^2$ - эллиптический оператор относительно переменных P,Θ,Φ с коэффициентами, зависящими от ρ,θ,φ); при $\theta=0,\pi$ $\xi=0$. Тогда

$$G_1=(H_0^{(\rho)}D_P + H_0^{(\theta)}D_\Theta + H_0^{(\varphi)}D_\Phi)R\xi.$$

iii. $l=-2$. $(D_P^2 + D_\Theta^2 + D_\Phi^2)G_2=-(H_1^{(\rho)}D_P+ H_1^{(\theta)}D_\Theta+ H_1^{(\varphi)}D_\Phi)RW-R[RW,G_1]$.

Так как среднее от правой части этого уравнения равно нулю, можно обратить оператор $D_P^2+D_\Theta^2+D_\Phi^2$ в пространстве периодических функций с нулевым средним и после подстановки полученного выше выражения для G_1 получить представление $G_2=(H_1^{(\rho)}D_P+H_1^{(\theta)}D_\Theta+H_1^{(\varphi)}D_\Phi)R\xi+\mathcal{T}_1H_0$ ($\mathcal{T}_1$-соответствующий линейный оператор; $\langle\mathcal{T}\cdot\rangle=0$).

iv. $l=-1$.

$$(D_P^2+D_\Theta^2+D_\Phi^2)G_3=-((H_2^{(\rho)}D_P+H_2^{(\theta)}D_\Theta+H_2^{(\varphi)}D_\Phi)RW + \mathrm{rot}_x[RW,H_0]+ +R[Q,H_0]+2D_P{}^{\partial G_1}/_{\partial\rho}+\rho^{-1}(2D_PG_1+2\sin^{-1}\theta\ D_\Phi{}^{\partial G_1}/_{\partial\varphi}+ +2D_\Theta{}^{\partial G_1}/_{\partial\theta}+\mathrm{ctg}\theta\ D_\Theta G_1)+R[U,G_1]+R[RW,G_2]). \qquad (12)$$

Поскольку выполнено условие разрешимости этого уравнения относительно G_3, можно однозначно найти отсюда представление

$$G_3=(H_2^{(\rho)}D_P + H_2^{(\theta)}D_\Theta + H_2^{(\varphi)}D_\Phi)R\xi + \mathcal{T}_1H_1+ \mathcal{T}_2H_0$$

($\mathcal{T}_2$- линейный оператор; $\langle\mathcal{T}_2\cdot\rangle=0$).

Определим $Dg(x,P,\Theta,\Phi) \equiv D_Pg^{(\rho)}+ D_\Theta g^{(\theta)}+ D_\Phi g^{(\varphi)}$.

Очевидно,

$$\operatorname{div} g = \operatorname{div}_x g + nDg, \quad DRg=0, \quad D\operatorname{rot}_x g + \operatorname{div}_x Rg = 0 \quad \forall\, g(x,P,\theta,\Phi). \quad (13)$$

Из соотношений (12),(13) следует, что $DG_3 + \operatorname{div}_x G_1 = 0$.

v. $l=0$.

$$(D_P^2+D_\theta^2+D_\Phi^2)G_4+(H_3^{(\rho)}D_P+H_3^{(\theta)}D_\theta+H_3^{(\varphi)}D_\Phi)RW+\operatorname{rot}_x[RW,H_1+G_1] +$$

$$+R[Q,H_1+G_1]+R[U,G_2]+R[RW,G_3]+\Delta H_0+\operatorname{rot}[U,H_0]+2D_P\,{}^{\partial G_2}/_{\partial\rho} +$$

$$+\rho^{-1}(2D_PG_2+2\sin^{-1}\theta\, D_\Phi\,{}^{\partial G_2}/_{\partial\varphi}+2D_\theta\,{}^{\partial G_2}/_{\partial\theta}+\operatorname{ctg}\theta\, D_\theta G_2)=\lambda_0 H_0. \quad (14)$$

Усреднение (14) дает

$$\mathcal{L}^\infty H_0 = \lambda_0 H_0, \quad (15)$$

причем $\langle\operatorname{rot}_x[RW,G_1]\rangle \equiv \operatorname{rot}\mathcal{A}H_0$, откуда находим

$$\alpha^{\rho\rho}(x)=\langle(D_P^2W,R\xi)\rangle, \quad \alpha^{\theta\theta}(x)=\langle(D_\theta^2W,R\xi)\rangle, \quad \alpha^{\varphi\varphi}(x)=\langle(D_\Phi^2W,R\xi)\rangle,$$

$$\alpha^{\rho\theta}(x)=\alpha^{\theta\rho}(x)=\langle(D_PD_\theta W,R\xi)\rangle, \quad \alpha^{\rho\varphi}(x)=\alpha^{\varphi\rho}(x)=\langle(D_PD_\Phi W,R\xi)\rangle,$$

$$\alpha^{\theta\varphi}(x)=\alpha^{\varphi\theta}(x)=\langle(D_\theta D_\Phi W,R\xi)\rangle. \quad (16)$$

Из (15) λ_0– собственное значение и $H_0=H^\infty$– соответствующая нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция оператора $\mathcal{L}^\infty$, удовлетворяющая (4) и (5). Вычитая (15) из (14), получим

$$(D_P^2+D_\theta^2+D_\Phi^2)G_4+(H_3^{(\rho)}D_P+H_3^{(\theta)}D_\theta+H_3^{(\varphi)}D_\Phi)RW+\operatorname{rot}_x([RW,H_1+G_1]-\mathcal{A}H)+$$

$$+R[Q,H_1+G_1]+R[U,G_2]+R[RW,G_3]+2D_P\,{}^{\partial G_2}/_{\partial\rho}+$$

$$+\rho^{-1}(2D_PG_2+2\sin^{-1}\theta\, D_\Phi\,{}^{\partial G_2}/_{\partial\varphi}+2D_\theta\,{}^{\partial G_2}/_{\partial\theta}+ \operatorname{ctg}\theta\, D_\theta G_2)=0, \quad (17)$$

откуда с учетом (7) находим представление $G_4=(H_3^{(\rho)}D_P+H_3^{(\theta)}D_\theta+H_3^{(\varphi)}D_\Phi)R\xi+\mathcal{T}_1H_2+\mathcal{T}_2H_1+\mathcal{T}_3H_0$ ($\mathcal{T}_3$– линейный оператор; $\langle\mathcal{T}_3\cdot\rangle=0$). Пользуясь (13), получаем из (17), что $DG_4+\operatorname{div}_x G_2=0$. Ниже будет показана разрешимость уравнений, возникающих для $l>0$.

3. Спиральность поля скорости. Будем полагать, что поле скорости (3) описывает стационарный несжимаемый поток жидкости ($\operatorname{div} v^n=\operatorname{div} U=0, U\in C^\infty(\bar\Omega)$), а **W** удовлетворяет дополнительным условиям:

$$W(x,P,\theta,\Phi)\in C^\infty(\bar\Omega\times[0,1]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]), \quad (18')$$

$$D^mW|_{\rho=0}= D^mW|_{\theta=0}=D^mW|_{\theta=\pi}=0 \quad \forall \text{ мультииндекса } m \quad (18'')$$

(D^m– частные производные по переменным ρ,θ и φ),

$$(i_\nu,\nabla)^k W\,\big|_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall\ k\ge 0. \qquad (19)$$

($i_\nu = i_\rho$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$).

Из (18) следует, что $\forall\alpha,\beta\in R^1$ $\rho^\alpha \sin^\beta\theta\ W(x,n\rho,n\theta,n\varphi)\in C^\infty(\bar\Omega)$ и $\rho^\alpha\sin^\beta\theta\ \xi(x,n\rho,n\theta,n\varphi)\in C^\infty(\bar\Omega)$.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть выполнено условие непротекания через границу* $(v^n,i_\nu)\big|_{\partial\Omega}=(U,i_\nu)\big|_{\partial\Omega}=0$. *Тогда гладкая и флуктуирующая составляющие поля* v^n *дают асимптотически независимые вклады в спиральность* $I(v^n)$ *равные соответственно спиральности гладкой составляющей и* $-\int_\Omega \mathrm{tr}\mathcal{A}\ dx^3$ *(в размерном виде* $-d_m\int_\Omega \mathrm{tr}\mathcal{A}\ dx^3$*).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $U=\mathrm{rot}W$. Тогда

$$I(v^n)=\int_\Omega (W+n^{-1/2}W,U+n^{-1/2}\mathrm{rot}W)\big|_{P=n\rho,\,\Theta=n\theta,\,\Phi=n\varphi}\ dx^3=$$

$$=I(U)+\int_\Omega 2n^{-1/2}(W,U)+n^{-1}(W,\mathrm{rot}_x W+nRW)\,dx^3=I(U)+\int_\Omega (W,RW)\,dx^3+\mathcal{O}(n^{-1/2}).$$

Рассмотрим ряды Фурье:

$$W(x,P,\Theta,\Phi)=\sum W_{m,m',p,p',q,q'}\exp(i(2\pi m\rho+2\pi m'P+2p\theta+2p'\Theta+q\varphi+q'\Phi)),$$

$$\rho^2\sin\theta\ RW=\sum X_{m,m',p,p',q,q'}\exp(i(2\pi m\rho+2\pi m'P+2p\theta+2p'\Theta+q\varphi+q'\Phi)).$$

Из (16) $\mathrm{tr}\mathcal{A} = -\langle (W,RW)\rangle$, поэтому

$$\int_\Omega (W,RW)+\mathrm{tr}\mathcal{A}\ dx^3= 2\pi^2\sum (W_{m,m',p,p',q,q'},X_{m_1,m_1',p_1,p_1',q_1,q_1'}),$$

где суммирование распространено на $m,m',p,p',q,q',m_1,m_1',p_1,p_1',q_1,q_1'$ такие, что $m+m_1+n(m'+m_1') = p+p_1+n(p'+p_1') = q+q_1+n(q'+q_1')= 0$ и $m'+m_1'\ne 0,\ p'+p_1'\ne 0,\ q'+q_1'\ne 0 \Rightarrow |m|+|m_1|+|p|+|p_1|+|q|+|q_1|\ge 3n$.

Вследствие (18') $\forall\ E\ge 1$

$$\sum_{\substack{m,m',p,p',q,q':\\ |m|+|p|+|q|\ge E}} |W_{m,m',p,p',q,q'}|\le CE^{-1/2},$$

$$\sum_{\substack{m,m',p,p',q,q':\\ |m|+|p|+|q|\ge E}} |X_{m,m',p,p',q,q'}|\le CE^{-1/2},$$

поэтому

$$\int_\Omega (W,RW)+\mathrm{tr}\mathcal{A}\ dx^3= \mathcal{O}(n^{-1/2}) \Rightarrow I(v^n) = I(U)-\int_\Omega \mathrm{tr}\mathcal{A}\ dx^3+\mathcal{O}(n^{-1/2}),$$

что доказывает предложение 1.

4. Оценки в функциональных пространствах Соболева. Как и в [1], обозначим норму в пространстве Соболева $W_2^q(\Omega)$ через $|\cdot|_q$, норму в пространстве Соболева $H^q(\Omega)$ функций, удовлетворяющих (4),(5), – через $\|\cdot\|_q$. Напомним, что при $0 \le q \ne 2m + 1/2$, m – целое, и при $0 \ge q \ne 2m-1/2$ $\|\cdot\|_q$ эквивалентна $|\cdot|_q$, а при $q=2m+1/2>0$

$$C_q\|f\|_q \ge |f|_q \tag{20}$$

(см. [1], разд.5). При $\forall q$ эллиптические операторы $\mathcal{L}^n, \mathcal{L}^\infty$ имеют в $H^q(\Omega)$ точечный спектр; каждому собственному значению отвечает конечномерное подпространство гладких корневых векторов.

Необходимые равномерные по n оценки можно получить на основании леммы 2, для доказательства которой используется

Л е м м а 1. *Пусть* $f \in W_2^s(\Omega)$, $0 \le s \le 2$,

$$\rho^3 \sin^{5/2}\theta\ f = \sum_{m,p,q} f_{m,p,q} \exp(i(2\pi m\rho + 2p\theta + q\varphi)).$$

Тогда

$$C_s|f|_s^2 \ge \sum_{m,p,q} (|m|^{2s} + |p|^{2s} + |q|^{2s})|f_{m,p,q}|^2 \tag{21}$$

(*константа* C_s *не зависит от* f).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем $X_1=L_2(\Omega)$, $X_0=W_2^2(\Omega)$. Для произвольных $f,g \in C^\infty(\Omega)$ рассмотрим ряды Фурье:

$$\rho^3 \sin^{5/2}\theta\ f = \sum_{m,p,q} f_{m,p,q} \exp(i(2\pi m\rho + 2p\theta + q\varphi)),$$

$$\rho^3 \sin^{5/2}\theta\ g = \sum_{m,p,q} g_{m,p,q} \exp(i(2\pi m\rho + 2p\theta + q\varphi)).$$

Положим

$$(((f,g)))_\theta \equiv \int_\Omega \rho^{-2}\sin^{-1}\theta \Big(\sum_{m,p,q} (1+|2\pi m|^{4(1-\theta)} + |2p|^{4(1-\theta)} + |q|^{4(1-\theta)})^{1/2} f_{m,p,q} \exp(i(2\pi m\rho + 2p\theta + q\varphi)),$$

$$\overline{\sum_{m,p,q} (1+|2\pi m|^{4(1-\theta)} + |2p|^{4(1-\theta)} + |q|^{4(1-\theta)})^{1/2} g_{m,p,q} \times}$$

$$\overline{\times \exp(i(2\pi m\rho + 2p\theta + q\varphi))}\Big) dx^3 = 2\pi^2 \sum_{m,p,q} (1+|2\pi m|^{4(1-\theta)} + |2p|^{4(1-\theta)} + |q|^{4(1-\theta)})(f_{m,p,q}, \overline{g_{m,p,q}}),$$

$\theta \in [0,1]$, Y_θ – замыкание $C^\infty(\Omega)$ по норме, индуцированной скалярным произведением $(((\cdot,\cdot)))_\theta$ $(Y_\theta = [Y_0, Y_1]_\theta)$. Положим $\forall f \in L_2(\Omega)$ $\pi f = f$. Очевидно, $\pi : X_1 \to Y_1$ непрерывен. Поскольку

$$(((f,f)))_0 = |f\rho^2\sin^2\theta|_0^2 + |\rho^{-1}\sin^2\theta\ \partial^2\rho^3 f/\partial\rho^2|_0^2 +$$

$$+ |\rho^2 \sin^{-1/2}\theta\ \partial^2/\partial\theta^2\ (\sin^{5/2}\theta\ f)|_0^2 + |\rho^2\sin^2\theta\ \partial^2 f/\partial\varphi^2|_0^2,$$

а операторы $\rho^{-1}\sin^2\theta\, \partial/_{\partial\rho^2}(\rho^3\cdot):\ W_2^2(\Omega)\to L_2(\Omega)$,

$$\rho^2\sin^{-1/2}\theta\, \partial/_{\partial\theta^2}(\sin^{5/2}\theta\ \cdot):\ W_2^2(\Omega)\to L_2(\Omega) \quad \text{и}$$

$$\rho^2\sin^2\theta\,\partial^2/_{\partial\varphi^2}:W_2^2(\Omega)\ \to\ L_2(\Omega),$$

как нетрудно убедиться, непрерывны, то $\pi:X_0\to Y_0$ также непрерывен, и по теореме о линейном операторе, действующем в промежуточных интерполяционных пространствах (см. [1], теорема 1), (21) верно $\forall\ s=2(1-\theta)$.

Л е м м а 2. *Пусть* $0\le\beta\le2$, *матрица* $\boldsymbol{W}$ *удовлетворяет условиям*

$$\boldsymbol{W}(x,P,\Theta,\Phi)\in C^{\infty}(\overline{\Omega}\times[0,1]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]),$$

$$D^m\boldsymbol{W}|_{\rho=0}=D^m\boldsymbol{W}|_{\theta=0}=D^m\boldsymbol{W}|_{\theta=\pi}=0\quad\forall\ \textit{мультииндекса}\ m, \tag{22}$$

(D^m - *частные производные по переменным* ρ, θ *и* φ),

$$\langle\boldsymbol{W}\rangle=0. \tag{23}$$

Тогда

$$\Big|\int_\Omega(\boldsymbol{W}(x,n\rho,n\theta,n\varphi)h,f)dx^3\Big|\le C_{\beta,\boldsymbol{W}}\,n^{-\beta}(|h|_0|f|_\beta+|h|_\beta|f|_0) \tag{24}$$

(*константа* $C_{\beta,\boldsymbol{W}}$ *не зависит от* h *и* f).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим ряды Фурье

$$\rho^3\sin^{5/2}\theta\ h(x)=\sum_{m,p,q}h_{m,p,q}\exp(i(2\pi m\rho+2p\theta+q\varphi)),$$

$$\rho^3\sin^{5/2}\theta\ f(x)=\sum_{m,p,q}f_{m,p,q}\exp(i(2\pi m\rho+2p\theta+q\varphi)),$$

$$\rho^{-4}\sin^{-4}\theta\boldsymbol{W}(x,P,\Theta,\Phi)=$$

$$=\sum\boldsymbol{W}_{m,m',p,p',q,q'}\exp(i(2\pi m\rho+2\pi m'P+2p\theta+2p'\Theta+q\varphi+q'\Phi)).$$

$$\Big|\int_\Omega(\boldsymbol{W}(x,n\rho,n\theta,n\varphi)h,f)dx^3\Big|=$$

$$=2\pi^2\Big|\sum_{m,m',p,p',q,q',m'',p'',q''}(\boldsymbol{W}_{m,m',p,p',q,q'}h_{p'',q''},$$

$$f_{-m-nm'-m''-p-np'-p''-q-nq'-q''})\Big|\le2\pi^2\sum_{m,m',p,p',q,q'}|\boldsymbol{W}_{m,m',p,p',q,q'}|\ \times$$

$$\times\ \Big[\Big(\sum_{|m+m''+nm'|+|p+p''+np'|+|q+q''+nq'|\ge n/3}|h_{p'',q''}|^2\Big)^{1/2}\ \times$$

$$\times \Big(\sum_{\substack{|m+m''+nm'|+|p+p''+np'|+\\ +|q+q''+nq'|\ge n/3}} |f_{-m-nm'-m'',-p-np'-p'',-q-nq'-q''}|^2 \times$$

$$\times \left(\frac{|m+m''+nm'|+|p+p''+np'|+|q+q''+nq'|}{n/3}\right)^{2\beta}\Big)^{1/2} +$$

$$+ \Big(\sum_{|m''|+|p''|+|q''|\ge n/3} |H_{p'',q''}|^2 \left(\frac{|m''|+|p''|+|q''|}{n/3}\right)^{2\beta}\Big)^{1/2} \times$$

$$\times \Big(\sum_{|m''|+|p''|+|q''|\ge n/3} |f_{-m-nm'-m'',-p-np'-p'',-q-nq'-q''}|^2\Big)^{1/2} +$$

$$+ \Big(\sum_{\substack{p'',q'':\ |m''|+|p''|+|q''|<n/3\\ |m+m''+nm'|+|p+p''+np'|+|q+q''+nq'|<n/3}} |H_{p'',q''}|^2\Big)^{1/2} \times$$

$$\times\Big(\sum_{\substack{p'',q'':\ |m''|+|p''|+|q''|<n/3\\ |m+m''+nm'|+|p+p''+np'|+|q+q''+nq'|<n/3}} |f_{-m-nm'-m'',-p-np'-p'',-q-nq'-q''}|^2\Big)^{1/2}\Big\} \qquad (25)$$

(для матрицы $\mathcal{M}$ $|\mathcal{M}|= \sup\limits_{|e_1|=|e_2|=1} |(\mathcal{M}e_1,e_2)|$). В силу (22) $\forall E\ge 1$, $\forall\beta\ge 0$

$$\sum_{\substack{m,m',p,p',q,q'\\ |m|+|p|+|q|\ge n/3}} |\mathcal{W}_{m,m',p,p',q,q'}| \le C_\beta E^{-\beta}.$$

Вследствие (23) можно считать, что в сумме (25) $|m'|+|p'|+|q'|\ne 0$, поэтому последнее слагаемое в (25) не равно нулю только при $|m|+|p|+|q|\ge n/3$. Продолжим (25), используя лемму 1:

$$\left|\int_\Omega(\mathcal{W}(x,n\rho,n\theta,n\varphi)h,f)\,dx^3\right|\le C_\beta'(3/n)^\beta(|H|_0|f|_\beta+|H|_\beta|f|_0+|H|_0|f|_0)\le$$
$$\le C_{\beta,\mathcal{W}}\, n^{-\beta}(|H|_0|f|_\beta+|H|_\beta|f|_0).$$

Лемма доказана.

С л е д с т в и е. *Пусть* $\alpha\ge\beta\ge 0$, $\beta\le 2$, D^m – *дифференциальный оператор порядка* $m\ge 0$ *с гладкими коэффициентами в* $\bar\Omega$. *Если выполнено* (22), (23), *то*

$$|\mathcal{W}(x,n\rho,n\theta,n\varphi)D^m H|_{-\alpha} \le C_{\alpha,\beta,\mathcal{W}}\, n^{-\beta}|H|_{\beta+m}.$$

5. Равномерная ограниченность и сходимость резольвент.

П р е д л о ж е н и е 2. *При* $\lambda > C'$

$$\|H\|_{1/2} \le C|(\mathcal{L}^n-\lambda)H|_{-3/2}, \qquad (26')$$

$$\|H\|_{1/2} \le C|(\mathcal{L}^\infty-\lambda)H|_{-3/2} \qquad (26'')$$

($C,\ C'>0$ – *некоторые константы, не зависящие от* $\mathbf{H}\in H^{1/2}(\Omega)$).

Доказательство совпадает с доказательством предложения 2 [1] (с тем отличием, что вместо леммы 2 [I] оно опирается на лемму 2, доказанную выше, обеспечивающую оценку (24) в новых условиях при наличии трех быстрых переменных).

На основании оценки $\|\mathbf{H}\|_0\le C_0\|(\mathcal{L}^n-\lambda)\,\mathbf{H}\|_0$, являющейся следствием (26'), и аналитичности резольвенты $(\mathcal{L}^n-\lambda)^{-1}$ по λ заключаем, что при всех $\lambda\ge C'$ определены резольвенты $(\mathcal{L}^n-\lambda)^{-1}$ и $(\mathcal{L}^\infty-\lambda)^{-1}$.

Предложение 3. *При* $\lambda>C'$ (C' – *из предложения* 2)

$$\|(\mathcal{L}^n-\lambda)^{-1}-(\mathcal{L}^\infty-\lambda)^{-1}\|_0\le C_\lambda n^{-1/2} \tag{27}$$

Доказательство. Пусть $(\mathcal{L}^n-\lambda)\mathbf{h}^n=\mathbf{f}$, $(\mathcal{L}^\infty-\lambda)\mathbf{h}^\infty=\mathbf{f}$,

$$G=(h^{\infty\,(\rho)}D_\rho+h^{\infty\,(\theta)}D_\theta+h^{\infty\,(\varphi)}D_\Phi)R\xi.$$

Оценим величину

$$(\mathcal{L}^n-\lambda)(\mathbf{h}^\infty+n^{-1/2}G-\mathbf{h}^n)=n^{-1/2}\mathrm{rot}_x[Q,\mathbf{h}^\infty]+n^{1/2}R[Q,\mathbf{h}^\infty]+$$

$$+n^{1/2}\mathrm{rot}_x[RW,\mathbf{h}^\infty]+n^{-1/2}\{\Delta_x G+n(2D_\rho{}^{\partial G}/_{\partial\rho}+\rho^{-1}(2D_\rho G+$$

$$+2\sin^{-1}\theta\, D_\Phi{}^{\partial G}/_{\partial\varphi}+2D_\theta{}^{\partial G}/_{\partial\theta}+\mathrm{ctg}\theta\, D_\theta G))+\mathrm{rot}_x[U,G]+nR[U,G]+$$

$$+n^{-1/2}\mathrm{rot}_x[Q,G]+n^{1/2}R[Q,G]+n^{1/2}\mathrm{rot}_x([RW,G]-\lambda\mathbf{h}^\infty)+n^{3/2}R[RW,G]-\lambda G\}$$

с помощью следствия леммы 2:

$$|(\mathcal{L}^n-\lambda)(\mathbf{h}^\infty+n^{-1/2}G-\mathbf{h}^n)|_{-3/2}\le C_1\{n^{-1/2}|\mathbf{h}^\infty|_1+n^{1/2}(n^{-1}|\mathbf{h}^\infty|_1+$$

$$+n^{-1}|\mathbf{h}^\infty|_2)+n^{-1/2}\{|\mathbf{h}^\infty|_2+2nn^{-1}|\mathbf{h}^\infty|_2+|\mathbf{h}^\infty|_1+nn^{-1}|\mathbf{h}^\infty|_1+n^{-1/2}|\mathbf{h}^\infty|_1+$$

$$+n^{1/2}n^{-1}|\mathbf{h}^\infty|_1+n^{1/2}n^{-1}|\mathbf{h}^\infty|_2+n^{3/2}n^{-3/2}|\mathbf{h}^\infty|_{3/2}+|\mathbf{h}^\infty|_0\}\}\le$$

$$\le C_2 n^{-1/2}|\mathbf{h}^\infty|_2.$$

Построим в R^3 функцию $p\in C^1(R^3)$ такую, что $\Delta p=\mathrm{div}G$ в Ω, $\Delta p=0$ в Ω', $p\to 0$ при $\rho\to\infty$. Тогда $|p|_2\le C_3|\mathrm{div}\ G|_0$ (согласно результатам разд.5 [I]). В силу последней оценки, следствия леммы 2 и (13)

$$|(\mathcal{L}^n-\lambda)\nabla p|_{-3/2}\le C_3^1(|\nabla p|_{1/2}+|[U,\nabla p]|_{-1/2}+n^{-1/2}(|[\mathrm{rot}_x W,\nabla p]|_{-1/2}+$$

$$+n|[RW,\nabla p]|_{-1/2}))\le C_3^2(|\nabla p|_{1/2}+n^{-1/2}(|\nabla p|_0+n\cdot n^{-1/2}|\nabla p|_{1/2})\le$$

$$\le C_3^3|\nabla p|_1\le C_3^4|\mathrm{div}\ G|_0=C_3^4|\mathrm{div}_x G|_0\le C_4|\mathbf{h}^\infty|_1.$$

Из равенства $(\mathcal{L}^\infty-\lambda)\mathbf{h}^\infty=\mathbf{f}$ следует, что $|\mathbf{h}^\infty|_2\le C_5|\mathbf{f}|_0$. Таким образом,

$$|(\mathcal{L}^n-\lambda)(h^\infty + n^{-1/2}(G-\nabla p) - h^n)|_{-3/2} \le C_6 n^{-1/2}|h^\infty|_2. \qquad (28)$$

По построению $h^\infty + n^{-1/2}(G-\nabla p) - h^n \in H^0(\Omega)$. Вследствие (26') и (28)

$$\|h^\infty + n^{-1/2}(G-\nabla p) - h^n\|_{1/2} \le C_7 n^{-1/2}|f|_0.$$

Поскольку также

$\|G-\nabla p\|_0 \le C_8(|\nabla p|_0 + |G|_0) \le C_9|h^\infty|_1 \le C_{10}|f|_0$, отсюда следует (27).

Из предложения 3 по теоремам 2 и 3 [1] следует

П р е д л о ж е н и е 4. *К каждому собственному значению* Λ_i^∞ *(кратности* m*) оператора* $\mathcal{L}^\infty$ *сходятся ровно* m *собственных значений (включая кратные)* Λ_{ik}^n *операторов* $\mathcal{L}^n$: $|\Lambda_{ik}^n - \Lambda_i^\infty| \le C_i n^{-1/2m}$; *соответствующие* m*-мерные подпространства сходятся с оценкой инвариантных проекторов*

$$\|P^n - P^\infty\|_0 \le C_i n^{-1/2}. \qquad (29)$$

Дальнейшее изложение проведем для случая, когда собственное - значение Λ^∞ оператора $\mathcal{L}^\infty$ имеет кратность 1.

6. Асимптотические ряды теории возмущений.

П р е д л о ж е н и е 5. *Все члены рядов* (6). (8) *могут быть найдены из условия равенства нулю членов ряда* (11). *При этом* $\forall l$

$$DG_{l+2} + \mathrm{div}_x G_l = 0. \qquad (30)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Последовательно будут решены уравнения

$$\sum_{m=-1}^{4}(a_m H_{l+m} + b_m G_{l+m}) - \sum_{m=0}^{l}\lambda_{l-m}(H_m + G_m) = 0. \qquad (31)$$

Флуктуирующие члены ряда (8) будем искать в виде

$$G_{l+4} = (H^{(\rho)}_{l+3}D_P + H^{(\theta)}_{l+3}D_\theta + H^{(\varphi)}_{l+3}D_\Phi)R\xi + \mathcal{I}_1 H_{l+2} + \mathcal{I}_2 H_{l+1} + G'_l \qquad (32)$$

(G'_l - векторные поля, которые предстоит найти). Докажем индукцией по k следующее утверждение:

можно определить векторные поля $G'_m, G_m \in C^\infty(\bar\Omega\times[0,1]\times[0,\pi]\times[0,2\pi])$, $H_m \in C^\infty(\bar\Omega)$ *и коэффициенты* λ_m, $1\le m\le k$, *так, чтобы выполнялись:*

i. *равенства* (32) $\forall l \le k-4$;

ii. *при подстановке* G_m, H_m, λ_m *с* $m\le k$ *и* G_{l+4} *в виде* (32) *при* $k-3\le l\le k$ *уравнения* (31) $\forall l\le k$;

iii. *равенства* (30) $\forall l\le k+2$;

iv. *условия* (7) $\forall l\le k+4$; *все* H_l *удовлетворяют* (4). (5) *и при* $l>0$ -

условию нормировки

$$P^{\infty}H_l = 0 \qquad (33)$$

(P^{∞}-$\mathcal{L}^{\infty}$-инвариантный проектор в $H^0(\Omega)$ на собственное подпространство векторов, пропорциональных $H_0=H^{\infty}$, отвечающих собственному значению Λ^{∞}).

Для k=0 это утверждение верно по построению разд.2. Обоснуем шаг индукции. Для $l=k+1$ усреднение (31) после подстановки (32) с $l=k-2$ дает

$$(\mathcal{L}^{\infty}-\Lambda^{\infty})H_{k+1}+ H'_{k+1}- \sum_{m=0}^{k} \lambda_{k+1-m}H_m = 0, \qquad (34)$$

$$H'_{k+1}= \mathrm{rot}_x\langle[RW,\mathcal{T}_1H_k+ \mathcal{T}_2H_{k-1}+ G'_{k-2}] + [Q,G_k]\rangle.$$

Применяя к (34) проектор P^{∞}, получаем (см. (33))

$$\lambda_{k+1}H_0 = P^{\infty}H'_{k+1}, \qquad (35)$$

откуда определяем λ_{k+1}. Вычитая (35) из (34), находим

$$H_{k+1}=(\mathcal{L}^{\infty}-\Lambda^{\infty})^{-1}\big|_{\mathrm{Im}(1-P^{\infty})}(1- P^{\infty})\Big(\sum_{m=0}^{k}\lambda_{k+1-m}H_m- H'_{k+1}\Big).$$

Рассмотрим флуктуирующую часть (31):

$$Z_k\equiv(D_P^2+ D_\Theta^2+ D_\Phi^2)G_{k+5}+(H_{k+4}^{(\rho)}D_P + H_{k+4}^{(\theta)}D_\Theta + H_{k+4}^{(\varphi)}D_\Phi)RW +a_1H_{k+2}+a_{-1}H_k + $$
$$+ \sum_{m=-1}^{3} b_mG_{k+1+m}- \mathrm{rot}_x\langle[RW,G_{k+2}]+[Q, G_k]\rangle- \sum_{m=1}^{k+1}\lambda_{k+1-m}G_m= 0.$$

Обращая оператор $D_P^2+D_\Theta^2+D_\Phi^2$ и выполняя подстановку (32) для $k-3\le l\le k+1$, находим G'_{k+1}. Алгебраическими преобразованиями с учетом (13) и предположения индукции о выполнении (30) $\forall l\le k+2$ получаем

$$0 = DZ_k+ \mathrm{div}_xZ_{k-2}= (D_P^2 +D_\Theta^2 +D_\Phi^2)(DG_{k+5}+\mathrm{div}_xG_{k+3}),$$

откуда следует (30) для $l=k+3$. Предложение 5 доказано.

7. Сходимость асимптотических рядов. Положим

$f_k^n \equiv \sum_{l=0}^{k} n^{-1/2}(H_l+G_l(x,n\theta,n\varphi))$, $p_k^n \in C^1(R^3)$ – решение задачи

$\Delta p_k^n = \mathrm{div}f_k^n$ в Ω, $\Delta p_k^n =0$ в Ω', $p_k^n\to 0$ при $\rho\to\infty$ ($f_k^n-\nabla p_k^n \in H^0(\Omega)$), $h_k^n\equiv$ $\equiv P^n(f_k^n -\nabla p_k^n)$ (P^n-$\mathcal{L}^n$- инвариантные проекторы в $H^0(\Omega)$ на одномерные собственные подпространства операторов $\mathcal{L}^n$, отвечающие собственным значениям $\Lambda^n\to\Lambda^{\infty}$), $g_k^n \equiv(1-P^n)(f_k^n- \nabla p_k^n)= f_k^n-\nabla p_k^n-h_k^n$.

П р е д л о ж е н и е 6. *Для любого* $k\ge 0$, $(k+1)/2\ge s\ge 0$:

i. $|h_k^n|_0 = 1+\mathcal{O}(n^{-1/2})$,

ii. $|\Lambda^n - \sum_{l=0}^{k} n^{-l/2}\lambda_l| = \mathcal{O}(n^{-(k+1)/2})$,

iii. $|\nabla p_k^n|_s = \mathcal{O}(n^{s-(k+1)/2})$,

iv. $|g_k^n|_s = \mathcal{O}(n^{s-(k+1)/2})$.

По теореме вложения Соболева отсюда следует асимптотическая сходимость (6) в норме максимума модуля с любым числом производных.

Доказательство полностью повторяет доказательство предложения 6[1] (не использующее явным образом одномерность пространства быстрых переменных, а опирающееся только на то, что $\mathbf{H}_l$ и $\mathbf{G}_l$ удовлетворяют уравнениям (31), $|\mathbf{G}_l|_s=\mathcal{O}(n^s)$, выполнено (30), обеспечивающее асимптотическую соленоидальность (6), и что задачи на собственные значения (1),(3),(4),(5),(10) сходятся в смысле (29)).

Замечание 1. *Предложения* 1–6 *верны в более общем случае:*

$$\mathbf{v}^n = \mathbf{U}(\mathbf{x}) + \mathrm{rot}\left(\mathbf{W}(\mathbf{x},\mathrm{P},\Theta,\Phi,n^{-1/2})\big|_{\mathrm{P}=n\rho,\,\Theta=n\theta,\,\Phi=n\varphi}\right), \qquad (36)$$

если $\mathbf{W}$ удовлетворяет (2), (18), (19) и является аналитической функцией по последнему аргументу:

$$\mathbf{W}(\mathbf{x},\mathrm{P},\Theta,\Phi,n^{-1/2}) = \sum_{m\geq 0} \mathbf{W}_m(\mathbf{x},\mathrm{P},\Theta,\Phi)\,n^{-m/2}.$$

При этом вид предельного оператора $\mathcal{L}^\infty$ не изменяется; коэффициенты матрицы (9) в члене $\mathrm{rot}\mathcal{A}\mathbf{H}$, отвечающем α-эффекту, вычисляются по формулам (16) при $\mathbf{W} = \mathbf{W}_0(\mathbf{x},\mathrm{P},\Theta,\Phi)$, $(D_\mathrm{P}^2+D_\Theta^2+D_\Phi^2)\xi = -\mathbf{W}_0$.

Замечание 2. *Аналогичное асимптотическое разложение для поля скорости* (36), *удовлетворяющее оценкам сходимости предложения* 6, *можно построить для краевых условий, отличных от* (5), *— например, для случая, когда* Ω *— сферический слой, разделяющий непроводящее внешнее пространство и внутреннее идеально-электропроводное ядро.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Желиговский В.А.* О генерации магнитного поля движением проводящей среды, имеющим внутренний масштаб // Компьютерный анализ геофизических полей. М.: Наука, 1990. С.161-181. (Вычисл. сейсмология; вып.23).