

А.Т.Исмаил-заде

ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕКТОНИЧЕСКИХ ВОЛН В ДВУХСЛОЙНОЙ МОДЕЛИ ВЕРХНЕЙ МАНТИИ ЗЕМЛИ

A. T. Ismail-zadeh

GRAVITATIONAL INSTABILITY AND PROPAGATION OF TECTONIC WAVES IN A TWO-LAYER MODEL OF UPPER MANTLE OF EARTH

The work presents the numerical analysis of the gravitational instability in a two-layer viscoelastic model and the propagation of tectonic waves in lithosphere - asthenosphere. The analysis includes horizontal forces. Modes of maximum instability and rates of growth were computed for the case of density inversion. These rates increase several times with horizontal stresses and spatial wavelengths also increase approximately twice. In the absence of density inversion fast tectonic waves are found. The variation of this velocity is computed for various geometries and physical parameters, including horizontal forces.

Природа тектонических явлений привлекает к себе повышенное внимание. Принято считать, что литосфера Земли разделена на ряд жестких плит, находящихся в относительном движении. Такие движения ведут к накоплению тектонических напряжений. По имеющимся наблюдениям [1] эти напряжения мигрируют в основном со скоростями порядка 10-1000 км/год и являются одним из "спусковых механизмов" землетрясений в сейсмоактивных регионах. Изучение гравитационной неустойчивости и распространения волн тектонических напряжений улучшает наше понимание повторяемости катастрофических землетрясений, скорости миграции последовательности афтершоков и подвижек по разлому.

Проблема гравитационной неустойчивости восходит своими корнями к классической задаче Рэля-Тейлора [2]. В дальнейшем она получила развитие в ряде работ [3-6], где также учитывалась упругость среды. Теория распространения быстрых тектонических волн в упругой литосфере берет свое начало с математической модели Эльзассера [7], где в качестве реологической модели астеносферы принималась вязкая жидкость. В последующих исследованиях [8-11] для астеносферы использовалась вязкоупругая максвелловская реологическая модель.

Данная работа посвящена исследованию гравитационной неустойчивости двухслойной модели мантии Земли и распространению напряжений в ней с учетом приложенных горизонтальных усилий. Реология среды описывается моделью Максвелла.

Постановка задачи

Пространство переменных x_1, x_2, x_3 разделяется на слои плоскостями: $x_3 = H_2$, $x_3 = 0$, $x_3 = -H_1$. В этих слоях рассматриваются следующие величины: $u = (u_1, u_2, u_3)$ - вектор смещения; $v = (v_1, v_2, v_3)$ - вектор скорости смещения; $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ - тензоры дивергента напряжений и деформаций соответственно; P - динамическое давление; ρ - плотность; T - время релаксации; μ - модуль сдвига; g - ускорение силы тяжести; $e = (0, 0, 1)$. Физические параметры ρ, μ, T зависят только от x_3 . Выпишем основные уравнения. Уравнения сохранения импульса, переноса плотности и неразрывности имеют вид ($i, j = 1, 2, 3$)

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho g e_i, \quad (1)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0.$$

Уравнения (1) замыкаются реологическим законом Максвелла

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T} \right) \sigma_{ij} = 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}, \quad (2)$$

при этом $\varepsilon_{ij} = 0,5(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$.

Нас интересует поведение среды при малых возмущениях параметров. Запишем уравнения (1) и (2) относительно малых возмущений скорости, давления δP и плотности $\delta \rho$. Система дифференциальных уравнений после линеаризации принимает вид [6]

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T} \right) \left(\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \delta P}{\partial x_i} \right) &= \mu \Delta v_i + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_i} \right) \frac{d\mu}{dx_3} - \\ &- \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T} \right) g \delta \rho e_i, \quad \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} = -v_3 \frac{d\rho}{dx_3}, \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Переменные в (3) легко разделяются с помощью преобразования Лапласа по t и Фурье по x_1, x_2 ; а именно, любая из искомым величин f и ее преобразование F связаны соотношениями

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{x_1, x_2} f(x_1, x_2, x_3, t) \exp(-\tau t + ik_1 x_1 + ik_2 x_2) dx_1 dx_2 dt,$$

$$f = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \int_{k_1, k_2} F(k_1, k_2, x_3, \tau) \exp(\tau t - ik_1 x_1 - ik_2 x_2) dk_1 dk_2 d\tau.$$

Применяя двойное интегральное преобразование к (3) и исключая все переменные, кроме v_3 , получаем обыкновенное дифференциальное уравнение 4-го порядка [6]:

$$D \left\{ \left[\tau(\tau+1/T)\rho - \mu(D^2 - k^2) \right] Dw - D\mu(D^2 + k^2)w \right\} =$$

$$= k^2 \left\{ - \left(1 + 1/(\tau T) \right) g D \rho w + \left[\tau(\tau+1/T)\rho - \mu(D^2 - k^2) \right] w - 2D\mu Dw \right\}. \quad (4)$$

где $D=d/dz$, $k^2 = k_1^2 + k_2^2$, $w=v_3$, $z=x_3$. Если принять, что ρ, μ, T постоянны, то уравнение (4) упрощается и принимает вид

$$(D^2 - k^2)(D^2 - k^2 - \rho\tau(\tau + 1/T)/\mu)w = 0. \quad (5)$$

Теперь выпишем граничные условия. Рассмотрим условия "склейки" на контактной границе между слоями. Эти условия получаются из непрерывности скорости, касательных и вертикальных составляющих нормальных напряжений с учетом горизонтальных остаточных тектонических напряжений и скачка плотности. Всюду далее индексы 1 и 2 будут обозначать нижний и верхний слои. Обозначим смещение границы контакта по вертикали как $\varphi(x_1, x_2, t)$, причем будем считать это смещение малым, т.е. $\varphi(x_1, x_2, t) \ll H_1, H_2$. Тогда граничные условия на искривленной поверхности контакта $z=\varphi(x_1, x_2, t)$ имеют вид [5.12]

$$w_1 = w_2, \quad Dw_1 = Dw_2,$$

$$\frac{\tau\mu_1}{\tau+1/T_1} (D^2 + k^2)w_1 = \frac{\tau\mu_2}{\tau+1/T_2} (D^2 + k^2)w_2 + k^2 \Delta N w_0,$$

$$\left[\tau\rho_2 - \frac{\mu_2}{\tau+1/T_2} (D^2 - k^2) \right] Dw_2 - \left[\tau\rho_1 - \frac{\mu_1}{\tau+1/T_1} (D^2 - k^2) \right] Dw_1 =$$

$$= - \frac{gk^2}{\tau} (\rho_2 - \rho_1)w_0 - 2k^2 \left[\frac{\mu_2}{\tau+1/T_2} - \frac{\mu_1}{\tau+1/T_1} \right] Dw_0,$$

где ΔN - остаточные тектонические напряжения, $w_0 = (w_1 + w_2)/2$.

Условия на верхней границе $z=H_2$ получаются при отсутствии внешних усилий:

$$(D^2 + k^2)w_2 = 0, \quad (7)$$

$$\left[\tau \rho_2 - \frac{\mu_2}{\tau + 1/T_2} (D^2 - k^2) \right] Dw_2 = - \frac{gk^2}{\tau} \rho_2 w_2 - 2k^2 \frac{\mu_2}{\tau + 1/T_2} Dw_2.$$

На нижней границе $z=-H_1$ потребуем выполнения условия прилипания:

$$w_1 = 0, \quad Dw_1 = 0. \quad (8)$$

Сведение задачи к поиску нулей целой функции

Уравнение (5) с граничными условиями (6)-(8) образуют задачу на отыскание собственных значений τ и собственных функций w . Так как решение первоначальной задачи представляется в виде интегралов с ядрами $\exp[\tau t + i(k_1 x + k_2 y)]$, то при $t \rightarrow \infty$ решения убывают, если $\text{Re} \tau < 0$, и возрастают, если $\text{Re} \tau > 0$. В силу этого вопрос об устойчивости сводится к анализу собственных значений τ . Если все они располагаются в левой полуплоскости комплексного переменного при любых k^2 , то система устойчива, если же хотя бы для одного k^2 существует собственное значение в правой полуплоскости, то система теряет устойчивость. Кроме того, при $\text{Im} \tau \neq 0$ в системе слоев распространяются волны со скоростями $\text{Im} \tau / k$.

Общим решением уравнения (5) является линейная комбинация

$$w_k = A_{k1} \exp(kz) + A_{k2} \exp(-kz) + A_{k3} \exp(kq_k z) + A_{k4} \exp(-kq_k z),$$

$$\text{где } q_k = \left(1 + \tau(\tau + 1/T_k) / (k^2 v_k) \right)^{1/2}, \quad v_k = \mu_k / \rho_k, \quad k=1, 2.$$

Подставляя общее решение для каждого слоя в перечисленные граничные условия, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов A_{kj} . Собственные значения τ (инкременты преобразования Лапласа) являются нулями определителя системы. Перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$\begin{aligned} a_i &= \mu_i / (\mu_1 + \mu_2), & b_i &= v_i / (v_1 + v_2), & c_i &= \rho_i / (\rho_1 + \rho_2), \\ h_i &= H_i / (H_1 + H_2), & \lambda &= \tau t_0, & T_i &= T_i / t_0, & q &= k(H_1 + H_2), \\ r &= qh_2, & s &= qh_1, & m_i &= C\lambda(\lambda + 1/T_i) / (q^2 \chi), & \delta_i &= (1 + m_i b_i)^{1/2}, \\ C &= g(H_1 + H_2)^3 / (t_0^2 (v_1 + v_2)^2), & B &= C / 4b_2^2 q^3, \\ \chi &= g(H_1 + H_2) / (v_1 + v_2), & \alpha_i &= a_i \lambda / (\lambda + 1/T_i), & N_p &= \Delta N / (\mu_1 + \mu_2), \end{aligned}$$

где t_0 - характерное время. Тогда после простых преобразований над строками и столбцами определитель системы линейных уравнений принимает вид

$$\Psi(\lambda, q) = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{vmatrix},$$

где B_{ij} даются следующими выражениями:

$$B_{11} = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} r & -\operatorname{sh} r \\ -\left(1 + \frac{m_2}{2b_2}\right) \operatorname{sh} r & \left(1 + \frac{m_2}{2b_2}\right) \operatorname{ch} r \end{vmatrix}, \quad B_{12} = \begin{vmatrix} B_{12}^1 & B_{12}^2 \\ B_{12}^3 & B_{12}^4 \end{vmatrix},$$

$$B_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad B_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

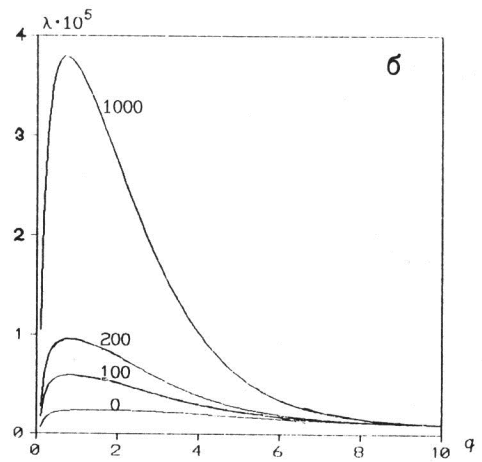
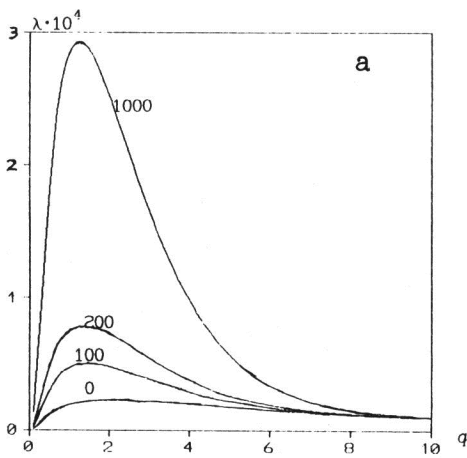
$$B_{12}^1 = \left(1 + \frac{m_2}{2b_2}\right) \operatorname{ch} r \delta_2 - \operatorname{ch} r, \quad B_{12}^2 = -\left(1 + \frac{m_2}{2b_2}\right) \frac{\operatorname{sh} r \delta_2}{\delta_2} + \operatorname{sh} r,$$

$$B_{12}^3 = \left(1 + \frac{m_2}{2b_2}\right) \operatorname{sh} r - \delta_2 \operatorname{sh} r \delta_2 + (\lambda+1/T_2)^2 B \operatorname{ch} r \delta_2,$$

$$B_{12}^4 = -\left(1 + \frac{m_2}{2b_2}\right) \operatorname{ch} r + \operatorname{ch} r \delta_2 + (\lambda+1/T_2)^2 B \frac{\operatorname{sh} r \delta_2}{\delta_2},$$

$$B_{31} = \begin{vmatrix} \alpha_2 & 0 \\ 0 & -c_2 - \frac{b_2 c_2}{m_2} + \frac{b_1 c_1}{m_1} \end{vmatrix}, \quad B_{32} = \begin{vmatrix} \frac{\alpha_2 m_2}{2b_2} & 0 \\ 0 & c_2 \end{vmatrix},$$

$$B_{33} = \begin{vmatrix} -\alpha_1 - N_p/2 & 0 \\ \frac{C(c_2 - c_1)}{2q^3} \left(\frac{(\lambda+1/T_1)^2}{m_1^2} + \frac{(\lambda+1/T_2)^2}{m_2^2} \right) & c_1 - \frac{b_2 c_2}{m_2} + \frac{b_1 c_1}{m_1} \end{vmatrix},$$



Зависимости λ от q для $T_1 = 33$ года

а - $T_2 = 3300$ лет, б - $T_2 = 33$ тыс. лет. Цифры у кривых - значения ΔN в МПа

$$B_{34} = \begin{vmatrix} \frac{\alpha_1 m_1}{2b_1} & 0 \\ 0 & -c_1 \end{vmatrix},$$

$$B_{43} = \begin{vmatrix} \text{ch } s & \text{sh } s \\ \text{sh } s & \text{ch } s \end{vmatrix},$$

$$B_{44} = \begin{vmatrix} \text{ch } s \delta_1 - \text{ch } s & \frac{\text{sh } s \delta_1}{\delta_1} - \text{sh } s \\ \delta_1 \text{sh } s \delta_1 - \text{sh } s & \text{ch } s \delta_1 - \text{ch } s \end{vmatrix},$$

$$B_{13} = B_{14} = B_{22} = B_{24} = B_{41} = B_{42} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix},$$

где B_{ij} суть матрицы второго порядка. Уравнение $\Psi(\lambda, q) = 0$ представляет собой трансцендентное уравнение относительно λ . Численно решая это уравнение при конкретных значениях входящих в него параметров, можно найти зависимости $\lambda = \lambda(q)$. При расчетах был использован алгоритм, предложенный в [6].

Неустойчивость системы "литосфера + астеносфера" при наличии инверсии плотности

Если плотность литосферы больше плотности подстилающей ее астеносферы, то в результате начального возмущения в силу гравитационной неустойчивости происходит процесс подъема относительно легкого вещества астеносферы и опускания тяжелого материала литосферы.

В данной части работы рассматривается вопрос о росте малых возмущений во времени. При расчетах были приняты следующие значения параметров: $\rho_1 = 3,36 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\rho_2 = 3,42 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\mu_1 = 6,31 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\mu_2 = 6,42 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $t_0 = 10^{10} \text{ с}$, $H_1 = H_2 = 100 \text{ км}$, $T_1 = 10^9 \text{ с}$. На рисунке представлены зависимости положительного безразмерного собственного значения (λ) от безразмерной пространственной частоты (q) при четырех значениях горизонтальных тектонических напряжений (ΔN) и двух значениях времен релаксации пород литосферы (T_2). Расчеты показали, что каждая из зависимостей $\lambda(q)$ имеет максимум при некотором значении q , которое соответствует моде максимальной неустойчивости. При увеличении горизонтальных усилий начальные возмущения растут быстрее. Так, при $\Delta N = 0$ и временах релаксации $T_1 = 33$ и $T_2 = 3300$ лет возмущение, соответствующее максимальной неустойчивой моде, с длиной волны примерно 570 км возрастает в e раз за $1,5 \cdot 10^7$ лет. Если значение горизонтальных усилий $\Delta N = 10^3 \text{ МПа}$, то длина волны возмущения равна приблизительно 1050 км, и это возмущение вырастает в e раз за $1,1 \cdot 10^6$ лет, т.е. приблизительно в 10 раз быстрее, чем при отсутствии таких усилий.

Распространение быстрых тектонических волн

В случае, когда $\rho_2 \leq \rho_1$, было установлено, что при $T_1 = T_2$ отсутствуют волны тектонических напряжений. Однако при $T_1 \ll T_2$ найдены быстро распространяющиеся затухающие тектонические волны. Эти волны являются достаточно медленными по сравнению с сейсмическими волнами, и в то же время быстрыми по сравнению с обычными тектоническими процессами, протекающими миллионы лет. Быстрые тектонические волны в данном случае обнаружены с длинами $L \leq L_0$, где L_0 зависит от толщины литосферы. (При $H_2 = 100 \text{ км}$ значение $L_0 \approx 100 \text{ км}$, при $H_2 = 50 \text{ км}$, $L_0 \approx 50 \text{ км}$.) В таблице приведены значения скоростей таких тектонических волн.

В результате численных расчетов было установлено, что в зависимости от толщины литосферы изменяется скорость распространения волн и их длина: так, с утолщением астеносферы уменьшается скорость и длина тектонической волны. Кроме того, как показали расчеты, скорость волн уменьшается при увеличении горизонтальных тектонических напряжений (см. таблицу).

Известно, что при $T_2 \rightarrow \infty$ максвелловская среда переходит в упругую, а при $T_1 \rightarrow 0$ ведет себя как вязкая жидкость (причем $\mu T \rightarrow \eta$, где η - вязкость среды). Из таблицы видно, что с уменьшением T_1 увеличи-

Скорость тектонических волн, км/год

H_2 , км	ΔN , МПа	T_1 , °C				
		10^7	10^6	10^5	10^4	10^3
100	0	0,084	0,35	4,65	56,88	683,16
100	10^2	0,046	0,27	3,81	47,85	546,92
100	10^3	0,036	0,22	2,07	35,02	407,83
50	0	0,021	0,09	1,67	11,12	124,18
50	10^2	0,010	0,07	0,86	8,91	111,60

вается скорость распространения волн; эта скорость практически не изменяется при увеличении T_2 .

В работе [1] приведены данные о многих известных в настоящее время случаях миграции землетрясений. Сопоставление этих данных с результатами численных расчетов, представленными в таблицах, наводят на мысль о том, что скорости 3–60 км/год могут соответствовать скоростям миграции больших мелкофокусных землетрясений, а скорости 400–600 км/год – скоростям крипового движения по разлому.

Заключение

В случае инверсии плотности найдены моды максимальной неустойчивости и скорости роста начальных возмущений. Установлено, что при увеличении горизонтальных тектонических напряжений начальные возмущения растут быстрее в несколько раз. Длина волны такого возмущения также увеличивается.

При отсутствии инверсии плотности найдены быстрые тектонические волны, скорость которых существенно зависит от толщины литосферы, времени релаксации астеносферы и от приложенных горизонтальных усилий.

Если данная модель применима к исследуемому сейсмическому региону, то она дает представление о скорости миграции возможных землетрясений при известных значениях толщины литосферы и вязкости астеносферы.

Автор признателен Б.М.Наймарку и Т.К.Рамазанову за обсуждение результатов работы.

Литература

1. *Kasahara K.* Migration of crustal deformation // *Tectonophysics*. 1979. N 52. P.329-341.
2. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon press, 1968. 652 p.
3. *Biot M.A., Ode H.* Theory of gravity instability with variable overburden and compaction // *Geophysics*. 1965. Vol.30, N 2. P. 213-227.
4. *Наймарк Б.М., Яновская Т.Б.* Гравитационная устойчивость вертикально-неоднородной вязкой несжимаемой жидкости // Исследование сейсмичности и моделей Земли. М.: Наука, 1976. С.149-159. (Вычисл. сейсмология; Вып.9).
5. *Исмаил-заде А.Т.* Гравитационная устойчивость вертикально-неоднородного максвелловского тела // Изв. АН Азерб.ССР. Сер. наук о Земле. 1987. N 4. С.3-9.
6. *Наймарк Б.М., Исмаил-заде А.Т.* Гравитационная устойчивость вертикально-неоднородной среды с максвелловской реологией // Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука, 1989. С.71-80. (Вычисл. сейсмология; Вып.22).
7. *Elsasser W.H.* Convection and stress propagation in the upper mantle // *Appl.Modern Phys. Earth Planet. Inter.* N.Y.: Willey, 1969. P.223-246.
8. *Райс Дж.* Механика очага землетрясения. М.: Мир, 1982. 217 с.
9. *Lehner F.K., Li V.C., Rice J.R.* Stress diffusion along rupturing plate boundaries // *J.Geophys.Res.* 1981. Vol.86, B7. P. 6155-6169.
10. *Rice J.R., Cheng G.J.* Earthquake aftereffects and triggering seismic phenomena // *PAGEOPH.* 1983. Vol.121, N 2. P.187-219.
11. *Николаевский В.Н., Рамазанов Т.К.* Теория быстрых тектонических волн//Прикл.математика и механика.1985.Т.49, вып.3. С.462-469.
12. *Рамазанов Т.К.* Влияние горизонтальных литостатических напряжений на тектонические волны // Геология и геофизика. 1986. N 3. С.98-101.