III. РЕГИСТРАЦИЯ И АНАЛИЗ СЕЙСМИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

УДК 550.34 + 519.2

Г.М.Молчан

ВОЗМОЖНОСТИ ОЦЕНИВАНИЯ ПИКОВЫХ ЧАСТОТ ПО ГЛАВНЫМ СПЕКТРАЛЬНЫМ КОМПОНЕНТАМ СИГНАЛА

G.M.Molchan

FREQUENCY ESTIMATION PERFORMANCE BY EIGENVECTOR METHODS

This paper studies the theoretical performance of the MUSIC (Multiple Signal Classification) and MN (Minimum-Norm) algorithms in estimating the frequencies $\{\omega_k\}$ of multiple sinusoids in noise. Both algorithms are based on principal components of signal correlation matrix of size m. An asymptotical analysis of frequency distribution is given under conditions, that the number of observation $N\to\infty$ and m is fixed or it increases with N. Surprisingly, the frequency accuracy of order $o(N^{-1})$ is impossible for $m \simeq N-c$.

1. Введение и основные результаты

Настоящая работа посвящена дальнейшему статистическому анализу разрешающей способности современных практических методов спектрального анализа. Как и ранее [1,2], моделью сигнала служит модель скрытых периодичностей:

$$x_n = \sum_{1\le k\le s} \alpha_k \exp(i\omega_k n) + \sigma\varepsilon_n, \qquad n=0,1,\dots,N-1 \tag{1}$$

с неизвестными параметрами $\{\alpha_k, \omega_k, \sigma\}$ и комплексным белым шумом ε_n:

$$E\varepsilon_n = 0, \quad E\varepsilon_n\varepsilon_m = 0, \quad E\varepsilon_n\bar{\varepsilon}_m = \delta_n^m. \tag{2}$$

Для анализа выбраны два весьма популярных метода, основанных на главных компонентах спектра сигнала: "полигармонический классификатор" или MUSIC-метод [3,4] и метод минимальной нормы - MN [5]. Оба метода возникли как обобщение метода гармонического разложения Писаренко (см. анализ метода в [2]) и практически вытеснили его из инженерной практики при анализе пиковых частот $\{\omega_k\}$. Такого сорта анализ постоянно возникает в различных областях естествознания. В инженерной практике к модели (1) приходят при поиске направлений распространения серии плоских волн, если их регистрировать в узкочастотном диапазоне равномерно расположенной группой станций. В этом случае N играет роль числа приемников, а ω_k пропорционально косинусу угла прихода k-й волны.

Оценивая причины успеха обоих методов следует учитывать их точность, устойчивость и алгоритмическую простоту. Считается, что MUSIC и MN-методы обладают повышенным разрешением по частоте, близким к оптимальному [4,5]. Теоретически это можно проверить при $N\to\infty$, сравнивая MUSIC и MN-методы с асимптотически оптимальными методами наименьших квадратов (LS) и периодограммным методом (PG). LS-метод устойчив, но сложен, поскольку оценивает $\{\omega_k\}$ как точку абсолютного экстремума сильно осциллирующей функции многих переменных. Напротив, PG-метод неустойчив, но удобен тем, что оценивает частоты как главные максимумы функции одного переменного. MUSIC и MN-методы сохраняют вычислительные достоинства PG-метода и делают существенный шаг в сторону LS-метода в смысле устойчивости оценивания $\{\omega_k\}$. Устойчивость достигается за счет того, что эмпирическую корреляционную матрицу сигнала размера $m>s$ предварительно "фильтруют", т.е. в ее разложении по собственным векторам оставляют лишь s главных собственных значений. В этой операции отражена основная идеология многих практических спектральных методов: изучая "короткие" реализации сигнала важен не весь спектр в целом, а его главные черты, например, положение и мощность основных пиков.

Наша цель - анализ точности MUSIC и MN-методов в оценивании частот $\{\omega_k\}$ при $N\to\infty$ в зависимости от параметра $m\in(s,n-s)$. Практически неясно как надо выбирать порядок матрицы m, чтобы достичь высокой точности оценивания $\{\omega_k\}$ и вместе с тем сохранить стабильность получаемых оценок. Поэтому важно проследить эволюцию точности методов с изменением m во всем диапазоне допустимых значений. Приведем основные результаты, полученные в этом направлении.

Для минимального m, $m=s+1$ оба метода совпадают с методом гармонического разложения Писаренко. В этом случае стандартное отклонение оценки частоты ω_k при $N\to\infty$ имеет вид:

$$\sigma(\omega_k) \simeq c(SNR_k)^{-2}N^{-1/2}\prod_{j\neq k}|\exp(i\omega_j)-\exp(i\omega_k)|^{-2}, \qquad (3)$$

где $2^{-1/2}<c<2^{s-1}$, а $SNR_k=|\alpha_k/\sigma|$ - отношение сигнал-шум на частоте ω_k.

С ростом m свойства MUSIC и MN-оценок $\{\omega_k\}$ существенно улучшаются. В частности, пропадает сильная зависимость оценок ω_k от геометрии частот $\{\omega_k\}$, которая представлена в (3) произведением П. Для умеренно больших m при $N\to\infty$

$$\sigma(\omega_k) \simeq c(SNR_k)^{-2}N^{-1/2}m^{-3/2}.$$

Эта асимптотика равномерна по m в интервале $[m_0, N^{\varepsilon}]$ с $\varepsilon<1\backslash 6$. Отсюда следует, что за счет выбора параметра m MUSIC и MN-методы позволяют достичь точности

$$\sigma(\omega_k) \simeq c(SNR_k)^{-2}N^{-\theta}, \quad \theta<3\backslash 4.$$

Однако асимптотически оптимальные методы [6,7] дают точность намного больше

$$\sigma_{opt}(\omega_k) \simeq \sqrt{6}(SNR_k)^{-1}N^{-3/2}. \tag{4}$$

Вопрос о максимальной точности рассматриваемых методов по частоте остается пока открытым. Для этого необходимо исследовать трудный случай: $m=pN$, $p<1$. На это указывают следующие результаты:

для $m = N-c$, где c - любая целочисленная константа, $c>c_0$ ($c_0=s$ для MN-метода) точность порядка $o(N^{-1})$ по частоте недостижима. Точность повышается, если $c=O(N^{\varepsilon})$.

Результаты подобного рода неожиданны, поскольку при $m\sim N$ в обоих методах основную роль начинает играть периодограмма. Как известно, она является асимптотически достаточной статистикой и ведет к предельной точности (4) при $N\to\infty$.

Полученные результаты указывают также на наличие "фазового" перехода по параметру m в распределении $\hat{\omega}_k$: при умеренных $m=o(N^{1/6})$ точность оценки $\hat{\omega}_k$ зависит от второй степени отношения сигнал-шум SNR_k, а при больших $m\sim N$ - от первой (как в оптимальном случае (4)). Это предопределяет сложность анализа промежуточного случая $m=pN$, $p<1$.

Теоретическому анализу MUSIC и MN-методов посвящены многие инженерные работы (см., например, [3,4] и ссылки в них). Однако трудности спектрального анализа выборочных корреляционных матриц растущей размерности подменяются в этих работах готовыми рецептами из теории матриц Уишарта [8] конечной размерности. Поэтому на выводы [3,4] влияют ошибки двух видов: неприменимость указанной теории для сигналов (1) и недопустимость перехода к пределу в $\sigma(\omega_k)$ при $m\to\infty$.

Обозначения. *Векторы*: H^m- комплексное линейное пространство со скалярным произведением $(x,y) = \sum x_i\bar{y}_i$ и нормой $|.|$; $L=sp(x_1,\dots,x_p)$ -

подпространство H_p, порожденное векторами $\{x_i\}$; P_L - ортопроектор на L; $P_L^{\perp} = I - P_L$.

Матрицы: $A_m = [a_{ij}]$ - матрица размера m, $A^{-1} = [a^{ij}]$, A^{-} - псевдообратная матрица Мура-Пенроуза; $\|A\|$ - норма A, $\|A\|_2 = (\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2)^{1/2}$ - евклидова норма A, I_m - единичная матрица.

Случайные величины: E - символ математического ожидания; $\xi \in \mathcal{N}^c(0, B_m)$ - комплексная ($\xi \in \mathcal{N}(0, B_m)$ - вещественная) векторная гауссовская случайная величина со средним $E\xi = 0$ и матрицей ковариации $E\xi\xi^* = B_m$, для комплексных величин $E\xi\xi' = 0$; $o_p(1)$ - бесконечно малая и $O_p(1)$ - ограниченная по вероятности случайные величины; P(A) - вероятность события A.

Ниже предполагается, что в модели (1) число гармоник известно; амплитуды α_k - комплексные, $|\alpha_k| > 0$; частоты $\{\omega_i\}$ принадлежат интервалу $(0, 2\pi]$; $\delta = \min_{i \neq j} |\omega_i - \omega_j|_*/2 > 0$, где $|\ |_*$ — расстояние на круге $[0, 2\pi]$; $\sigma > 0$.

2. MUSIC и MN-оценки частот

Рассматриваемые спектральные методы относятся к группе корреляционных. В обоих случаях размер выборочной корреляционной матрицы $\hat{B}_m$ сигнала служит параметром метода, $m \in (s, N-s)$. Различия в оценках корреляционных матриц как правило несущественны для асимптотического анализа методов при $N \to \infty$. Ниже используются оценки двух типов: оценка

$$\hat{B}_m = M^{-1} \sum_t X_t X_t^*, \tag{5}$$

где $X_t = (x_t, \ldots, x_{t+m-1})$, $0 \le t < N-m = M$

и оценка теплицева вида

$$\hat{B}_m = [\hat{b}(i-j)]_{i,j=0,\ldots,m-1}, \tag{6}$$

где $$\hat{b}(\tau) = T^{-1} \sum_{n=0}^{T-m-1} x_{n+\tau} \bar{x}_n, \quad \tau \ge 0, \ \hat{b}(-\tau) = \overline{\hat{b}(\tau)}.$$

При весьма общих условиях (см. ниже) матрицы $\hat{B}_m$ сходятся к матрице

$$B_m = [b(i-j)] = \sigma^2 I_m + \sum_{1 \le k \le s} |\alpha_k|^2 e_k e_k^* = \sigma^2 I_m + A_m, \tag{7}$$

где

$$b(\tau) = \sigma^2 \delta_0^\tau + \sum_{1 \le k \le s} |\alpha_k|^2 \exp(i\tau\omega_k), \tag{8}$$

$$e_k \equiv e_{\omega_k},$$

$$e_\omega=(1,\exp(i\omega),\dots,\exp(i\omega(m-1)))'. \tag{9}$$

Пусть $\hat V_k$, $k=1,\dots,m$ - собственные векторы $\hat B_m$, занумерованные в порядке убывания собственных значений $\hat\lambda_k$. Пусть $\hat L$ - подпространство H^m, порожденное главными собственными векторами $\hat V_1,\dots,\hat V_s$ и $\hat P_L$-оператор проектирования на $\hat L_s$. Аналогичные обозначения без "^" сохраним за аналогичными объектами, связанными с предельной матрицей B_m. Например, P_L- проектор на $L_s= sp(V_1,\dots,V_s)$. Нетрудно видеть, что

$$L_s= sp(V_1,\dots,V_s)= sp(e_1,\dots,e_s); \tag{10}$$

собственные векторы $V_i, i\le s$ имеют собственные значения $\mu_i=\lambda_i+\sigma^2$, где λ_i- собственные значения матрицы $A_m= B_m- \sigma^2 I_m$ в (7) и $\mu_i= \sigma^2$ для $i>s$.

MUSIC-оценки частот $\{\omega_k\}$ находятся как аргументы главных максимумов функции

$$f_{MU}(\omega)=|\hat P_L e_\omega|^2=(e_\omega,\hat P_L e_\omega). \tag{11}$$

Этот принцип оценивания напоминает метод наименьших квадратов, который оценивает $\{\omega_k\}$ как точку абсолютного экстремума функции $(X,P_\omega X)$, где $X\in H^N$- весь сигнал, а P_ω- проектор на подпространство s гармоник $sp(e(\omega_1),\dots,e(\omega_s))\subset H^N$, где $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_s)$ - параметр.

Если $m=s+1$, MUSIC-метод совпадает с методом гармонического разложения Писаренко. В этом случае

$$f_{MU}(\omega)= m-|(e_\omega,\hat V)|^2, \tag{11a}$$

где $\hat V=\hat V_{s+1}$- нормированный собственный вектор $\hat B_m$ с минимальным собственным значением, т.е. вектор, для которого $(V,\hat B_m V)=\min$. При $m>s+1$ векторное подпространство "шумовых" векторов $\{\hat V_i, i>s\}$ многомерно. Поэтому, сохраняя целевую функцию (11a) по форме и сам принцип оценивания частот, в MN-методе в качестве $\hat V$ используют вектор $\hat V=(I-\hat P_L)e_0\equiv \hat P_L^\perp e_0$, где

$$e_0 = (1,0,\dots,0)'\in H^m. \tag{12}$$

Таким образом, в MN-алгоритме функция $f(\omega)$ имеет вид

$$f_{MN}(\omega)= -|(e_\omega,\hat P_L^\perp e_0)|^2 = -|1-(e_\omega,\hat P_L e_0)|^2, \tag{13}$$

где константа m опущена.

При больших m, $m\sim N$, очень полезно другое представление рассмотренных выше функций $f(\omega)$. Положим

$$X(\omega)= m^{-1}((X_1,e_\omega),\dots,(X_M,e_\omega))'\in H^M. \tag{14}$$

Пусть

$$X^1=(X_1^{(1)},\dots,X_M^{(1)})' = ((X_1,e_0),\dots,(X_M,e_0))'$$

и

$$\hat{B}_M = [m^{-1}(X_i,X_j)], \quad i,j=1,\dots,M .$$

Тогда

$$f_{MU}(\omega) = m(X(\omega),\ \hat{\mathcal{P}}_L\hat{B}_M^{-1}\hat{\mathcal{P}}_L X(\omega)) \tag{15}$$

и

$$f_{MN}(\omega) = -|1-(X(\omega),\ \hat{\mathcal{P}}_L\hat{B}_M^{-1}\hat{\mathcal{P}}_L X^1)|^2, \tag{16}$$

где $\hat{\mathcal{P}}_L$ – ортогональный проектор на подпространство L, порожденное главными собственными векторами матрицы $\hat{B}_M$. Если матрица $\hat{B}_M$ вырождена, $\hat{B}_M^{-1}$ следует понимать как обобщенную обратную матрицу.

Двойственная форма записи (15),(16) квадратичных форм (11),(13) немедленно следует из теории гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром (здесь $\hat{B}_m$). Элементарное доказательство приведено в приложении А.

Анализ собственных векторов выборочной корреляционной матрицы растущей размерности $\hat{B}_m$ представляет трудную задачу статистики. Поэтому удобна та форма записи целевой функции метода, в которой размерность корреляционной матрицы m или $N-m=M$ наименьшая. Это создает симметрию между случаями m, $N-m$, допускающими анализ.

Заметим, что для малых $N-m$ целевые функции (15),(16) практически зависят только от преобразования Фурье реализации $\{x_n\}$. Пренебрегая условием $M>s$ целевая функция MUSIC-метода (15) сводится к периодограмме, если положить $M=1$. Эти обстоятельства создают иллюзию возможных оптимальных свойствах MUSIC-метода при $m\sim N$.

3. Распределение частотных оценок при $N\to\infty$ и умеренно больших m

В этом разделе находятся предельные распределения оценок $\{\hat{\omega}_k\}$, полученных MUSIC и MN-методами, в условиях гауссовости шума $\{\varepsilon_n\}$, при $m=O(N^{\varepsilon})$, $\varepsilon<1/6$ и $N\to\infty$.

Следующая лемма уточняет характер сходимости корреляционных матриц (5),(6) к матрице B_m и функции $\hat{b}(\tau)$ к $b(\tau)$ [см.(6),(8)]. Пусть

$$\varepsilon_N(\omega) = N^{-1}\sum_{0\le t<N}\varepsilon_t \exp(-it\omega).$$

Л е м м а 1. а) *В условиях гауссовской модели (1) при $N\to\infty$*

$$\sqrt{N}\,[\hat{b}(\tau)-b(\tau)] = \Delta_N(\tau) + O\left(\frac{|\tau|+\delta^{-1}}{\sqrt{N}}\right) + O_P\left(\sqrt{\frac{|\tau|}{N}}\right), \tag{17}$$

где $\Delta_N(\tau) = \sum_{1\le k\le s} exp(i\tau\omega_k) 2Re(\alpha_k exp(-i\varphi\omega_k)\hat{\varepsilon}_N(\omega_k)) +$

$$+(2\pi)^{-1}\sigma^2\int_{-\pi}^{\pi} exp(i\tau\omega)(|\hat{\varepsilon}_N(\omega)|^2-1)\sqrt{N}\,d\omega .$$

Все оценки равномерны по $|\tau|$, $\{\omega_k\}$ *и* $\delta = min|\omega_i - \omega_j|_*/2$, $i\ne j$. *Процесс* $\Delta_N(\tau)$ *сходится слабо к гауссовскому процессу вида*

$$\Delta_N(\tau) \to \Delta(\tau) = \int e^{i\tau\omega} dZ(\omega), \quad N\to\infty, \tag{18}$$

где $dZ(\omega) = \sigma \sum_{i\le k\le s} \sqrt{2}|\alpha_k|\xi_k\delta(\omega-\omega_k)d\omega + \sigma^2 dw(\omega)/\sqrt{2\pi}$,

$(\xi_1,\dots,\xi_s) \in N(0,I_s)$ *и* $w(\omega)$ *– винеровский процесс;*

б) *аналогичное утверждение верно для матриц (5),(6):*

$$\sqrt{N}(\hat{B}_m - B_m) = [\Delta_N(i-j)] + R_m^{(1)}, \tag{19}$$

$$\text{где } \|\hat{B}_m - B_m\|_2 = O_P(m\, N^{-1/2}), \quad \text{если } N\delta \ge c_0 > 0 \tag{20}$$

$$\text{и } \|R_m^{(1)}\|_2 = O_p(m^{3/2}N^{-1/2}), \quad \text{если } \sqrt{m}\,\delta \ge c_0 > 0. \tag{21}$$

Все оценки равномерны по m *и* $\{\omega_k\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. См. приложение В.

В приложениях нередко постулируют, что матрица $\hat{B}_m$ в форме (5) или ее аналоги асимптотически эквивалентны матрице Уишарта $W_N(0,B_m)$. Такие матрицы соответствуют оценкам (5) с независимыми векторами X_t и распределенными согласно $N^c(0,B_m)$. Но предельное распределение $\hat{B}_m$ имеет теплицеву структуру:

$$\sqrt{N}(\hat{B}_m - B_m) \to [\Delta(i-j)], \quad i,j=1-m,$$

а матрицы Уишарта имеют в пределе матрицу ранга 1: $[y_i\bar{y}_j]$, где $(y_i,\dots,y_m) \in N^c(0,B_m)$. Поэтому этот постулат неправомерен.

Использование аппарата теории возмущений требует введения следующего условия регулярности, связанного с выбором параметра m:

Условие А. *Матрица* $A_m = \sum|\alpha_i|^2 e_i e_i^*$, $i=1-s$ *или, что то же, матрица*

$$G_s = [(e_i,e_j)][|\alpha_i|^2\delta_i^j] = \mathcal{E}_s\Lambda_s$$

имеет различные собственные значения $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ *и*

$$\lambda_i > \varepsilon_A m, \quad |\lambda_i - \lambda_j| > \varepsilon_A m.$$

Для больших m $\lambda_i = |\alpha_i|^2 m + o(1)$ (см. ниже). Поэтому условие (А) выполнено, если $||\alpha_i|-|\alpha_j||>\varepsilon$, $i\ne j$. При анализе разрешающей способности методов часто рассматривают модель (1) с s=2 и $|\alpha_1|=|\alpha_2|$. В этом случае условие А нарушено, поскольку

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 2|\mathrm{Sin}\rho m/\mathrm{Sin}\rho|, \qquad \rho = |\omega_1 - \omega_2|/2.$$

Однако может выполняться более слабое условие регулярности, а именно:

Условие A'. $\lambda_i > \varepsilon_A m$, $|\lambda_i - \lambda_j| > \varepsilon_A$, *если дробные части* $m\rho/\pi$ *равномерно отделены от* 0 *и* 1.

Л е м м а 2. *В условиях регулярности (A) и* $N\to\infty$ *оператор проектирования* $\hat{P}_L \to P_L$ *так, что*

$$\hat{P}_L - P_L = P_L^{\perp}\Delta\hat{B}_m A_m^{-} + A_m^{-}\Delta\hat{B}_m P_L^{\perp} + R_N^{(2)}, \tag{22}$$

где

$$\Delta\hat{B}_m = \hat{B}_m - B_m, \; P_L^{\perp} = I - P_L$$

и

$$\|R_N^{(2)}\| = O(\|\Delta\hat{B}_m\|^2 m^{-1}\varepsilon_A^{-1}), \tag{23}$$

$$\|\hat{P}_L - P_L\| = O(\|\Delta\hat{B}_m\| m^{-1}\varepsilon_A^{-1}). \tag{24}$$

Все оценки равномерны по m.

Д о к а з а т е л ь с т в о. См. приложение C.

Чтобы сформулировать основной результат, введем некоторые обозначения. Пусть $x(\omega) = (x, e_\omega)$ для любого вектора $x \in H^m$. Ясно, что $x(\omega)$- тригонометрический полином и

$$(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(\omega)\overline{y(\omega)}d\omega.$$

Поэтому операции P_L отвечает операция проектирования в $L_2(-\pi, \pi)$ на подпространство полиномов $sp\{e_1(\omega), \dots, e_s(\omega)\}$.

Назовем e_k^{co} ковектором e_k, если

$$e_k^{co} \in sp(e_1, e_2, \dots, e_s) = L \quad \text{и} \quad (e_k^{co}, e_j) = \delta_k^j.$$

Очевидно

$$e_k^{co} = \sum_j g^{kj} e_j, \qquad [g^{kj}] = [(e_k, e_j)]^{-1}.$$

Наконец, положим $a^{\perp} = (I - P_L)a$ и $\dot{e}_k = \frac{d}{d\omega} e_\omega|\omega = \omega_k$.

У т в е р ж д е н и е 1. *Пусть* MUSIC *и* MN-*оценки* $\hat{\omega}_k$ *частот в гауссовской модели (1), (2) таковы, что в условиях A*

$$\sqrt{Nm}\,(\hat{\omega}_i - \omega_i) = O_p(1), \qquad N\to\infty \tag{25}$$

равномерно в некотором интервале $m \in (m_0, N^{\delta})$. *Тогда имеет место сходимость по распределению:*

$$(SNR_i)^2\sqrt{N}\,(\hat{\omega}_i - \omega_i) \to Re\int_{-\pi}^{\pi} u_i(\omega)\overline{e_i^{co}(\omega)}dw(\omega)/\sqrt{2\pi}, \tag{26}$$

где $w(\omega)$ *- винеровский процесс и*

$$u_i(\omega) = \begin{cases} \dot e_i^{\perp}(\omega)/\|\dot e_i^{\perp}\|^2, & \textit{MUSIC-метод}, \\ e_0^{\perp}(\omega)/(e_0^{\perp},\dot e_i), & \textit{MN-метод}. \end{cases} \tag{27}$$

Знак Re в (26) для MUSIC-оценок можно опустить. Сходимость (26) равномерна по m в среднем, т.е. корреляции левых частей (26) равномерно по m сходятся к соответствующим корреляциям справа, если $\varepsilon<1/6$. В условиях (A')последнее верно при $\varepsilon<1/8$.

Для фиксированных m условие (25) может быть опущено.

З а м е ч а н и е. Соотношение (26) определяет всю структуру предельного распределения оценок $\{\hat\omega_i\}$, т.е. их гауссовость и ковариационную матрицу. При растущих m сходимость $\hat\omega_i\to\omega_i$, которую определяет (26), намного сильнее априорной посылки (25) (см.предложение 3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(\omega)$ - целевая функция метода [см.(11),(13)] и $\hat\omega_k$ - частотные оценки. Учитывая (25), имеем

$$0 = f'(\hat\omega_i)= f'(\omega_i)+f''(\omega_i)(\hat\omega_i-\omega_i)+f'''(\tilde\omega_i)(\hat\omega_i-\omega_i)^2/2, \tag{28}$$

где $\tilde\omega_i=\hat\omega_i p+q\omega_i$, $p+q=1$. Здесь и ниже $f', f'', f''', f^{(k)}, \dot e, \ddot e$ - производные f и e.

Для MUSIC-метода $f(\omega)=(e_\omega,\hat P_L e_\omega)$. Поэтому, полагая $\Delta\hat P=\hat P_L-P_L$ имеем

$$f'_{MU}(\omega_i)=(\dot e_i,\hat P_L e_i)+(e_i,\hat P_L\dot e_i)=(\dot e_i,\Delta\hat P_L e_i)+(e_i,\Delta\hat P_L\dot e_i)=2\mathrm{Re}(\dot e_i,\Delta\hat P_L e_i). \tag{29}$$

Здесь использованы два факта: $P_L e_i=e_i$ и $P_L=P_L^*$. Поэтому

$$(\dot e_i,P_L e_i)+(e_i,P_L\dot e_i)= \frac{d}{d\omega}|e_\omega|^2|_{\omega=\omega_i}= 0.$$

Вторая производная

$$1/2f''_{MU}(\omega_i)=(\ddot e_i,P_L e_i)+(\dot e_i,P_L\dot e_i)+(\ddot e_i,\Delta\hat P_L e_i)+(\dot e_i,\Delta\hat P_L\dot e_i).$$

Но $(\ddot e_i,P_L e_i)=(\ddot e_i,e_i)= -|\dot e_i|^2$, $(\dot e_i,P_L\dot e_i)=|P_L\dot e_i|^2$.

Поэтому

$$-1/2f''_{MU}(\omega_i)=|\dot e_i^{\perp}|^2 + O(\|\Delta\hat P_L\|m^3), \tag{30}$$

поскольку

$$|(\ddot e_i,\Delta\hat P_L e_i)| \le \|\Delta\hat P_L\|\cdot|\ddot e_i|\cdot|e_i|$$

и

$$|e_i^{(k)}|^2 = (2k+1)^{-1}m^{2k+1}(1+O(m^{-1})). \tag{31}$$

Из (31) следует, что

$$f'''_{MU}(\omega)= \sum_k C_3^k(e_\omega^{(k)},\hat P_L e_\omega^{(3-k)})= O(m^4). \tag{32}$$

Используя (29),(30),(32), получаем из (28)

$$\sqrt{N}(\hat{\omega}_i - \omega_i) = \mathrm{Re}\,\frac{(\dot{e}_i, \sqrt{N}\,\Delta\hat{P}_L e_i) + O(N^{1/2} m^4 |\hat{\omega}_i - \omega_i|^2)}{|\dot{e}_i^{\perp}|^2 + O(\|\Delta\hat{P}_L\|\, m^3)}\,. \tag{33}$$

Согласно (24), (20) $\|\Delta\hat{P}_L\| = O_p(N^{-1/2})$, а в силу условия (25)

$$N^{1/2} m^4 |\hat{\omega}_i - \omega_i|^2 = O_p(N^{-1/2} m^3).$$

Следовательно, если $m = o(N^{-1/6})$, то

$$\sqrt{N}(\hat{\omega}_i - \omega_i) = \mathrm{Re}(\dot{e}_i, \sqrt{N}\,\Delta\hat{P}_L e_i)/|\dot{e}_i^{\perp}|^2 + o_p(1). \tag{34}$$

Подставим сюда (22) и учтем, что $P_L^{\perp} e_i = 0$. Тогда второе слагаемое в (22) пропадает и мы получим

$$\sqrt{N}(\hat{\omega}_i - \omega_i) = |\dot{e}_i^{\perp}|^{-2}\mathrm{Re}(\dot{e}_i^{\perp}, \sqrt{N}\Delta\hat{B}_m A_m^- e_i) + r_N + o_p(1), \tag{35}$$

$$|r_N| = |(\dot{e}_i, R_N^{(2)} e_i)| \le |\dot{e}_i| \cdot |e_i| \cdot \|R_T^{(2)}\|.$$

Соединяя (23), (31), (20) получаем оценку

$$|r_N| = O(m^2 N^{1/2} \|\Delta\hat{B}_m\|^2) = O_p(m^3 N^{-1/2}) = o_p(1).$$

Вместо $\Delta\hat{B}_m$ подставим оценку (19) в (35) и заметим, что $A_m^- e_i = e_i^{co} |\alpha_i|^{-2}$. В итоге получим

$$|\alpha_i|^2 N^{1/2}(\hat{\omega}_i - \omega_i) = \|\dot{e}_i^{\perp}\|^{-2}\mathrm{Re}(\dot{e}_i^{\perp}, \Delta_{N,m} e_i^{co}) + \mathrm{Re}\, r_N^1 + o_p(1), \tag{36}$$

где $\Delta_{N,m} = [\Delta_N(i-j)]_m$

и $\quad r_N^1 = (\dot{e}_i^{\perp}, R_m^{(1)} e_i^{co})\, |\dot{e}_i^{\perp}|^{-2} = O_p(m^{3/2} N^{-1/2})\, |e_i^{co}| \cdot |\dot{e}_i^{\perp}|^{-1}$

[см. (21)]. При больших m $|\dot{e}_i^{\perp}| = O(m^{3/2})$ (см. разд. 4.2) и $|e_i^{co}| = O(m^{-1/2})$ (см. приложение E). Поэтому $r_N^1 = O_p((Nm)^{-1/2})$. Окончательно, используя (17), имеем

$$(e_i^{\perp}, \Delta_{N,m} e_i^{co}) = \int_{-\pi}^{\pi} \dot{e}_i^{\perp}(\omega)\overline{e_i^{co}(\omega)}\, dZ_N(\omega),$$

где величина $\dot{e}_i^{\perp}(\omega)\overline{e_i^{co}(\omega)}$ вещественная (см. приложение D). Сингулярная часть меры $dZ_N(\omega)$ сосредоточена на множестве $\{\omega_i\}$, где $\dot{e}_i^{\perp}(\omega_k) = (\dot{e}_i, e_k^{\perp}) = 0$, поскольку $e_k^{\perp} \equiv 0$; поэтому можно ее опустить. Непрерывная часть меры dZ_N сходится по распределению к мере Винера: $\sigma^2 dw(\omega)(2\pi)^{-1/2}$ [см. (18)]. Этим заканчивается рассмотрение MUSIC-метода.

Совершенно аналогично для MN-метода вместо (33) получаем

$$\sqrt{N}(\hat{\omega}_i-\omega_i) = \frac{\mathrm{Re}(\dot{e}_i^{\perp},e_0)(e_0,\Delta\hat{P}_L e_i)+O(\|\Delta\hat{P}_L\|^2m^2)+O(m^4|\hat{\omega}_i-\omega_i|^2)}{|(\dot{e}_i^{\perp},e_0)|^2+O(\|\Delta\hat{P}_L\|m^3)},$$

откуда

$$\sqrt{N}(\hat{\omega}_i-\omega_i) = \mathrm{Re}\frac{(\dot{e}_i^{\perp},e_0)(e_0,\Delta\hat{P}_L e_i)+o_p(1)}{|(\dot{e}_i^{\perp},e_0)|^2+o_p(1)},$$

если $m=o(N^{-1/6})$. Все дальнейшие аргументы повторяются и ведут к утверждению 1.

4. Анализ предельных распределений частотных оценок

Предельное распределение оценок частот (26) достаточно сложно зависит от параметров задачи: $\alpha_k, \omega_k, m, \sigma$. Поэтому необходим дополнительный анализ, позволяющий судить о точности MUSIC и MN-методов.

4.1. Случай малых m. Рассмотрим наименьшее значение m, $m=s+1$. Как отмечалось выше, в этом случае оба метода совпадают с методом гармонического разложения Писаренко (PHD). Последний был исследован в работе [2] без всяких априорных оценок (25) и предположений типа (A). Приведем результат:

Утверждение 2. *В гауссовской модели (1) PHD-оценки параметров $\{\omega_k\}$ и $\sigma\sqrt{N}$ - состоятельны и имеют следующие пределы по вероятности:*

$$(SNR_k)^2\sqrt{N}(\hat{\omega}_k-\omega_k) \to \eta_k \prod_{j\neq k} \left|e^{i\omega_k}-e^{i\omega_j}\right|^{-2}, \tag{37}$$

$$\sqrt{N}(\hat{\sigma}^2/\sigma^2-1) \to \eta_0,$$

где $(\eta_0,\ldots,\eta_s)$ - гауссовские случайные величины с нулевыми средними и дисперсиями $\sigma^2(\eta_k)$, отграниченными от 0 и ∞:

$$2^{-1/2}<\sigma(\eta_k)<2^{2s-1}, \quad k>0; \quad 1<\sigma(\eta_0)<2^s. \tag{38}$$

Таким образом, при малых m асимптотическая точность MUSIC и MN-методов по частоте ω_k очень слабо зависит от отношения сигнал-шум на других частотах, пропорциональна $(SNR_k)^{-2}$ вместо $(SNR_k)^{-1}$, как это свойственно оптимальным методам, и очень чувствительна к положению других частот.

4.2. Случай умеренно больших m.

Утверждение 3. *В условиях утверждения 1, $m\to\infty$ и $m=o(N^{1/6})$ MUSIC и MN-оценки частот имеют следующие асимптотики по распределению*

$$(SNR_k)^2\sqrt{N}(\hat{\omega}_k-\omega_k) = m^{-3/2}(\eta_k+o_p(1)), \tag{39}$$

где $\{\eta_k\}$ - гауссовские случайные величины с нулевыми средними и *дисперсиями, отграниченными от 0 и ∞ равномерно по m из интервала $(m_0(\delta), N^{\varepsilon})$, $\varepsilon<1/6$:*

$$0{,}04<\sigma_{MU}(\eta_k)<4, \qquad \sigma_{MN}(\eta_k)>0{,}24\ , \tag{40}$$

где m_0 зависит от $\delta=\min\limits_{i\neq j}|\omega_i-\omega_j|/2$.

З а м е ч а н и е. Итак, если $|\alpha_i|\neq|\alpha_j|$, то MUSIC и MN-методы за счет выбора параметра $m\gg1$ могут достигать точности по частоте порядка $N^{-\theta}$, $\theta<3/4$. Утверждение 1 доказано в условиях априорной оценки $(Nm)^{1/2}(\hat{\omega}_k-\omega_k)=O_p(1)$. Из нее, как показывает утверждение 3, вытекает оценка более сильная: та же величина имеет порядок $O_p(m^{-1})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Изложим идейную сторону вывода (39). Подробное доказательство приведено в приложении E.

Согласно (26) и приложению D

$$(SNR_k)^2N^{1/2}\sigma(\hat{\omega}_k) \simeq \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\mathrm{Re}\ \tilde{u}_k(\omega)|^2|e_k^{co}(\omega)|^2d\omega\Big)^{1/2}= Z, \tag{41}$$

где

$$\tilde{u}_k(\omega)= u_k(\omega)\exp(i(\omega-\omega_k)(m-1)/2).$$

Функция

$$e_k^{co}(\omega)= \sum_j g^{kj}(e_j,e_\omega) \simeq m^{-1}(e_k,e_\omega),$$

поскольку

$$[g^{kj}]=[(e_k,e_j)]^{-1}\simeq m^{-1}I_s, \quad m\gg1.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\,m|e_k^{co}(\omega)|^2 \simeq \frac{1}{2\pi m}\left|\frac{\mathrm{Sin}\ m(\omega_k-\omega)/2}{\mathrm{Sin}(\omega_k-\omega)/2}\right|^2 \tag{42}$$

близка к $\delta(\omega-\omega_k)$ функции Дирака. Более точно она сконцентрирована в основном в интервале $|\omega-\omega_k|<dm^{-1}$. Следовательно, mZ^2 асимптотически эквивалентно среднему значению функции $|\mathrm{Re}(\tilde{u}_k(\omega))|^2$ в этом интервале.

Но в окрестности точки ω_k $\tilde{u}_k(\omega)\simeq(\omega-\omega_k)$. Действительно, $u_k(\omega)=c(x^{\perp},e_\omega)$, где $x=\dot{e}_k$ либо $x=e_0$ для MUSIC и MN-методов соответственно. Поэтому $u_k(\omega_k)=0$ из-за ортогональности вектора $x^{\perp}$ к $e_k\in L$. Значит и $\tilde{u}_k(\omega_k)=0$. Наконец,

$$\dot{\tilde{u}}_k(\omega_k)=\dot{u}_k(\omega_k)=c(x^{\perp},\dot{e}_k)=1,$$

поскольку $c^{-1}=(\dot{e}_k^{\perp},\dot{e}_k)$ для MUSIC-метода и $c^{-1}=(e_0^{\perp},\dot{e}_k)$ для MN-метода. В результате

$$Z^2 \simeq \frac{1}{2d}\int_{-d/m}^{d/m}\omega^2d\omega = O(m^{-3}),$$

что и требовалось доказать.

5. Случай негауссовского шума

Кратко опишем, как изменятся предыдущие результаты, если отказаться от условия гауссовости шума $\{\varepsilon_n\}$. Пусть $\{\varepsilon_n\}$ - строго стационарная последовательность с корреляционной структурой (2), у которой существуют кумулянты (моменты) до порядка $M\geq 4$. Напомним, что кумулянт 4-го порядка:

$$\mathrm{cum}\ \varepsilon_0\varepsilon_k\overline{\varepsilon}_{l_1}\overline{\varepsilon}_{l_2} = E\varepsilon_0\varepsilon_k\overline{\varepsilon}_{l_1}\overline{\varepsilon}_{l_2} - 2 = \varkappa_4(k;l_1,l_2).$$

Если $\varkappa_4$ убывает достаточно быстро с $|k|+|l_1|+|l_2|\to\infty$, тогда

$$\varkappa_4(k;l_1,l_2)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\omega_2 k-\omega_3 l_1-\omega_4 l_2)}f(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)\delta(\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4)d^4\omega, \quad (43)$$

где f - непрерывная функция (кумулянтный спектр).

Для обобщения результатов предыдущих разделов необходимо потребовать, чтобы к векторным последовательностям

$$Y_n= \{\varepsilon_n\overline{\varepsilon}_n-1,\varepsilon_{n+1}\overline{\varepsilon}_n,\ldots,\varepsilon_{n+m-1}\overline{\varepsilon}_n\}$$

была применима центральная предельная теорема. Для этого достаточно, чтобы

1) "прошлое" $\mathfrak{F}_0=\{\varepsilon_n,n<0\}$ и "будущее" $\mathfrak{F}^\tau=\{\varepsilon_n,n>\tau\}$ были слабо зависимы при $\tau\to\infty$. Например, для любых событий $A\in\mathfrak{F}_0$ и $B\in\mathfrak{F}^\tau$

$$|P(AB)-P(A)P(B)| < c\tau^{-2-\varepsilon}$$

и число конечных кумулянтов $M>8$ (см.[9]);

2) матрицы $\sum\limits_{|n|<\infty} EY_0Y_n^* \succ 0$ неотрицательно определены равномерно по m. В спектральных терминах это значит, что интегральный оператор в $L^2(-\pi,\pi)$

$$I + F \succ \varepsilon I, \quad (44)$$

где I - единичный оператор, а F имеет ядро

$$F(\omega,\omega')=(2\pi)^2 f(\omega,\omega';\omega,\omega').$$

В условиях (44) лемма I и утверждение I останутся в силе с одной лишь разницей, что несингулярная часть $dZ_a(\omega)=\sigma^2 d\omega/(2\pi)^{1/2}$ гауссовской случайной меры dZ, которая используется в (26), становится неортогональной

$$EdZ_a(\omega)\overline{dZ_a(\omega')} = (2\pi)^{-1}\sigma^4[\delta(\omega-\omega')+ F(\omega,\omega')]d\omega d\omega$$

(см. приложение В).

Разберем подробнее случай негауссовского белого шума, т.е. случай независимых случайных величин $\{\varepsilon_n\}$ с конечным четвертым моментом $m_4= E|\varepsilon_n|^4$. В этом случае последовательность Y_n образует стационарную m-зависимую последовательность. Поэтому для нее справедлива центральная предельная теорема [9], если

$$\sum_{|n|<\infty} EY_0Y_n^* = [\delta_i^j+(m_4-2)\delta_0^i\delta_0^j] \succ \varepsilon I$$

т.е. когда $m_4-1>0$. Но $m_4\geq(m_2)^2=1$ и равенство возможно, если только $|\varepsilon_n|=1$.

Для негауссовского белого шума $F(\omega,\omega')=(2\pi)^{-1}(m_4-2)$. Поэтому условие (44) выполнено, если $m_4>1$ или $|\varepsilon_n|\neq1$. В силу того, что $F=\mathrm{const}$, несингулярная часть меры dZ представима в виде

$$dZ_a(\omega) = \sigma^2\left(\frac{dw(\omega)}{\sqrt{2\pi}} + \xi c\frac{d\omega}{2\pi}\right), \tag{45}$$

где $w(\omega)$ - винеровский процесс, а $\xi\in\mathcal{N}(0,1)$. (Легко проверить, что при $m_4>2$ можно считать ξ независящей от $w(\omega)$, а $c=\sqrt{m_4-2}$; при $m_4<2$ надо использовать $c=(3-m_4)^{1/2}-1$ и $\xi = \int_{-\pi}^{\pi}dw(\omega)/2\pi$.)

При подстановке (45) в (26) появится новое слагаемое вида

$$c\xi \ \mathrm{Re}\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u_k(\omega)\overline{e_k^{co}(\omega)}d\omega = c\xi\ \mathrm{Re}(u_k^{\perp},e_k^{co}) \equiv 0,$$

где $u_k=c_k\dot{e}_k$(MUSIC-метод) и $u_k=\tilde{c}_ke_o$(MN-метод). Следовательно, имеет место

Утверждение 4. *Утверждения 1,3 справедливы для негауссовского белого шума с конечным четвертым моментом и $|\varepsilon_n|\neq1$.*

6. Случай больших m : негативные результаты

Ниже рассматриваются статистические свойства MUSIC и MN-методов при больших значениях параметра m, $m\sim N\to\infty$. В этом случае удобно использовать оценку корреляционной матрицы сигнала в форме (5) и целевые функции методов в двойственном представлении (15),(16). Тогда анализ оценок частот $\hat{\omega}_k$ в основном повторяет разд. 3, относящийся к малым и умеренно большим значениям m. Однако здесь мы приходим к результатам негативного характера.

Опишем главные моменты анализа $\hat{\omega}_k$ при $m\sim N$.

6.1. Аналоги лемм 1,2. Пусть $N-m=M$, $X_\tau=(x_\tau,\ldots,x_{\tau+m-1})$, $\tau=1,\ldots,M$. Тогда

$$\hat{B}_M=[m^{-1}(X_\tau,X_{\tau'})]=B_M+ O_p(m^{-1/2})+O(\delta^{-1}m^{-1}),$$

где

$$B_M=\sigma^2I_M + \sum_{1\leq k\leq s}|\alpha_k|^2\tilde{e}_k\tilde{e}_k^*,$$

$$\tilde{e}_k=(1,\exp(i\omega_k),\ldots,\exp(i(M-1)\omega_k)'\in H^M.$$

Отсюда

$$\|\hat{B}_M - B_M\|_2 = O_p(M\,m^{-1/2}), \qquad \delta>\delta_0>0 \tag{46}$$

и

$$\|\hat{\mathcal{P}}_L - \mathcal{P}_L\| = O_p(\|\hat{B}_M - B_M\| \max_{i\neq j} |\lambda_i - \lambda_j|^{-1}), \tag{47}$$

где $\hat{\mathcal{P}}_L(\mathcal{P}_L)$ - проекция на подпространство s главных собственных векторов матрицы $\hat{B}_M(B_M)$ с собственными значениями $\hat{\lambda}_i(\lambda_i)$, $i=1,\dots,s$.

Для $M > s$

$$\|\hat{B}_M^{-1} - B_M^{-1}\| \le \|\hat{B}_M^{-1}\|\,\|\hat{B}_M - B_M\|\,\|B_M^{-1}\| = O_p(M\,m^{-1/2}), \tag{48}$$

поскольку

$$\|\hat{B}_M^{-1}\| \to \|B_M^{-1}\| = \sigma^2, \qquad N\to\infty \tag{49}$$

и

$$\|\hat{B}_M^{-1}\hat{\mathcal{P}}_L - B_M^{-1}\mathcal{P}_L\| \le \|\Delta\hat{B}_M^{-1}\| + \sigma^{-2}\|\Delta\hat{\mathcal{P}}_L\| = O_p(Mm^{-1/2}), \tag{50}$$

если $|\lambda_i - \lambda_j| > \varepsilon$.

6.2. Целевые функции $f(\omega)$ в точках ω_k. Целевые функции методов $f(\omega)$ основаны на матрице $\hat{B}_M$, проекции $\hat{\mathcal{P}}_L$ и Фурье-преобразованиях реализаций X_τ:

$$X(\omega) = m^{-1}((X_1,\tilde{e}_\omega),\dots,(X_M,\tilde{e}_\omega))'.$$

Следующие асимптотики $X^{(k)}(\omega) = (\frac{d}{d\omega})^k X(\omega)$ позволяют анализировать $f(\omega)$ вблизи экстремальных точек $\hat{\omega}_k$:

$$(\sqrt{-1})^j X^{(j)}(\omega_k) = \alpha_k \frac{m^j}{j+1}\tilde{e}_k + \sigma\xi_j(\omega_k)\frac{m^{j-1/2}}{\sqrt{2j+1}} + m^{j-1}r_k, \tag{51}$$

где

$$\xi_j(\omega) = \{\xi_j^0(\omega),\dots,\xi^{M-1}(\omega)\}' \in \mathcal{N}^c(0, I_M),$$

$$\xi_j^\tau(\omega) = c_p \sum_{n=1}^{m} n^j \exp(-in\omega)\,\varepsilon(n+\tau),$$

$$E\overline{\xi_j^\tau(\omega)}\,\xi_j^{\tau'}(\omega') = 0, \text{ если } \tau\neq\tau'.$$

$$r_k = (r_k^0,\dots,r_k^{M-1})', \qquad r_k^\tau = O_p(1).$$

Если $|\omega-\omega_k| < d < \delta$, тогда

$$X^{(j)}(\omega) = (\sqrt{-1})^j \alpha_k \tilde{e}_k m^{-1}\Phi_m^{(j)}(\omega_k - \omega) + O_p(m^{j-1}d^{-1}) + O_p(m^{j-1/2}), \tag{52}$$

где

$$\Phi_m(\omega) = (\exp(i\omega m)-1)/(\exp(i\omega)-1).$$

Рассмотрим целевую функцию для MUSIC-метода. Положим $(a,b)\hat{_-} = (a,\hat{B}_M^{-1}\hat{\mathcal{P}}_L b)$ и $(a,b)_- = (a,B_M^{-1}\mathcal{P}_L b)$. Используя (51) и оценку $(a,b)\hat{_-} = O_p(|a||b|)$ (см.(49)) имеем

$$1/2 f'(\omega_k) = \mathrm{Re}(X'(\omega_k), \quad X(\omega_k))\hat{}_- = \sigma m^{1/2}\mathrm{Re}(i\alpha_k\tilde{e}_k, \eta_k)\hat{}_- + O_p(M).$$
где
$$\eta_k = \xi_1(\omega_k)3^{-1/2} - \xi_0(\omega_k)2^{-1} \in \mathcal{N}^c(0, \frac{1}{12} I_M). \tag{53}$$
В силу (50) имеем
$$1/2 f'(\omega_k) = \sigma\sqrt{m}(\mathrm{Re}(i\alpha_k\tilde{e}_k, \eta_k)_- + O_p(M^{3/2}m^{-1/2})),$$
поскольку
$$E|(\tilde{e}_k, \Delta\hat{B}_M^{-1}\eta_k)|^2 = c(\tilde{e}_k, (\Delta\hat{B}_M^{-1})^2\tilde{e}_k) < c|\tilde{e}_k|^2\|\Delta\hat{B}_M^{-1}\| = O_p(M^3m^{-1}),$$
где $\Delta\hat{B}^{-1} = \hat{B}^{-1} - B^{-1}$.

Принимая во внимание, что
$$(i\alpha_k\tilde{e}_k, \eta_k)_- \in \mathcal{N}^c(0, \frac{1}{12}|\alpha_k|^2(\tilde{e}_k, B_M^{-2}\tilde{e}_k)),$$
имеем
$$1/2 f'(\omega_k) = \sigma(m/24)^{1/2}|\alpha_k|[(\tilde{e}_k, B_M^{-2}\tilde{e}_k)^{1/2}\zeta + O_p(M^{3/2}m^{-1/2})], \tag{54}$$
где $\zeta \in \mathcal{N}(0,1)$.

Аналогично
$$1/2 f''(\omega) = \mathrm{Re}\ (X''(\omega), X(\omega)) + (X'(\omega), X'(\omega)) = |_{\omega=\omega_k}$$
$$= -1/12\ m^2|\alpha_k|^2(\tilde{e}_k, \tilde{e}_k)\hat{}_- + O_p(m^{3/2}M) =$$
$$= -1/12\ m^2|\alpha_k|^2[(\tilde{e}_k B_M^{-1}\tilde{e}_k) + O_p(M^2m^{-1/2})]. \tag{55}$$

Наконец $f'''(\omega) = 2\mathrm{Re}(X'''(\omega), X(\omega))\hat{}_- + 6\mathrm{Re}(X''(\omega), X'(\omega))\hat{}_-$. Используя (52), получаем оценку
$$f'''(\omega) = O(m^{5/2}M), \qquad |\omega - \omega_k| < d < \delta. \tag{56}$$

6.3. Результаты

П р е д л о ж е н и е 5. *Пусть* $\hat{\omega}_k$ *– MUSIC-оценки частот при* $M = N - m = O(N^\theta)$, $\theta < 1/4$. *Тогда соотношение*
$$\hat{\omega}_k - \omega_k = o_p(N^{-(1+\frac{3}{4}\theta)}) \tag{57}$$
невозможно в любой окрестности параметрической точки $\{\alpha_i, \omega_i\}$. *Если* $\theta = 0$, *соотношение (57) невозможно для* $M > M_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим (54)-(56) в (28). Имеем
$$\hat{\omega}_k - \omega_k = \sigma|\alpha_k|(\frac{m}{24M})^{1/2}[M^{1/2}(\tilde{e}_k, B_M^{-2}\tilde{e}_k)^{1/2}\zeta + O_p(M^2m^{-1/2}) +$$
$$+ O(m^2M^{3/2}\ |\hat{\omega}_k - \omega_k|^2)][\frac{1}{12}m^2|\alpha_k|^2((\tilde{e}_k, B_M^{-1}\tilde{e}_k) + O_p(M^2m^{-1/2}))]^{-1}.$$

Если $M = o(N^{1/4})$, тогда в силу (57) будем иметь

$$m^2M^{3/2}|\hat{\omega}_k - \omega_k|^2 = o_p(1).$$

Обозначим через $\sigma_{CR} = \sqrt{6}m^{-3/2}\sigma/|\alpha_k|$ - Крамера-Рао границу точности оценивания ω_k при $m\sim N\to\infty$. Тогда

$$\hat{\omega}_i - \omega_i = \sigma_{CR}M^{-1/2}[k_M\xi + o_p(1)], \tag{58}$$

где

$$k_M = \sqrt{M}(\tilde{e}_k, B_M^{-2}\tilde{e}_k)^{1/2}/(\tilde{e}_k, B_M^{-1}\tilde{e}_k).$$

Чтобы оценить k_M воспользуемся неравенством Шварца:

$$(\tilde{e}_k, B_M^{-1}\tilde{e}_k) \le (\tilde{e}_k, B_M^{-2}\tilde{e}_k)^{1/2}(B_M\tilde{e}_k, B_M^{-2}B_M\tilde{e}_k)^{1/2} = (\tilde{e}_k, B_M^{-2}\tilde{e}_k)^{1/2}M^{1/2}.$$

Отсюда следует, что $k_M \ge 1$ и $k_M = 1$, если только $B_M\tilde{e}_k = \lambda\tilde{e}_k$. Но последнее соотношение выполняется асимптотически при $M\to\infty$. Значит $k_M \to 1$, когда $M\to\infty$. Следовательно, существует такое M_0, что $k_M < M^{1/2}$ для $M > M_0$. Но в таком случае MUSIC-оценка ω_k является суперэффективной оценкой, поскольку [см.(58)] σ_{CR} есть предельная граница точности $\hat{\omega}_k$ в задаче (1) для регулярных оценок [7]. Пришли к противоречию.

З а м е ч а н и е. В случае двух гармоник величина k_M вычисляется явно:

$$k_M^2 = 1 + \gamma^2(M^2 - \gamma^2)(M^2 - \gamma^2 + M\cdot SNR_k^{-2})^{-2},$$

где

$$\gamma = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = \sin M\rho/\sin\rho, \qquad \rho = |\omega_1 - \omega_2|/2.$$

Поэтому условие $k_M^2 < M$ выполнено, если

$$M > 1 + 1/|\sin\rho| = M_0.$$

У т в е р ж д е н и е 6.*а) При любых $m=N$-const MN-оценки частот не могут удовлетворять условию*

$$\hat{\omega}_k - \omega_k = o_p(N^{-1}). \tag{59}$$

б) Если $N-m=M=O(N^{\varepsilon})$, $\varepsilon<1/5$, тогда из условия

$$\hat{\omega}_k - \omega_k = o_p(M^{-1/4}N^{-1}) \tag{60}$$

следует сходимость по распределению

$$\sqrt{M}N(\hat{\omega}_k - \omega_k) \to (SNR_k)^{-1}\sqrt{2}\zeta_k, \tag{61}$$

где $\zeta_k \in N(0,1)$.

З а м е ч а н и е. Проверка условия (60) затруднительна. Тем не менее вторая часть утверждения 6 полезна тем, что она указывает на вероятное повышение точности MN-метода при умеренном росте N-m. Сравнение предельных законов (61) с (37) указывает на существование "фазового" перехода по параметру m: при умеренно больших

$m=O(N^{\delta})$ отношение сигнал-шум SNR_k входит в асимптотику точности $\hat{\omega}_k$ в степени -2, а при умеренно больших $N-m = O(N^{\delta})$ – в степени -1. С этим связана трудность исследования промежуточного случая $m/N \to p\in(0,1)$.

Доказательство. Используя оценки подразд. 6.2, имеем

$$f'(\omega_k) = m[\mathrm{Im}(\alpha_k\sigma(\tilde{e}_k,\mathscr{E}^1)_- + (\alpha_k\tilde{e}_k, \sum_{p\neq k}\alpha_p\tilde{e}_p)_-) + O_p(M^2m^{-1/2})],$$

где $\mathscr{E}^1=(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_{M-1})'$.

Далее

$$f''(\omega_k) = -1/2\ m^2c_m, \quad c_m = 1+o_p(1), \quad M\to\infty$$

и

$$f'''(\omega)=O_p(m^3), \quad |\omega-\omega_k|<d<\rho.$$

Но $\mathrm{Im}\ \alpha_k(\tilde{e}_k,\mathscr{E}^1)_- = |\alpha_k|2^{-1/2}(\tilde{e}_k,B_M^{-2}\tilde{e}_k)^{1/2}\zeta, \quad \zeta\in\mathcal{N}(0,1)$

и $(\tilde{e}_k,B_M^{-2}\tilde{e}_k)^{1/2} = M^{-1/2}|\alpha_k|^{-2}(1+o(1)), \quad M\to\infty,$

$(\tilde{e}_k,B_M^{-1}\tilde{e}_p) = O(M^{-1}), \quad k\neq p.$

Опять, используя (28) и оценки $f^{(k)}(\omega)$, находим, что в условиях (59) $N(\hat{\omega}_k - \omega_k)$ не стремится к 0, если $N-m=\mathrm{const}$. Аналогично (61) выводится из априорной оценки (60).

ПРИЛОЖЕНИЕ

А. Двойственная запись целевых функций

Пусть V_λ – собственный вектор матрицы $\hat{B}_m = M^{-1}\sum_{t=1}^{M}X_tX_t^*$ с собственным значением $\lambda, X\in H^m$. Тогда

$$V_\lambda = \sum_{\tau=1}^{M}v_\tau X_\tau ,$$

и $v_\lambda=(v_1,\ldots,v_M)'$ есть собственный вектор $\hat{B}_M = m^{-1}[(X_i,X_j)]$ с собственным значением $\tilde{\lambda}=\lambda M/m$. Если $|v_\lambda|=1$, тогда

$$|V_\lambda|^2 = (v_\lambda, m\hat{B}_Mv_\lambda) = (v_\lambda, m\tilde{\lambda}v_\lambda) = m\tilde{\lambda}.$$

Целевая функция MUSIC-метода

$$f_{MU}(\omega) = \sum_{1\leq i\leq s}|(V_{\lambda_i},e_\omega)|^2/|V_{\lambda_i}|^2.$$

Но

$$(V_\lambda,e_\omega) = \sum_\tau\bar{v}_\tau(X_\tau,e_\omega) = (X(\omega),v_\lambda)m,$$

где $X(\omega)$ определено в (14). Полагая $v_{\tilde{\lambda}_i} = v_i$, имеем

$$f_{MU}(\omega)=\sum_i m|(X(\omega),v_i)|^2/\tilde\lambda_i= m(X(\omega),C_s X(\omega)), \qquad (A1)$$

где

$$C_s=\sum_i v_i v_i'/\tilde\lambda_i, \qquad i=1,..,s.$$

Но $C_M=\hat B_M^{-1}$ и $\sum_1^s v_i v_i'=\hat{\mathcal{P}}_s$ - ортопроектор на $sp(v_1,..,v_s)$. Очевидно $C_s=C_M\hat{\mathcal{P}}_s$. Подставляя это выражение в A1, приходим к искомой двойственной записи целевой функции f_{MU}[см.(15)]. Случай f_{MN} аналогичен.

B. Асимптотика корреляционной функции $\hat b(\tau)$ и матрицы $\hat B$

Рассмотрим модель (1),(2) со стационарным шумом $\{\varepsilon_n\}$. Пусть $\hat b(\tau)$ - оценка Бартлетта (6) для корреляционной функции ряда (1). Простые вычисления дают

$$\sqrt N[\hat b(\tau)-b(\tau)]=\Delta_N^{(1)}(\tau)+\Delta_N^{(2)}(\tau)+N^{-1/2}[r^{(1)}(\tau)-r^{(2)}(\tau)],$$

где при $\tau>0$

а) $\Delta_N^{(1)}(\tau)= 2\sigma\sum_{k=1}^s \exp(i\omega_k\tau)\mathrm{Re}(\bar\alpha_k\hat\varepsilon_N(\omega_k))$,

$\hat\varepsilon_N(\omega_k)= N^{-1/2}\sum_{t=0}^{N-1}\varepsilon_t\exp(-i\omega_k t)$,

б) $\Delta_N^{(2)}(\tau) = \sigma^2 N^{-1/2}\sum_0^{N-\tau}(\varepsilon_{n+\tau}\bar\varepsilon_n-\delta_\tau^0)$,

в) $r^{(1)}(\tau)= -\tau\sum_1^s|\alpha_k|^2\exp(i\omega_k\tau)+\sum_{k\neq k'}\exp(-i\omega_k\tau)\alpha_k\bar\alpha_{k'}\Phi_{N-|\tau|}(\omega_k-\omega_{k'})$,

где

$$\Phi_N(x)=(\exp(iNx)-1)/(\exp(ix)-1). \qquad (B1)$$

г) $r^{(2)}(\tau)=\sigma\sum_{k=1}^s(\sum_{p=0}^{\tau-1}\varepsilon_p\exp(-i\omega_k p)\bar\alpha_k+\sum_{p=N-\tau}^{N-1}\bar\varepsilon_p\exp(i\omega_k p)\alpha_k)e(i\omega_k\tau)$.

Очевидно $\mathrm{var}\, r^{(2)}(\tau)=O(|\tau|)$, т.е.

$$r^{(2)}(\tau) = O_p(|\tau|^{1/2}). \qquad (B2)$$

Используя неравенство

$$|\Phi_N(x)|<|\sin x/2|^{-1}, \qquad x\neq0,$$

имеем

$$r^{(1)}(\tau)= O(|\tau|+\delta^{-1}). \qquad (B3)$$

Положим $\varphi_k=\arg\alpha_k$. Легко видеть, что

$$\mathrm{cov}\{\mathrm{Re}\ \bar{\alpha}_k\hat{\varepsilon}_N(\omega_k),\mathrm{Re}\ \bar{\alpha}_l\hat{\varepsilon}_N(\omega_l)\} =$$

$$= |\alpha_k\alpha_l|(2N)^{-1}[\mathrm{Re}\ \Phi_N(\omega_l-\omega_k)\cos\varphi_k\cos\varphi_l + \mathrm{Im}\Phi_N(\omega_l-\omega_k)\sin\varphi_k\sin\varphi_l].$$

Отсюда

$$\mathrm{cov}(\Delta_N^{(1)}(\tau),\Delta_N^{(1)}(\tau'))=2\sigma^2\sum_1^s|\alpha_k|^2\exp(i\omega_k(\tau-\tau'))+O((N\delta)^{-1})[\tau\neq\tau'], \quad (B4)$$

где [A]=1, если A верно, и [A]=0 в противном случае.

Далее

$$\sigma^{-4}\mathrm{cov}(\Delta_N^{(2)}(\tau),\Delta_N^{(2)}(\tau'))= N^{-1}\sum_\Omega E\varepsilon_{n+\tau}\overline{\varepsilon_{m+\tau'}}\varepsilon_m\bar{\varepsilon}_n+$$

$$+ N^{-1}\sum_\Omega^{(2)}\mathrm{cum}(\varepsilon_m\varepsilon_{n+\tau}\bar{\varepsilon}_n\overline{\varepsilon_{m+\tau'}})=\left(1-\frac{|\tau|}{N}\right)\delta_\tau^{\tau'}+\sum^{(2)},$$

где $\Omega=\{n,m:\ n,m,n+\tau,m+\tau'\in[0,N)\}$.

Сумма $\sum^{(2)}$ равна нулю для гауссовского шума $\{\varepsilon_n\}$. Она состоит из кумулянтов стационарного шума $\{\varepsilon_n\}$ [10]

$$\mathrm{cum}(\varepsilon_m\varepsilon_{n+\tau}\bar{\varepsilon}_n\overline{\varepsilon_{m+\tau'}})= \varkappa_4(n-m+\tau;n-m,\tau').$$

В условиях

$$\sum_k|k||\varkappa_4(k+\tau;k,\tau')|<c$$

вторая сумма

$$\sum^{(2)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\varkappa_4(k+\tau;k,\tau')+ O(N^{-1}|\tau\vee\tau'|),$$

где $a\vee b=\max(a,b)$. Если кумулянтный спектр четвертого порядка существует [см.(43)], тогда, используя соотношение

$$\sum_n\exp(inx)= 2\pi\delta(x),$$

имеем

$$\sum^{(2)}=\iint_{-\pi}^{\pi}\exp(i(\omega_1\tau-\omega_2\tau'))2\pi f(\omega_1,\omega_2;\omega_1,\omega_2)d\omega_1 d\omega_2+ O\left(\frac{|\tau|\vee|\tau'|}{N}\right) \quad (B5)$$

и соответственно

$$\mathrm{cov}(\Delta_N^{(2)}(\tau),\Delta_N^{(2)}(\tau'))=\sigma^4\delta_\tau^{\tau'}+\sum^{(2)}. \quad (B6)$$

Вернемся к гауссовскому случаю $\{\varepsilon_n\}$. Поскольку последовательность $\{\varepsilon_n\}$ не коррелирована, ее линейные и квадратичные формы тоже между собой не коррелированы. В частности, $\{\varepsilon_N(\omega_k)\}$ не коррелированы с $\{\Delta_N^{(2)}(\tau)\}$. Семейство $\{\Delta_N^{(1)}(\tau)\}$ – гауссовское, тогда как $\{\Delta_N^{(2)}(\tau)\}$ – асимптотически гауссовское (см. разд.5). Первая часть леммы доказана.

Пусть $\varphi_m=[\varphi(i-j)]_m$ – матрица $m\times m$ для функции $\varphi(\tau)$. Оценки (B1)-(B6) позволяют оценить L_2- нормы матрицы $\hat{B}_m- B_m$, определенные в (6), (7):

$$NE\|\hat{B}_m - B_m\|_2^2 \le E\|\Delta^{(1)}_{N,m}\|_2^2 + E\|\Delta^{(2)}_{N,m}\|_2^2 + N^{-1}\|r^{(1)}_m\|_2^2 + N^{-1}E\|r^{(2)}_m\|_2^2 =$$

$$=O(m^2) + O(m^2) + O(m^3N^{-1} + m^2N^{-1}\delta^{-1}) + O(m^2N^{-1}).$$

Следовательно,

$$\|\hat{B}_m - B_m\|_2 = O_p(mN^{-1/2}), \quad \delta N > c \tag{B7}$$

и

$$N^{1/2}(\hat{B}_m - B_m) = \Delta_{N,m} + R_m,$$

где $\|R_m\| = O_p(m^{3/2}N^{-1/2} + mN^{-1}\delta^{-1})$

или

$$\|R_m\| = O_p(m^{3/2}N^{-1/2}), \quad \text{если } m^{1/2}\delta > c. \tag{B8}$$

C. Асимптотика проектора $\hat{P}_L$

Оператор

$$\Delta\hat{P}_L = \hat{P}_L - P_L = \sum_{i=1}^{s}(\hat{V}_i\hat{V}_i^* - V_iV_i^*) = \sum \Delta\hat{V}_iV_i^* + V_i\Delta V_i^* + \Delta V_i\Delta\hat{V}_i^*, \tag{C1}$$

где $\hat{V}_i.V_i$ – главные собственные векторы $\hat{B}_m$ и B_m соответственно. Согласно лемме 1 $\Delta\hat{B}_m = \hat{B}_m - B_m = O_p(1)$, если $m^2 \ll N$, $N\to\infty$. Следовательно. в условиях типа (A). гарантирующих однократность собственных векторов V_i, $i\le s$, можно использовать тейлоровские разложения $\hat{V}_i$ в окрестности V_i, [11.C.70]:

$$\Delta V_i = \hat{V}_i - V_i = \sum_{k=1}^{m}\frac{P^k\Delta\hat{B}_mV_i}{\mu_i - \mu_k} + r_2 + \ldots, \tag{C2}$$

где P^k - проекция на вектор V_k. члены второго порядка малости

$$r_2 = \sum_{k,n\ne i}\frac{P^k\Delta\hat{B}_mP^n\Delta\hat{B}_mV_i}{(\mu_i - \mu_n)(\mu_i - \mu_k)} - \frac{P^k\Delta\hat{B}_mP^i\Delta\hat{B}_mV_i}{(\mu_i - \mu_k)^2}. \tag{C3}$$

Используя (C2).(C3), находим два члена разложения ΔP_L. Первый член

$$(\Delta\hat{P}_L)^{(1)} = \sum_{i\ne k}\left(\frac{P^k\Delta\hat{B}_mP^i}{\mu_i - \mu_k} + \frac{P^i\Delta\hat{B}_mP^k}{\mu_i - \mu_k}\right), \quad 1\le i\le s,\ 1\le k\le m.$$

Разделим суммирование на две части: по квадрату $1\le i$, $k\le s$ и прямоугольнику $1\le i\le s$, $k>s$. Очевидно первая часть равна нулю. поскольку изменением индексации $i \leftrightarrow k$ второй член в круглых скобках приводится к первому с противоположным знаком. Вторая часть допускает раздельное суммирование по индексам i и k. поскольку $\mu_k = \sigma^2$, $k>s$. Следовательно. главная часть ΔP_L есть

$$(\Delta\hat{P}_L)^{(1)} = (I_m - P_L)\Delta\hat{B}_mA_m^- + A_m^-\Delta\hat{B}_m(I_m - P_L),$$

где

$$A_m^- = \sum_{i=1}^{s} P^i/\lambda_i \ -$$

псевдообратная матрица для $A_m = \sum_{k=1}^{s} |\alpha_k|^2 e_k e_k^*$ и $\lambda_k = \mu_k - \sigma^2$ - собственные значения A_m (см.разд. 2).

Аналогично находится член $\Delta\hat{P}_L$ второго порядка малости:

$$(\Delta\hat{P}_L)^{(2)} = \mathcal{S}\ [2P_L^{\perp}\Delta\hat{B}_m P_L^{\perp}\Delta\hat{B}_m A_m^{-2} + P_L^{\perp}\Delta\hat{B}_m A_m^{-2}\Delta\hat{B}_m P_L^{\perp} - 2P_L^{\perp}\Delta\hat{B}_m \sum_{i=1}^{s} P^i\Delta\hat{B}_m P^i/\lambda_i +$$
$$+ \sum_{i=1}^{s}(2A_m^-\Delta\hat{B}_m A_m^-(i)\Delta\hat{B}_m P^i - 2P^i\Delta\hat{B}_m A_m^-(i)\Delta\hat{B}_m A_m^-(i) + A_m^-(i)\Delta\hat{B}_m P^i\Delta\hat{B}_m A_m^-(i))],$$

где

$$\mathcal{S}\ [U] = 1/2[U+U^*].$$

$$A_m^-(i) = \sum_{\alpha}(\lambda_\alpha - \lambda_i)^{-1}P^i, \quad 1 \le \alpha(\ne i) \le s.$$

Легко видеть, что

$$\|A_m^-\| = \lambda_s^{-1}, \quad \|A_m^-(j)\| \le \max_{k\ne j} |\lambda_k - \lambda_j|^{-1},$$

$$\|\sum_1^s \lambda_i^{-1}P^i\Delta\hat{B}_m P^i\| \le \|\Delta\hat{B}_m\|/\lambda_s.$$

Отсюда

$$\|(\Delta\hat{P}_L)^{(2)}\| < C\|\Delta\hat{B}_m\|^2(\max_i \lambda_i^{-1} + \max_{k\ne j}|\lambda_i - \lambda_j|^{-1}). \quad (C4)$$

Используя условие (A), получаем утверждение леммы 2.

D. Вещественность функции $u(\omega) = \dot{e}_i^{\perp}(\omega)\overline{e_i^{co}}(\omega)$

Положим $\tilde{e}_\omega = e_\omega \bar{z}$, $\tilde{e}_i = e_i \bar{z}_i$, где $z = \exp(i\omega(m-1)/2)$, $z_i = z(\omega_i)$, т.е.

$$\tilde{e}_\omega = (\exp(-\tfrac{i}{2}(m-1)\omega), \ \dots \ , \exp(\tfrac{i}{2}(m-1)\omega))' \in H^m.$$

Тогда матрица $\tilde{\mathcal{E}} = [(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)]$ вещественна и

$$\mathcal{E} = [(e_i, e_j)] = D\tilde{\mathcal{E}}\bar{D}, \quad D = \mathrm{diag}(z_1 \dots z_s).$$

Если $\mathcal{E}^{-1} = [\mathcal{E}^{ij}]$, тогда

$$e_i^{co}(\omega) = \sum_k \mathcal{E}^{ik}(e_k, e_\omega) = \sum z_i \tilde{\mathcal{E}}^{ik}(\tilde{e}_k, \tilde{e}_\omega)\bar{z}. \quad (D1)$$

Аналогично

$$\dot{e}_i^{\perp}(\omega) = (\dot{e}_i, e_\omega) - \sum_{k,n}(\dot{e}_i, e_k)\mathcal{E}^{kn}(e_n, e_\omega) = [(\dot{e}_i, \tilde{e}_\omega) - (\dot{e}_i, \tilde{e}_k)\tilde{\mathcal{E}}^{kn}(\tilde{e}_n, \dot{\tilde{e}}_\omega)]\bar{z}. \quad (D2)$$

Но

$$\dot{e}_k \bar{z}_k = i(k - \tfrac{m-1}{2})\exp(i(k - \tfrac{m-1}{2})\omega) + i\tfrac{m-1}{2}\exp(i(k - \tfrac{m-1}{2})\omega) = \dot{\tilde{e}}_k + i\tfrac{m-1}{2}\,\tilde{e}_k. \quad (D3)$$

Подставляя (D3) в (D2), получаем

$$\dot{e}_i^{\perp}(\omega) = [(\dot{\tilde{e}}_i,\tilde{e}_\omega)-\sum_{k,n}(\tilde{e}_i,\tilde{e}_k)\mathcal{G}^{kn}(\tilde{e}_n,\tilde{e}_\omega)]z_i\bar{z}. \qquad (D4)$$

Соединяя (D1) и (D4), находим, что $\dot{e}_i^{\perp}(\omega)\overline{e_i^{co}}(\omega)$ вещественно.

Е. Дисперсия $\hat{\omega}_k$ для умеренно больших m

Согласно (41) необходимо оценить

$$Z^2=\frac{1}{2\pi}\int|\mathrm{Re}\ \tilde{u}_k(\omega)|^2|e_k^{co}(\omega)|^2d\omega, \quad m\gg1. \qquad (E1)$$

Оценка Z сверху : **MUSIC-метод**. В этом случае символ Re можно опустить и

$$|\tilde{u}_k(\omega)| = |(\dot{e}_k^{\perp},e_\omega)||\dot{e}_k^{\perp}|^{-2}< m^{1/2}|\dot{e}_k^{\perp}|^{-1}, \qquad (E2)$$

или

$$Z < |m^{1/2}e_k^{co}|/|\dot{e}_k^{\perp}|. \qquad (E3)$$

Но

$$m^{1/2}|e_k^{co}|<m^{1/2}|e_k/m|+|e_k^{co}-e_k/m|m^{1/2}= 1+(\mathcal{G}^{kk}m-1)^{1/2}= 1+O(m^{-1}). \qquad (E4)$$

Действительно, векторы $\{e_i\}$ почти ортогональны при m»1, ибо

$$(e_i,e_j)|e_i|^{-1}|e_j|^{-1} = \Phi_m(\omega_i-\omega_j)/m = O(m^{-1}), \quad i\neq j,$$

где Φ_m определено в (B1). Поэтому

$$\mathcal{G}^{-1}=[(e_i,e_j)]^{-1}=[m\delta_i^j+O(1)]^{-1}= m^{-1}I_m+O(m^{-2})$$

и

$$m\mathcal{G}^{kk}-1 = O(m^{-1}).$$

Оценим $|\dot{e}_k^{\perp}|$:

$$|\dot{e}_k^{\perp}|^2=|e_k|-\sum(\dot{e}_k,e_n)\mathcal{G}^{np}(e_p,\dot{e}_k)=\frac{1}{3}m^3(1+O(m^{-1}))-|(\dot{e}_k,e_k)|^2\mathcal{G}^{kk}+O(m^2)=$$

$$=\frac{1}{3}m^3(1+O(m^{-1}))-\frac{1}{4}m^3(1+O(m^{-1})) = \frac{1}{12}m^3(1+ O(m^{-1})). \qquad (E5)$$

Здесь использована оценка (31).Подставим (E4) и (E5) в (E3). Имеем

$$Z \le \sqrt{12}\ m^{-3/2}(1+O(m^{-1/2}))<4m^{-3/2}, \quad m>m_0.$$

Оценка Z снизу: **MUSIC-метод**. Очевидно,

$$Z\ge(\int_{\Omega_d}|\tilde{u}_k(\omega)e_k(\omega)m^{-1}|^2d\omega/2\pi)^{1/2}-[\int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{u}_k(\omega)|^2\Big|e_k^{co}(\omega)-$$

$$-\frac{e_k(\omega)}{m}\Big|^2d\omega/2\pi]^{1/2} = I_1- I_2,$$

где $\Omega_d=\{\omega:m|\omega-\omega_k|<d\}$.

Второй член $I_2 < \max|u_k(\omega)||e_k^{co}-e_k m^{-1}|$. С учетом (E2), (E4), (E5) получаем

$$I_2 < \sqrt{12}\ m^{-3/2}(\mathfrak{g}^{kk}m-1)^{1/2}(1+O(m^{-1})) = O(m^{-2}). \tag{E6}$$

На множестве Ω_d

$$u_k(\omega)=(\omega-\omega_k)+m(\omega-\omega_k)^2 q(\omega), \tag{E7}$$

где

$$|q|<q_0=\sqrt{3}(1+O(m^{-1})).$$

Действительно, $u_k(\omega_k)=0$ (см. подразд. 4.2). Используя (E5), имеем

$$|\ddot{u}_k(\omega)| = |(\dot{e}_k^{\perp},\ddot{e}_\omega)||\dot{e}_k^{\perp}|^{-2}<|\ddot{e}_\omega|/|\dot{e}_k^{\perp}| = m\sqrt{12}(1+O(m^{-1})).$$

Это доказывает (E7).

Положим $d = q_0^{-1} < 2\pi$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi}|e_k(\omega)/m|^2=\left|\frac{\sin(\omega-\omega_k)m/2}{\sqrt{2\pi}\ m\ \sin(\omega-\omega_k)/2}\right|^2 > \left|\frac{\sin\ d/2}{\sqrt{2\pi}\ d/2}\right|^2 = B_d^2,\qquad \omega\in\Omega_d.$$

Используя (E7), получаем

$$I_1 > B_d\left(\int_{-d}^{d}(x+x^2q_0)^2dx\right)^{1/2}m^{-3/2} > km^{-3/2},$$

где $K = B_d\left(2\int_0^d(x-x^2q_0)^2dx\right)^{1/2}= \sin(2q_0)^{-1}/(7,5\pi q_0)^{1/2}$.

Оценка Z снизу: MN-метод. Для MN-метода

$$\tilde{u}_k(\omega)=(e_0^{\perp},e_\omega)z/((e_0^{\perp},\dot{e}_k)z_k),$$

где $z = \exp(i\omega(m-1)/2)$, $z_k= z(\omega_k)$.

Положим $\tilde{e}_\omega= e_\omega\bar{z}$, $\tilde{e}_i= e_i\bar{z}_i$, $\tilde{\mathfrak{g}} = [(\tilde{e}_\alpha,\tilde{e}_\beta)]$. Тогда матрица $\tilde{\mathfrak{g}}$ вещественна и

$$\tilde{u}_k(\omega) = \frac{z - \sum z_\alpha \tilde{\mathfrak{g}}^{\alpha\beta}(\tilde{e}_\beta,\tilde{e}_\omega)}{iz_k(m-1)/2 - \sum z_\alpha \tilde{\mathfrak{g}}^{\alpha\beta}(\tilde{e}_\beta,\dot{\tilde{e}}_k)}$$

(см. приложение D). Имеем

$$\ddot{\tilde{u}}_k(\omega) = A/B,$$

где $A = -(m-1)^2/4z - \sum z_\alpha \tilde{\mathfrak{g}}^{\alpha\beta}(\tilde{e}_\beta,\ddot{\tilde{e}}_\omega)$,

$B = iz_k(m-1)/2 - \sum z_\alpha \tilde{\mathfrak{g}}^{\alpha\beta}(\tilde{e}_\beta,\dot{\tilde{e}}_k)$.

Принимая во внимание

$$(e_\alpha,\ddot{\tilde{e}}_\omega)= O(m^2),\quad \alpha\neq k,$$

$$\ddot{g}^{\alpha,\beta} = m^{-1}\delta_\alpha^\beta + O(m^{-2}),$$

получаем $A = -((m-1)/2)^2 z - z_k \ddot{g}^{kk}(\tilde{e}_k, \ddot{\tilde{e}}_\omega) + O(m)$, $\quad \omega \in \Omega_d$.

Но

$$(\tilde{e}_k, \dot{\tilde{e}}_k) = O(m), \quad \alpha \neq k$$

и

$$(\tilde{e}_k, \dot{\tilde{e}}_k) = i\sum_{k=p}^{m-1}(k - \frac{m-1}{2}) = 0.$$

Поэтому

$$B = iz_k(m-1)/2 + O(1)$$

и

$$A/B = [i(\frac{m-1}{2})z/z_k + i\ddot{g}^{kk}(\tilde{e}_k, \ddot{\tilde{e}}_\omega)\frac{2}{m-1} + O(1)](1 + O(\frac{1}{m})),$$

т.е.

$$\mathrm{Re}A/B = -\frac{m-1}{2}\mathrm{Im}(z/z_k) + O(1) = \frac{-(m-1)}{2}\sin\frac{m-1}{2}(\omega - \omega_k) + O(1) \quad \text{для } \omega \in \Omega_d.$$

Снова приходим к (E7) с $q_0 = \frac{1}{2}(1 + O(\frac{1}{m}))$.

Литература

1. *Молчан Г.М.* О потенциальной возможности разрешения частот в спектральном анализе // Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука, 1989. С.160-179.(Вычисл. сейсмология; Вып.22).

2. *Молчан Г.М., Ньюман У.И.* Теоретический анализ метода гармонического разложения // Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука, 1989. С.179-193.(Вычисл. сейсмология: Вып.22).

3. *Kavech M., Barabell A.J.* The statistical performance of the MUSIC and the minimum-norm algorithms in resolving plane waves in noise // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, 1986. Vol. ASSP-34. P.331-341.

4. *Stoica P., Nehorai A.* MUSIC, maximum likelihood and Cramer-Rao bound // IEEE Trans. Acoust.,Speech, Signal Processing, 1989. Vol. ASSP-37. P.720-741.

5. *Kumaresan R., Tufts P.W.* Estimating the angles of arrival of multiple plane waves // IEEE Trans. Aerosp. Elektron. Syst. 1983. Vol. AES-19. P.134-139.

6. *Walker A.* On the estimation of harmonic components in a time series with stationary independent residuals // Biometrika. 1971. Vol. 58. P.21-36.

7. *Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З.* Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979. 527с.

8. *Айвазян С.А., Бухштабер В.М., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д.* Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности. Справ. изд. М: Финансы и статистика, 1989. 607с.

9. *Ибрагимов И.А., Линник Ю.В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524с.

10. *Бриллинджер Д.Р.* Временные ряды. Обработка данных и теория.

М.: Мир, 1980. 536с.
11. *Wilkinson J.* The algebraic aingenvalue aroblem. Oxford: Oxford Uni. Press, 1965. 350p.

УДК 550.3:519.2

А.Ф.Кушнир

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ КАК СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА С МЕШАЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ

A.F.Kushnir

IDENTIFICATION OF LINEAR DYNAMIC SYSTEMS AS A STATISTICAL PROBLEM WITH INCIDENTAL PARAMETERS

The problem of linear multidimensional system parameter estimation is discussed. Estimation is based on observations of input and output obscured by noise. In geophysics such problems arise in analysis of seismic response of media and structures using experimental data. The lower bounds of estimator variance are found and optimal estimation procedures are designed. Stability of estimator quality are examined, when statistical noise properties are varied.

Статистическая постановка задачи идентификации

Широкий круг задач обработки экспериментальных данных с помощью ЭВМ сводится к проблеме оценки импульсной переходной характеристики (ИПХ) H_τ некоторой линейной системы, связывающей входные и выходные данные (дискретизированные с целью обработки на ЭВМ) уравнением типа свертки:

$$u_t = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} H_\tau x_{t-\tau}\,, \qquad t \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \| H_\tau \| < \infty\,, \tag{1}$$

где $x_\tau \in R^k$ - входной сигнал линейной системы; $u_t \in R^n$ - ее выходной сигнал. Измерение процессов x_t и u_t практически всегда осуществляется на фоне помех ξ_t и η_t, которые естественно описывать, как случайные временные ряды. Поэтому определение (n x m)-матричной функции H_τ, $\tau \in \mathbb{Z}$ по выборкам наблюдений

$$y_t = x_t + \xi_t, \qquad z_t = u_t + \eta_t, \qquad t \in \overline{1,N} \tag{2}$$

представляет собой статистическую задачу.

В частных постановках применительно к конкретным вопросам обработки геофизических экспериментальных данных эта задача исследовалась в [1-4]. Теоретические подходы к ее решению методами асимпто-