I. ПРОГНОЗ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ: ФЕНОМЕНОЛОГИЯ И МОДЕЛИ

УДК 550.341 + 519

Г.М.Молчан

МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОГНОЗА ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

G.M.Molchan

MODELS FOR OPTIMIZATION OF EARTHQUAKE PREDICTION

An inter disciplinary problem of earthquake prediction which involves economics is considered. It helps to understand prediction problem on the whole and reveals additional requirements on seismostatistics. The problem is formulated as an optimal control problem: having the possibility to declare several types of alarms it is necessary to find an optimal policy which minimizes the total expected losses. Alarms require special costs both for maintaining and for changing of the alarm type, each successful alarm prevents certain amount of losses; total expected losses are integrated on the half infinity time interval, taking into account time discount factor. Algorithmic and exact solutions ave indicated.

Введение

Под прогнозом землетрясений обычно подразумевается физический прогноз, т.е. детерминированная локализация будущих сильных событий в пространстве-времени. В то же время практика прогноза на всех стадиях от долгосрочного до краткосрочного покоится на стохастических элементах. Это отражено и в статистических характеристиках прогноза и в способах интерпретации тревоги [1,2]. Поэтому вопрос о практическом использовании прогноза составляет другую и не менее важную сторону общей проблемы.

По мнению К.Аки [3] проблема прогноза в целом, включающая также решения и практические мероприятия, должна рассматриваться при

полном "разделении труда" между геофизиками и потребителями (например, экономистами). Примером такой попытки может служить работа В.И.Кейлис-Борока с В.Л.Канторовичем [4] (ее резюме см. также в [1]). К сожалению, реальность такова, что мы имеем дело с набором методов (алгоритмов) прогноза, причем невысокого качества. Число алгоритмов растет во времени, что только усложняет ситуацию. Дело в том, что большинство алгоритмов по форме сами являются решающими функциями, объявляющими тревогу/нетревогу в заданной точке или области. В таком случае уже два неэквивалентных метода могут и реально приводят к противоречивым заключениям. Избавиться от этой трудности путем выбора "лучшего метода" нельзя, оставаясь в рамках физики прогноза (см. ниже). В свою очередь специалисту по принятию решений важно понять целевые принципы, заложенные в алгоритмах прогноза. Эти принципы либо расплывчаты, поскольку не осознаются самими авторами прогноза, либо опираются на искусственные меры эффективности (см.ниже). В результате эксперту приходится иметь дело с системой готовых, возможно противоречивых, решений, которые никак не связаны с практической проблемой. Наконец, расщепляя проблему прогноза, геофизики оказываются в неведении, достаточны ли их результаты для решения практических задач.

В настоящей работе предпринята попытка количественного анализа проблемы прогноза в целом. Центральным понятием здесь становится *цель* прогноза. В этих условиях множественность прогнозов из помехи становится благоприятной основой для выбора наилучшего решения. Ниже рассмотрены две модели целевой функции прогноза: первая важна для анализа большинства реальных алгоритмов и полезна на исследовательской стадии прогноза (стадии, в которой мы сейчас находимся); вторая в грубой форме моделирует экономику прогноза. В обоих случаях найдена структура прогнозов, оптимизирующих целевые функции в условиях использования прогнозной информации $\mathcal{I}(t)$ весьма общей природы. Оказалось, что в сложных ситуациях оптимальный прогноз базируется не только на условной (относительно $\mathcal{I}(t)$) интенсивности потока землетрясений, что отмечалось ранее (см.[5,6]), но и на матрице вероятностей перехода для состояний информации $\mathcal{I}(t)$ в соседних интервалах времени. Оценивание первой характеристики составляет цель многих современных исследований по прогнозу и известна как задача комплексирования предвестников. Изучение второй характеристики, насколько нам известно, пока не начиналось; предпосылки к этому содержатся в описаниях хода подготовки сильных землетрясений.

Настоящая работа представляет полное и исправленное изложение результатов, анонсированных в [7]. В первом разделе резюмированы работы автора [5,6]; здесь рассмотрен "академический" тип прогноза с двумя состояниями тревоги: есть/нет. Во втором разделе анализируется прогноз с произвольным числом состояний тревоги. При оптимизации средних (дисконтированных) потерь, связанных с прогнозом, здесь появляется уравнение типа Беллмана. Эта часть работы важна для понимания того, какие статистические характеристики полезны в проблеме прогноза в целом. Третий раздел работы носит больше теоретический характер и относится к специальному случаю потерь: средние потери в единицу времени.

Для удобства чтения все доказательства вынесены в приложение.

1. Простейшая задача прогноза

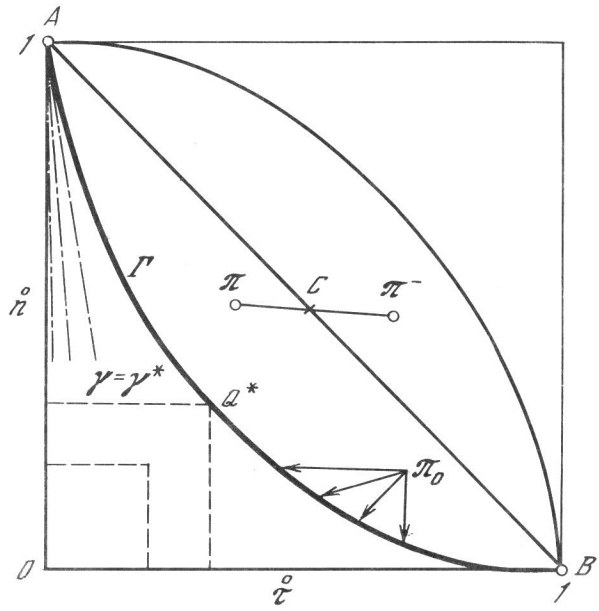
В предыдущих работах автора [5,6] ставилась задача сравнения методов прогноза стационарного точечного процесса (последовательность сильных землетрясений в некоторой области). Она решалась на базе двух характеристик прогноза: $\mathring{n}$ - доля непредсказанных событий (отношение числа пропущенных событий к их общему числу в интервале длины T»1) и $\mathring{\tau}$ - доля времени тревоги (отношение общего времени тревоги к T при T»1).

Фиксируем тип информации $\mathcal{I}(t)$, доступный наблюдателю в момент t для прогноза событий точечного процесса. Практически в $\mathcal{I}(t)$ могут входить каталоги событий разной силы в регионе, содержащем рассматриваемую область, данные о физических полях или предвестниках в некоторых интервалах $(t-t_i, t-\tau_i)$, где τ_i - задержка данных i-го типа. В простейшей ситуации наблюдатель, используя информацию $\mathcal{I}(t)$, принимает решение $\pi(t)$: объявлять или не объявлять тревогу в интервале времени $(t, t+\Delta)$, где шаг по времени Δ может совпадать с периодом обновления информации. Совокупность решений $\{\pi(t)\}=\pi$ назовем прогнозной *политикой*. На практике политика определяется методикой или прогнозным алгоритмом. Ниже удобно рассматривать такой класс политик π, у которых решения могут приниматься с некоторыми вероятностями, т.е. после дополнительного эксперимента типа бросания монеты с вероятностями исходов (p,1-p), зависящими от $\mathcal{I}(t)$. На практике предпочитают, конечно, иметь дело с детерминированными решениями, для которых p=0 или 1.

Из любых двух политик π_1 и π_2 указанного типа всегда можно скомбинировать новую, которая в каждом интервале времени Δ независимо использует политику π_1 или π_2 с вероятностями q и 1-q. Это ведет к смеси ошибок или характеристик $(\mathring{n}, \mathring{\tau})_i$ исходных политик с

теми же весами q и 1-q. Поэтому множество ошибок $G=\{(\mathring{n},\mathring{\tau})_{\pi}\}$, отвечающих разным политикам, оказывается выпуклым, если эти политики основаны на одной и той же информации $\mathcal{I}(t)$ (рис.1).

Множество G в силу определения принадлежит квадрату $0\le\mathring{n},\ \mathring{\tau}\le1$; оно содержит точки (1,0) и (0,1), а значит и диагональ квадрата $\mathring{n}+\mathring{\tau}=1$ (свойство выпуклости G). Первая точка отвечает весьма распространенной *политике оптимиста*, когда тревога не объявляется; вторая точка - *политике пессимиста*, когда тревога поддерживается постоянно; точки диагонали $\mathring{n}+\mathring{\tau}=1$ соответствуют случайному угадыванию, при котором тревога объявляется с вероятностью p независимо от состояния информации $\mathcal{I}(t)$.



Р и с. 1. Множество ошибок $(\mathring{n},\mathring{\tau})$ для политик прогноза, основанных на одной информации

A - политика оптимиста; B - политика пессимиста; AB - результаты случайного угадывания; C - центр симметрии: π и π^- - прогноз и антипрогноз; Г - диаграмма оптимальных ошибок прогноза (стрелки указывают на лучшие показатели прогноза относительно политики π_0); пунктир - изолинии функции потерь $\gamma=\max(\mathring{n},\mathring{\tau})$, Q^* - ошибки минимаксной политики, $\mathring{n}=\mathring{\tau}$; штрихпунктир - изолинии потерь $\gamma=\mathring{\tau}/(1-\mathring{n})$

Множество G имеет центр симметрии (1/2,1/2). Он обязан существованию антипрогноза π^-, меняющего местами тревогу и нетревогу, а ошибки $(\mathring{n},\mathring{\tau})$ на ошибки $(1-\mathring{n},1-\mathring{\tau})$. Поэтому все точки G, лежащие вы-

ше диагонали $\mathring{n}+\mathring{\tau}=1$ отвечают политикам, построенным по принципу отрицания нетривиальных политик с $\mathring{n}+\mathring{\tau}<1$. Однако интересны только те нетривиальные политики, которые отвечают нижней границе Г множества G. Она соединяет точки (1,0) и (0,1) и в силу свойств G является монотонной, выпуклой вниз кривой (см. рис.1).

Точки Г несравнимы: если $\mathring{\tau}_1<\mathring{\tau}_2$, то $\mathring{n}_1\geq\mathring{n}_2$; для любой точки из G всегда найдется граничная точка на Г с меньшими координатами, т.е. с лучшими показателями прогноза. Следовательно, среди политик прогноза, основанных на потоке информации $\mathcal{I}(t)$, существует минимальное число наилучших и несравнимых между собой политик; их число бесконечно и они описываются кривой ошибок или диаграммой Г.

С другой стороны, знание кривой Г достаточно для выбора наилучшей политики при решении любой проблемы следующего типа. Пусть долговременные потери, связанные с прогнозом, можно выразить в терминах ошибок $\mathring{n}$ и $\mathring{\tau}$, т.е. в виде функции $\gamma=\gamma(\mathring{n},\mathring{\tau})$, возрастающей по каждому аргументу. Если множества типа $\{(\mathring{n},\mathring{\tau}):\gamma<u\}$ выпуклы для любого уровня u, тогда точка Q^* касания изолинии $\gamma=\gamma^*$ с Г отвечает политике, которая минимизирует γ (см. рис.1).

Таким образом, в классе целевых функций $\gamma=\gamma(\mathring{n},\mathring{\tau})$ общая проблема прогноза (минимизация потерь γ) расщепляется на две независимые задачи: построение функции потерь γ, что связано с экономикой или исследовательскими целями, и построение кривой Г, зависящей от информации $\mathcal{I}(t)$, что связано с физикой сейсмического процесса. В последнем случае интересна не одна точка $(\mathring{n},\mathring{\tau})$ отдельно взятого алгоритма, а их совокупность, порожденная как различными параметрами алгоритма, так и разными алгоритмами, использующими одну информацию для прогноза событий определенной силы. Граница выпуклой оболочки этих точек служит оценкой диаграммы Г.

Нередко используются две меры эффективности прогноза: $e_1=(1-\mathring{n})/\mathring{\tau}$, [8] и $e_2=1-\mathring{n}-\mathring{\tau}$, [9]. Понятно, что максимум эффективности имеет политика с минимальной функцией потерь $\gamma_1=1/e_1$ в первом случае и $\gamma_2=1-e_2$ во втором. Из сказанного выше следует, что политика оптимиста с ошибками (1,0) является самой эффективной в первом случае: изолинии γ_1 образует пучок прямых с центром $Q^*=(1,0)$, и наименее эффективна во втором: $e_2=0$. Дело не только в том, что величина γ_1 неудачна как мера эффективности. Сомнительна сама попытка отобрать из континуума несравнимых политик одну на все случаи жизни. Целевая функция γ_2 безусловно полезна на исследовательской стадии прогноза, но в целом выбор γ лежит за рамками физики прогноза.

Как выглядит оптимальная прогнозная политика? Ответ дан в [5,6]. Рассмотрим функцию риска $r(t)$ или что то же - условную относительно информации $\mathcal{I}(t)$ интенсивность потока прогнозируемых событий

$$r(t)= P\{\text{есть событие в } (t,t+\Delta)\,|\,\mathcal{I}(t)=u\}/\Delta=r_u. \qquad (1)$$

Безусловную интенсивность, т.е. число сильных событий в единицу времени, обозначим через λ. Дискретизируем время с шагом Δ и обозначим через $n(t)$ индикатор событий в интервале дискретизации $(t, t+\Delta)$. Иначе говоря, события в Δ-интервалах склеиваются, $n(t)=0$ или 1.

Если поток $\{n(t),\mathcal{I}(t)\}$ стационарный и эргодический, то существует такой порог r^*, зависящий от выбора функции потерь γ, что оптимальная политика прогноза сводится к объявлению тревоги всякий раз, когда $r(t)>r^*$. В исключительных случаях, когда событие $r(t)=r^*$ имеет ненулевую вероятность, тревога разыгрывается с некоторой вероятностью p^*.

Если Q^*- общая точка касания изолинии $\gamma=\gamma^*$ и диаграммы ошибок Γ, то порог r^* определяется общей производной кривых Γ и $\gamma=\gamma^*$ в этой точке:

$$r^* = -\lambda \frac{d\mathring{n}}{d\mathring{\tau}} (Q^*).$$

Если одна из кривых не дифференцируема в Q^*, то производная заменяется наклоном любой общей опорной прямой к Γ и $\gamma=\gamma^*$ в точке Q^*. В важном случае линейных потерь $\gamma=\alpha\lambda\mathring{n}+\beta\mathring{\tau}$ порог $r^*=\beta/\alpha$, поскольку изолиния $\gamma=\gamma^*$ является прямой и, значит, опорной прямой с наклоном $-\beta/\lambda\alpha$. Этот случай был ранее изучен в [10,11]. Если интерпретировать α как предотвращенные потери при успешном прогнозе одного события, а β - как плату за единицу времени тревоги, то величина γ будет отвечать суммарным потерям, отнесенным к единице времени.

Еще один важный тип прогнозной политики связан с выбором функции $\gamma=\max(\mathring{n},\mathring{\tau})$. Оптимизация прогноза в этом случае ведет к минимаксной политике, для которой $\mathring{n}=\mathring{\tau}=\min$. Последний принцип неосознанно реализуется на практике. Например, алгоритм КН [I] дает в среднем по регионам $\mathring{n}\simeq\mathring{\tau}=25\div30\%$ в прогнозе магнитуд $M\geq6,4$. Аналогично, $\mathring{n}\simeq\mathring{\tau}=33\%$ для алгоритма М8 [I] в прогнозе $M\geq7,5$ на тихоокеанском кольце (устные сообщения И.Ротвайн и А.Хохлова). В [6] показано, что минимаксную политику естественно использовать тогда, когда отношение потерь β/α в линейной функции γ неизвестно и наблюдатель предпочитает ориентироваться на самый неблагоприятный вари-

ант $\beta/\lambda\alpha$. Это обстоятельство обеспечивает определенные свойства устойчивости минимаксной политике [5,6].

2. Прогноз с многофазной тревогой

Предыдущая модель прогноза при достаточной общности предположений обладает очевидной простотой оптимальной политики. В ней хорошо разделены сферы деятельности геофизика (оценивание функции риска) и экономиста (например, оценка отношения потерь β/α). Даже допущение о стационарности процесса $(n(t),\mathcal{J}(t))$ не является обязательным, если речь идет о линейной целевой функции. Отказ от стационарности приведет лишь к зависимости порога r^* от времени. Причина в том, что найденный прогноз оптимален по отношению к ожидаемым линейным потерям в единицу времени как на отрезке Δ (локальная оптимальность), так и на всей оси времени (глобальная оптимальность) (см. ниже).

Рассмотренная простейшая модель охватывает многие типы реальных прогнозов, которые ограничиваются объявлением или необъявлением тревоги. Однако реальная тревога должна быть, как правило, многофазной, поскольку разная степень опасности требует своей предупредительной системы защитных мероприятий [I]. Поэтому в данном разделе мы усложним предыдущую модель прогноза, рассматривая многофазную тревогу и более общий вариант линейных потерь.

Пусть наблюдатель каждый такт времени Δ имеет возможность, используя информацию $\mathcal{J}(t)$, объявить тревогу любого типа из заданного набора $\{A_0,A_1,\ldots,A_m\}$. Отмена тревоги также включена в этот набор, например A_0. Будем считать, что каждая тревога A_i требует расходов β_i в единицу времени на ее поддержание, а в случае землетрясения в условиях тревоги A_i предотвращаются потери α_i. В частности, для тревоги A_0 потери $\alpha_0=\beta_0=0$.

Потребуем, чтобы каждая смена тревог $A_i\to A_j$ сопровождалась затратами $c_{ij}:0\le c_{ij}\le\infty$. Случай $c_{ij}=\infty$ означает, что смена тревог $A_i\to A_j$ запрещена. Например, эвакуация населения возможна только после решения транспортных проблем. Это обстоятельство предопределяет упорядоченность тех типов тревог, которым сопутствуют указанные мероприятия. С другой стороны, нетрудно указать мероприятия, которые можно выполнять в любом порядке или параллельно. Блок параллельных мероприятий в нашей схеме надо рассматривать как одно мероприятие. При оптимизации прогноза ненулевые затраты c_{ij} вносят устойчивость в режим тревог, препятствуя быстрому чередованию решений, но при этом сильно усложняют задачу. Это связано с тем, что локальные по

времени оптимальные решения не образуют оптимальную политику в целом. Примеры такого рода недавно рассматривались Я.Каганом и автором в [12].

Пусть z_t - потери от принятого решения $\pi(t)$; предотвращенные потери учитываются в z_t со знаком минус. Рассмотрим суммарные потери от прогнозной политики π на полуоси $t\geq 0$, приведенные к начальному моменту времени с временным коэффициентом $\varkappa$:

$$Z_\pi = \sum_{k\geq 0} z_{k\Delta} \exp(-\varkappa\cdot k\Delta) = \sum_{k\geq 0} z_{k\Delta}\theta^k, \qquad \theta = e^{\varkappa\Delta}. \tag{2}$$

В теории оптимального управления Z_π называется дисконтированными потерями с бесконечным горизонтом [13,14]. В реальных задачах фактор $\varkappa$ может соответствовать коэффициенту эффективности капитальных вложений. С математической точки зрения введение фактора $\varkappa$ позволяет по существу рассматривать прогноз на конечном интервале времени порядка $1/\varkappa$, избегая при этом краевых эффектов при нахождении стационарных методов прогноза.

Средние суммарные дисконтированные потери EZ_π будем рассматривать как целевую функцию прогноза, т.е. цель прогноза состоит в минимизации величины

$$S = EZ_\pi \to \min_\pi. \tag{3}$$

Рассмотрим сначала ситуацию, когда изменение типа тревоги не требует дополнительных затрат, т.е. когда $c_{ij}=0$ для всех i и j.

У т в е р ж д е н и е 1. Пусть $c_{ij}=0$, $i,j=1,\ldots,m$, а решения $\pi(t)$ зависят только от стационарного потока информации $\mathcal{T}(t)$. Тогда оптимальная политика такова, что

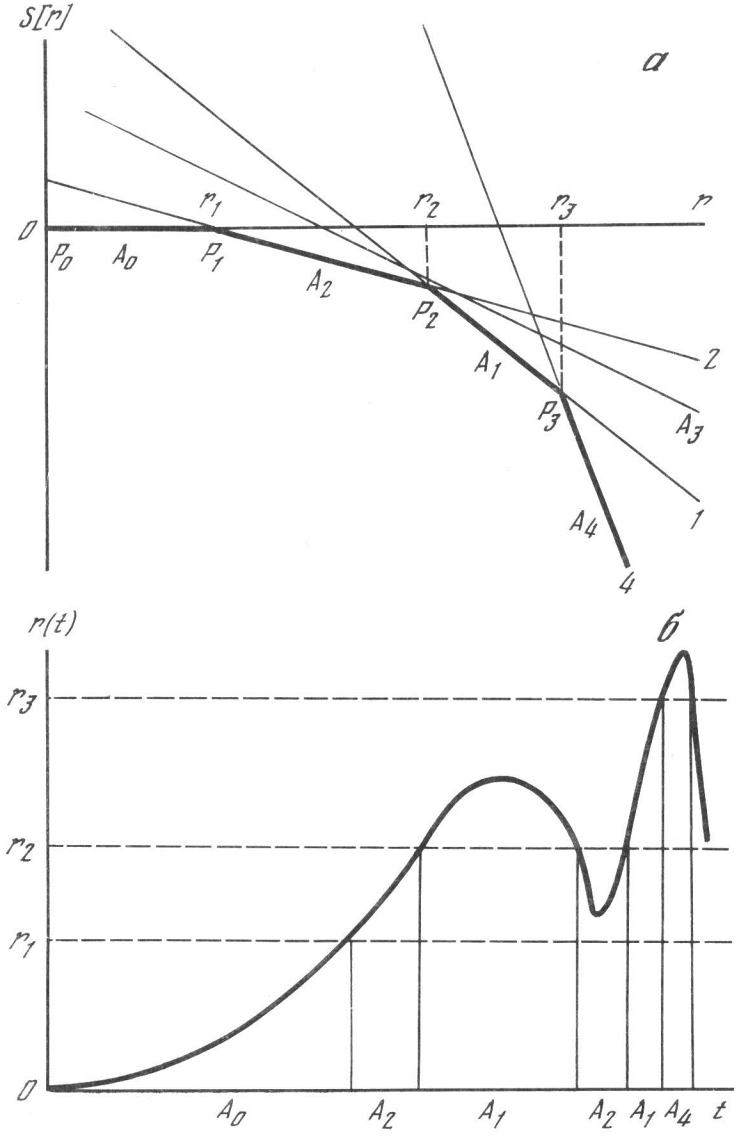
$$\pi(t) = A_{j*}, \tag{4}$$

где индекс j^* реализует минимум

$$\min_j(\beta_j - \alpha_j r(t)) = s[r(t)] \tag{5}$$

при текущем состоянии функции риска $r(t)$.

З а м е ч а н и я : 1. Функция $s[r]$ в (5) является выпуклой полигональной огибающей системы прямых $y=\beta_j-\alpha_j r$ (рис.2,а). Пусть $P_0(0,0)$, $P_1(r_1,y_1),\ldots,P_k(r_k,y_k)$ - вершины полигона $s[r]$, упорядоченные по r: $0=r_0<r_1<\ldots<r_k<r_{k+1}=\infty$, а $j(n)$ - номер прямой $y=\beta_j-\alpha_j r$, на которой лежит пара соседних вершин P_n, P_{n+1}. Прогнозная политика (4),(5) означает, что существует $k\leq m$ уровней риска $r(t)$: $\{r_i\}$, таких, что в интервале значений $r(t)\in(r_n,r_{n+1})$ всегда объявляется тревога с индексом $j^*=j(n)$ (рис.2,б). При этом часть тревог $\{A_i\}$



Р и с. 2. Оптимальная многофазная тревога с нулевыми затратами при смене фаз

а – оптимальные средние потери на единицу времени s[r], как функция уровня риска: s[r] – огибающая прямых $\beta_i - \alpha_i r$, индексированных тревогами A_i; P_α – вершины огибающей; r_α – пороги риска (в интервале (r_2, r_3) действует тревога A_1); тревога A_3 экономически не эффективна; б – функция риска r(t) и оптимальная тревога $A_{j(t)}$ как функции времени в условиях рис.2,а

может оказаться экономически нецелесообразной; на рис.2,а такова тревога A_3.

2. Величина (5) определяет минимальные условные средние потери в единицу времени от прогноза в интервале $(t,t+\Delta)$ при заданной информации $\mathcal{I}(t)$. Поэтому политика (4),(5) является глобально и локально оптимальной одновременно. Она не зависит от временного фактора $\varkappa$ и является обобщением прогнозной политики для двухфазной тревоги с линейной функцией потерь, описанной выше.

Доказательство: см. Приложение А.

Чтобы рассмотреть общий случай, введем следующее понятие. Будем говорить, что процесс $(n(t),\mathcal{I}(t))$ обладает М-свойством, если поток информации $\mathcal{I}(t)$ марковский, т.е.

$$P\{\mathcal{I}(t+\Delta)= v|\mathcal{I}(t)=u;\mathcal{I}(s),\forall\ s<t\}= P\{\mathcal{I}(t+\Delta)=v|\mathcal{I}(t)=u\}= P_{uv} \qquad (6)$$

и дополнительно

$$E\{n(t)|\mathcal{I}(s),s\le t\}= E\{n(t)|\mathcal{I}(t)\}= r(t)\Delta. \qquad (7)$$

Условия (6,7), очевидно, всегда выполнены, если в информацию $\mathcal{I}(t)$ входит все прошлое о наблюдаемых предвестниках до момента t и вся предыстория процесса $n(\cdot)$. Иначе говоря, прошлое $\{\mathcal{I}(s),n(s),s<t\}$ измеримо относительно $\mathcal{I}(t)$. Если поток $n(t)$ и некоторый физический процесс $x(t)$, используемый для прогноза $n(t)$, обладает конечной "памятью", т.е. конечным "интервалом корреляции" J, то (6,7) будут иметь место для потока информации $\mathcal{I}(t)=\{n(s),x(s),t-J<s<t\}$ существенно меньшей размерности.

Усложняя требования к процессу $(n(t),\mathcal{I}(t))$, мы расширим класс рассматриваемых решений: $\pi(t)$ может зависеть от $\mathcal{I}(t)$ и предыдущих решений $\pi(s),s<t$. Эта зависимость может быть стохастической.

У т в е р ж д е н и е 2. Пусть $(n(t),\mathcal{I}(t))$ - стационарный процесс с М-свойством, а решения $\pi(t)$ зависят от $\mathcal{I}(t)$ и $\{\pi(s),s<t\}$. Тогда

а) оптимальная многофазовая тревога с параметрами $[\alpha_i,\beta_i,c_{ij}]$ в задаче (3) существует и может быть выбрана стационарной, т.е. решения $\pi(t)$ зависят от времени только через состояния текущей информации $\mathcal{I}(t)=u$ и текущей тревоги $\pi(t-\Delta)=i$;

б) минимальные средние потери (3): $S^*(u,i)$, при начальных условиях $\mathcal{I}(0)=u$ и $\pi(-\Delta)=i$ определяются уравнением

$$S(u,i)= \min_j\ [c_{ij}+ \beta_j\Delta - r_u\Delta\alpha_j+ \theta \sum_v P_{uv}\ S(v,j)] \qquad (8)$$

(для простоты множество состояний $\mathcal{I}(t)$ счетно);

в) при $\theta\in(0,1)$ или $\varkappa>0$ уравнение (8) имеет единственное решение и может быть найдено итерациями:

$$S^{(0)}(u,i)=0; \quad S^{(n+1)}=T_\theta S^{(n)}, \tag{9}$$

где T_θ - оператор на функциях $S(u,i)$, определяемый правой частью (8). Ошибка n-й итерации

$$|S^{(n)}-S^*|< \theta^n(1-\theta)^{-1}L, \tag{10}$$

где

$$L = \max_{ij:c_{ij}<\infty} |c_{ij}+\beta_j\Delta+\alpha_j|;$$

г) в условиях $\mathcal{T}(t)=u$ и $\pi(t-\Delta)=i$ оптимальное решение $\pi(t)=A_{j*}$, если на индексе $j^*=j(u,i)$ реализуется минимум в правой части (8).

Доказательство см. Приложение В.

З а м е ч а н и я : 1) Уравнение (8) относится к уравнениям типа Беллмана в теории оптимального управления [13,14]. Отличие состоит в том, что параметр управления j здесь входит в целевую функцию, а не в матрицу перехода $[P_{uv}]$.

2) Из доказательства утверждения 2 следует, что рекуррентная последовательность (9) приводит к системе функций $S_k=S^{(N-k)}$, $k=0,..,N$. которые являются оптимальными средними дисконтированными потерями в интервалах $(k\Delta,N\Delta)$, $k=0,1,..,N-1$. Соответственно, последовательность индексов $j_k^*(u,i)$, на которых реализуется минимум в (8) с $S=S_k$, определяет последовательность оптимальных решений в Δ-интервалах $(k\Delta,(k+1)\Delta)$ в зависимости от состояний $(\mathcal{T}(t),\pi(t-\Delta))$, $t=k\Delta$.

Важно, что этот алгоритм годится и для оптимизации полных суммарных потерь в интервале $(0,N\Delta)$ при $\theta=1$, т.е. без учета временного фактора $\varkappa$. К сожалению, получаемая прогнозная оптимальная политика для конечного интервала оказывается нестационарной при $[c_{ij}]\neq 0$.

П р и м е р ы

Процесс восстановления. Для прогноза характеристических землетрясений в [2] использована следующая модель: интервалы между событиями независимы и подчинены распределению $F(x)$; прогнозной информацией служит время $\mathcal{T}(t)=u$, прошедшее с момента последнего события. Эта модель, очевидно, удовлетворяет условиям (6,7), причем функция риска

$$r_u = \frac{F(u+\theta)-F(u)}{\Delta(1-F(u))},$$

а матрица перехода $[P_{uv}]$ такова, что из состояния u возможны только два перехода: в $u+\Delta$ с вероятностью $1-r_u\Delta$ (землетрясения не было) и в 0 с вероятностью $r_u\Delta$ (землетрясение произошло). Поэтому уравнение (8) имеет вид

$$S(u,i)= \min_j[c_{ij}+ \beta_j\Delta-\alpha_j r_u\Delta + \theta(S(u+\Delta,j)(1-r_u\Delta)+S(0,j)r_u\Delta)].$$

Циклический пуассоновский процесс. Для описания последовательности катастрофических событий Вир-Джонс [15] использовал модель пуассоновского процесса с периодической функцией интенсивности $\lambda(t)=\lambda(t+T)$. В этой модели прогнозная информация тривиальна: $\mathcal{I}(t)=t(\mathrm{mod}\ T)$, и поэтому условия (6),(7) выполнены. Хотя эта модель нестационарна, утверждение 2 сохраняет силу. Уравнение (8) имеет вид

$$S(u,i)= \min_j[c_{ij}+ \beta_j\Delta-\alpha_j\lambda(u)\Delta + \theta S(u+\Delta,j)].$$

Сюда надо добавить очевидное условие периодичности $S(u,i)=S(u+T,i)$ и $T=N\Delta$.

Несмотря на простоту примеров оптимальный прогноз для них явно получить нельзя, даже в случае тревоги с двумя состояниями при условии, что $[c_{ij}]\neq 0$. Таким образом, введение потерь при смене тревог сильно усложняет задачу оптимизации. В этих условиях задача требует знания не только функции риска r_u, но и матрицы переходных вероятностей для состояния информации $\mathcal{I}(t)$ на соседних интервалах времени. Практическая задача оценивания матрицы $[P_{uv}]$, видимо, сложна и до сих пор не ставилась. Сложность оценивания $[P_{uv}]$ зависит от типа информации $\mathcal{I}(t)$ и детальности квантования фазового пространства состояний $\mathcal{I}(t)$. Анализ работы известных алгоритмов (см.[1,2,16,17]) убеждает автора в том, что с ростом числа предвестников растет не столько качество долгосрочного прогноза, сколько сфера применимости и адаптируемости соответствующего метода. Иначе говоря, достаточно ограничиться малой размерностью фазового пространства информации $\mathcal{I}(t)$.

3. Оптимизация средних потерь в единицу времени

Предельный случай задачи (3) при $\varkappa\to 0$ ($\theta\to 1$) относится к ситуации, когда в качестве целевой функции прогноза рассматриваются суммарные ожидаемые потери, отнесенные к единице времени, т.е. нижний предел вида

$$\gamma_\pi = \liminf_{n\to\infty} E\,\frac{z_1+\ldots+z_n}{n\Delta} \longrightarrow \min_\pi. \qquad (11)$$

С практической точки зрения задача (11) менее интересна. Ее целевой функционал характеризует прогнозную политику на бесконечном интервале времени, тогда как в (3) эффективный интервал прогноза пропорционален $1/\varkappa$. Кроме того, задача (11) сложнее в вычислительном отношении и не обязана иметь стационарного решения. Отчасти это будет видно из дальнейшего анализа. Поэтому анализ задачи (11) представляет больше теоретический интерес.

Пусть ограниченная последовательность чисел z_i имеет среднее:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i \longrightarrow \bar{z}.$$

Тогда, как известно, средневзвешенное

$$\bar{z}_\theta = \sum_{k\geq 0} z_k \theta^k (1-\theta)^{-1}$$

будет иметь тот же предел $\bar{z}$ при $\theta\to 1$. Задачи (11) и (2),(3) имеют сходные целевые функции. Поэтому можно ожидать, что оптимальные потери $S^*_\theta(u,i)$ в задаче (3) будут иметь в "регулярной" ситуации асимптотику вида

$$S^*_\theta(u,i) = \gamma(1-\theta)^{-1}\Delta + h(u,i) + o(1-\theta), \quad \theta\to 1.$$

Подставим ее в (8) и перейдем к пределу при $\theta\to 1$. Тогда получим аналог уравнения (8) при $\theta=1$:

$$\gamma\Delta + h(u,i) = \min_j[c_{ij} + \beta_j\Delta - r_u\Delta\cdot\alpha + \sum_v P_{uv}h(v,j)], \qquad (12а)$$

где

$$\alpha_0=\beta_0=c_{ii}=0.$$

Легко видеть, что решение (γ,h) определяется отсюда с точностью до аддитивной постоянной в h. Нормировка типа

$$h(u_0,0) = 0 \qquad (12б)$$

избавляет уравнение (12а) от неопределенности.

Наряду с (12) удобно рассмотреть более общую задачу, в которой вопросы существования и практического поиска решений менее сложны. А именно, рассмотрим следующую задачу линейного программирования: максимизировать

$$\gamma \Rightarrow \max \qquad (13)$$

при системе линейных ограничений

$$\gamma\Delta + h(u,i) \leq c_{ij} + \beta_j\Delta - r_u\Delta\alpha_j + \sum_v P_{uv}h(v,j), \qquad (14а)$$

$$h(u_0,0) = 0. \qquad (14б)$$

Ограничения (14а) зависят от трех индексов (u,i,j), где j таково, что $c_{ij}<\infty$. Очевидно, что все ограничения вытекают из (12), но не наоборот. В векторном пространстве $\{\gamma, h(u,i), \forall(u,i)\neq(u_0,0)\}$ конечной размерности d ограничения (14) задают выпуклый многогранник K. Решения (13,14) назовем *крайними*, если они являются вершинами K. Вершины K, как и решения (12), обращают не менее d неравенств (14а) в равенства.

У т в е р ж д е н и е 3. Пусть выполнены условия утверждения 2 и процесс $\mathcal{T}(t)$ имеет конечное число состояний.

а) Пусть матрица $[P_{uv}]$ имеет единственный собственный вектор с собственным значением 1 (эргодичность цепи Маркова $\mathcal{T}(t)$) и $c_{i_0 j}<\infty$, $c_{j i_0}<\infty$ для всех j и некоторого i_0. Тогда решение задачи (12), если оно существует, принадлежит смеси (сумма с весами $\rho_\alpha\geq 0$ и $\Sigma\rho_\alpha=1$) крайних решений задачи линейного программирования (13),(14). Последние всегда существуют, число их конечно и они эффективно находятся алгоритмически.

б) Если (γ^*, h^*) - решение задачи (13),(14), то для любой прогнозной политики π справедлива оценка: $\gamma^*\leq\gamma_\pi$.

в) Пусть π^*- политика, объявляющая в условиях $\mathcal{T}(t)=u$ и $\pi(t-\Delta)=i$ тревогу с индексом j(u,i), на котором реализуется минимум правой части (12а) с $h=h^*$, где (γ^*, h^*) - решение задачи (12). Тогда политика π^* стационарна и оптимальна, при этом $\gamma^*=\gamma_{\pi^*}$.

Доказательство: см. приложение C.

З а м е ч а н и я : 1) Из пункта (а) следует, что крайнее решение (13),(14), имеющее среди ограничений (14а) равенства для любой пары индексов (u,i), является решением задачи (12).

2) Уравнения типа (12) иногда тоже удается решать итеративно: $h^{(n+1)}= T_1 h^{(n)}- \gamma_n$, где T_1 оператор, определяемый правой частью (12а), а γ_n - "правильная" нормировка $h^{(n+1)}$, она же служит оценкой γ. С этой точки зрения до конца анализируется случай $[c_{ij}]\equiv 0$. Для него указанный итеративный метод сходится, если только матрица $[P_{uv}]$ имеет единственное собственное значение по модулю равное 1 (случай эргодической цепи Маркова $\mathcal{T}(t)$ с одним подклассом). В остальных случаях сходится регуляризованная процедура:

$$h^{(n+1)}= T_{\theta_n} h^{(n)}-\gamma_n, \qquad \theta_n= 1-(1+n)^{-1},$$

где T_θ - возмущенный оператор, определенный ранее правой частью (8). $\gamma_n\equiv\sum s[r_u]\rho(u)$, $s[r]$ см. в (5), а ρ_u- стационарное распределение цепи Маркова: $\sum\rho_u P_{uv}=\rho_v$.

Отметим, что в ряде случаев могут существовать и прямые методы решения задачи (11) [12].

Заключение

Развитые методы среднесрочного прогноза [1] на сегодняшний день решают, скорее, научную задачу: возможен ли прогноз вообще. Поэтому чаще эти методы сводятся к простейшей тревоге с двумя состояниями и характеризуются ошибками $(\mathring{n}, \mathring{\tau})$. Разумеется, этого недостаточно для сравнения алгоритмов; необходимы кривые ошибок $(\mathring{n}, \mathring{\tau})_\theta$, полученные перебором наиболее существенных внутренних параметров алгоритма, которые условно обозначены здесь символом θ (см. подробнее [5,6]). Одновременно кривые $(\mathring{n}, \mathring{\tau})_\theta$ служат оценками диаграммы ошибок Г для того типа информации, на котором основаны алгоритмы. Диаграмма Г характеризует предельную прогностическую способность используемой информации. Поэтому характеризация алгоритмов кривыми $(\mathring{n}, \mathring{\tau})_\theta$ важна как практически, так и теоретически.

Предпринятое здесь изучение прогноза в целом указывает на необходимость статистического оценивания функции риска r_u и матрицы вероятностей перехода $[P_{uv}]$ для состояний информации на соседних интервалах времени. Заметим, что функция риска выступает не как функция времени, а как функция состояния информации $\mathcal{I}(t)=u$. Такого рода статистика пока собрана для отдельных простейших предвестников. Оценки r_u по комплексу предвестников [16] пока очень грубы, поскольку они игнорируют условную зависимость предвестников относительно будущего события. В этом смысле алгоритмы типа КН [1] с двухфазной тревогой выглядят предпочтительнее: ценой потери градаций риска они обладают большей устойчивостью.

Использование матрицы $[P_{uv}]$ предполагает жесткий отбор наиболее информативных предвестников и экономную дискретизацию их фазового пространства. По-видимому, это реальная задача в долгосрочном прогнозе. Сравнительный анализ алгоритмов [1,2] и [17] убеждает в том, что с ростом числа предвестников растет не столько качество прогноза, сколько "география" устойчивого применения того или иного метода. С другой стороны, долгосрочный прогноз эффективно использует довольно узкий диапазон предвестников: энергетические (параметр b, критерий Журкова и т.п.) и явления типа затишья-активизации.

Заметим, что не всякая задача требует знания матрицы $[P_{uv}]$. Поэтому полезен диалог геофизиков и экономистов для обсуждения типовых задач прогноза. В противном необходим существенный прогресс в физическом прогнозе.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

А. Доказательство утверждения 1

Пусть $\pi(t)=A_j$, тогда потери от прогноза в интервале $(t,t+\Delta)$ имеют вид

$$z_t = \beta_j\Delta - \alpha_j n(t),$$

где $n(t)=0$ или 1. Решение $\pi(t)$ измеримо относительно $\mathcal{T}(t)$, поэтому условное среднее

$$E(z_t|\mathcal{T}(t)) = \sum_j(\beta_j\Delta-\alpha_j r(t)\Delta)[\pi(t)=A_j] \geq s(r(t))\Delta, \qquad (A1)$$

где

$$s(r) = \min_j(\beta_j-\alpha_j r).$$

Здесь $[C]=1$, если высказывание C верно, и 0 - в противном случае.

Равенство в оценке (A1) достигается на решении $\pi^*(t)$, описанном в (4),(5). Усредняя (A1), имеем

$$E[E(z_t|\mathcal{T}(t))] = Ez_t \geq Es(r(t))\Delta.$$

Полученное неравенство, очевидно, превращается в равенство на решении (4),(5). Указанное оптимальное решение $\pi^*(t)$ в интервале $(t, t+\Delta)$ не влияет на потери в других интервалах, поскольку по предположению $\pi(t)$ зависит только от $\mathcal{T}(t)$. Поэтому суммарные средние взвешенные потери (3) в $(0,\infty)$ или те же потери с равными весами в $(0,N\Delta)$ будут минимальными, если каждое решение $\pi(t)$ локально оптимально. Утверждение доказано.

Б. Доказательство утверждения 2

Пусть $Z(t)$ - дисконтированные потери в интервале (t,∞):

$$Z(t) = \sum_{k\geq 0} z_{t+k\Delta}\,\theta^k = z_t + \theta\, Z(t+\Delta). \qquad (Б1)$$

Потери z_t в интервале $(t,t+\Delta)=\delta$ складываются из потерь c_{ij}, если происходит смена тревог $A_i \to A_j$, потерь $\beta_j\Delta$, идущих на поддержание тревоги, и предотвращенных потерь со знаком минус α_j, если в интервале δ происходит сильное событие. Поэтому

$$|z_t| < \max_{ij:c_{ij}<\infty} |c_{ij}+\beta_j\Delta+\alpha_j| = L$$

и, следовательно,

$$|Z(t)| < L/(1-\theta).$$

Условные средние потери z_t при условии $\mathcal{T}(t)=u$, $\pi(t-\Delta)=i$ и решении $\pi(t)=j$ имеют вид

$$c_{ij}+\beta_j\Delta-\alpha_j E\{n(t)\,|\,\mathcal{J}(t)=u,\pi(t)=j,\pi(t-\Delta)=i\}.$$

В силу М-свойства (7)

$$E\{n(t)\,|\,\mathcal{J}(t)\}=E\{n(t)\,|\,\mathfrak{F}_t\}=E\{n(t)\,|\,\mathfrak{F}_t,\mathfrak{U}_t\}, \qquad (Б2)$$

где $\mathfrak{F}_t=\{\mathcal{J}(s),s\le t\}$ - прошлое процесса $\mathcal{J}(t)$, а $\mathfrak{U}_t$- прошлое дополнительных экспериментов $\{\mathfrak{U}(s),s\le t\}$, участвовавших при вынесении решений $\{\pi(s),s\le t\}$. Алгебра событий $\mathcal{B}_t$, порожденная $\mathcal{J}(t),\pi(t),\pi(t-\Delta)$, содержит события $\{\mathcal{J}(t)\}$ и содержится в алгебре, порожденной $\mathfrak{F}_t$ и $\mathfrak{U}_t$. Поэтому из (Б2) следует

$$E\{n(t)\,|\,\mathcal{B}_t\}=E\{n(t)\,|\,\mathcal{J}(t)\}$$

и, значит,

$$E\{z_t\,|\,\mathcal{J}(t)=u,\pi(t-\Delta)=i,\pi(t)=j\}=c_{ij}+\beta_j\Delta-r_u\Delta\alpha_j, \qquad (Б3)$$

где r_u - функция риска, определенная в (1).
Аналогично

$$E\{Z(t+\Delta)\,|\,\mathcal{J}(t),\pi(t-\Delta),\pi(t)\}=$$

$$=E[E\{Z(t+\Delta)\,|\,\mathcal{J}(t+\Delta),\pi(t),\mathcal{J}(t),\pi(t-\Delta)\}\,|\,\mathcal{B}_t]. \qquad (Б4)$$

В силу М-свойства

$$E\{Z(t+\Delta)\,|\,\mathfrak{F}_{t+\Delta},\mathfrak{U}_{t+\Delta}\}=E\{Z(t+\Delta)\,|\,\mathcal{J}(t+\Delta),\pi(t)\}.$$

Поэтому равенство (Б4) можно продолжить:

$$(Б4)=E[E\{Z(t+\Delta)\,|\,\mathcal{J}(t+\Delta),\pi(t)\}\,|\,\mathcal{B}_t]. \qquad (Б5)$$

Пусть

$$S_k(u,i)=E\{Z(k\Delta)\,|\,\pi((k-1)\Delta)=i,\mathcal{J}(k\Delta)=u\}\ -$$

оптимальные средние дисконтированные потери в интервале $(k\Delta,\infty)$ с начальными условиями (u,i). Учитывая (Б1,Б3-Б5), S_k и S_{k+1} должны быть связаны соотношением

$$S_k(u,i)=\min_j(c_{ij}+\beta_j\Delta-r_u\Delta\alpha_j+\theta\sum_v P_{uv}S_{k+1}(v,j)). \qquad (Б6)$$

Выражение в скобках определяет средние дисконтированные потери в интервале $(k\Delta,\infty)$ при начальных условиях (u,i) и решении $\pi_{k\Delta}=j$. Потери в $(k\Delta,\infty)$ будут минимальными, если они минимальны в $((k+1)\Delta,\infty)$ при любых начальных условиях $\mathcal{J}((k+1)\Delta)=v$, $\pi_{k\Delta}=j$, а решение $\pi_{k\Delta}=j$ на первом шаге приводило бы нас к минимальным средним потерям в целом. Этот принцип Беллмана и выражает уравнение (Б6).

Запишем (Б6) в операторной форме: $S_k=T_\theta S_{k+1}$. Оператор T_θ обладает следующими свойствами:

а) T_θ отображает пространство B в себя, где

$$B = \{f(u,i):\ |f| \le L(1-\theta)^{-1},\ \|f\| = \sup|f|\};$$

б) оператор T_θ сжимающий:

$$\|T_\theta f_1 - T_\theta f_2\| \le \theta\|f_1 - f_2\|, \quad f_i \in B.$$

Первое свойство следует из (Б6):

$$|T_\theta f| < L + \theta\|f\| \le L + \theta L(1-\theta)^{-1} = L(1-\theta)^{-1},$$

а второе - из определения T_θ и неравенства:

$$|\min_{1\le i\le n} x_i - \min_{1\le i\le n} y_i| < \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|.$$

Неравенство легко проверяется для n=2. Из него вытекает общий случай:

$$|\min_i x_i - \min_i y_i| = |x_\alpha - y_\beta| = |\min_{\alpha,\beta} x_i - \min_{\alpha,\beta} y_i| \le \max_{\alpha,\beta}|x_i - y_i| \le \max_i |x_i - y_i|.$$

Пространство B замкнуто, если множество состояний $\mathcal{I}(t)$ дискретно. Поэтому свойства (а,б) оператора T_θ позволяют утверждать, что он имеет неподвижную точку в B: $T_\theta S^* = S^*$ [18]. Она единственная и может быть найдена итерациями, причем

$$|T_\theta^n S - S^*| < \theta^n(1-\theta)^{-1}\|T_\theta S - S\|, \qquad (Б7)$$

где S - любое начальное приближение. Положим S=0. Тогда получим пункт "в" утверждения 2.

Пусть $S_\pi(u,i)$ - дисконтированные средние потери в $(0,\infty)$, связанные с некоторой политикой π. Тогда $S_\pi(u,i) \ge S^*(u,i)$.

Действительно, пусть π_n - часть политики π на отрезке $(n\Delta,\infty)$. В силу (Б7) выберем $n=n(\varepsilon)$ таким, чтобы

$$|T_\theta^n S_{\pi_n} - S^*| < \varepsilon.$$

Из определения T_θ следует $T_\theta^n S_{\pi_n} \le S_\pi$. Поэтому

$$S^* - \varepsilon \le T_\theta^n S_{\pi_n} \le S_\pi.$$

В силу произвольности ε имеем $S^* \le S_\pi$. Пункт "б" доказан.

На основе S^* можно рассмотреть стационарную политику π^*, которая в условиях $\mathcal{I}(t)=u$, $\pi(t-\Delta)=i$ приводит к решению $\pi^*(t)=A_{j^*}$, где $j^*=j(u,i)$ - индекс, на котором достигается минимум функции

$$\varphi(j) = c_{ij} + \beta_j\Delta - r_u\Delta\alpha_j + \theta\sum_v P_{uv}S^*(v,j).$$

Если аргумент j определен неоднозначно, то его можно разыграть с некоторым распределением вероятностей $P_{ui}(\cdot)$ на множестве этих j^*. Если политике π^* отвечают средние потери $S(u,i)$ в $(0,\infty)$, то учитывая ее стационарность, будем иметь

$$S(u,i) \le z(j^*|u,i) + \theta \sum_v P_{uv} S(v,j^*),$$

где $z(j^*|u,i)$ - ожидаемые потери в Δ-интервале, (см.Б3 с $j=j^*$).Для $S^*(u,i)$ это неравенство превращается в равенство. Вычитая одно из другого, получим

$$0 < S(u,i) - S^*(u,i) \le \theta \sum_v P_{uv} (S(v,j^*) - S^*(v,j^*)).$$

Отсюда $|S-S^*| \le \theta \|S-S^*\|$. Это ведет к равенству $S=S^*$. Пункты (а,г) доказаны.

В. Доказательство утверждения 3

Покажем, что задача линейного программирования (13),(14) разрешима. Система неравенств (14), очевидно, совместна. Чтобы убедиться в этом, достаточно положить $h \equiv 0$ и взять $\gamma \le -\max_j \alpha_j$. Остается убедиться, что система неравенств (14) ограничивает координату γ сверху.

Из стационарности потока информации $\mathcal{I}(t)$ следует существование стационарного распределения $\rho(u)$ на пространстве состояний $\mathcal{I}(t)$:

$$\sum_u \rho(u)\, P_{uv} = \rho(v), \qquad \rho(u) > 0, \ \sum_u \rho(u) = 1. \tag{B1}$$

Усредним подсистему неравенств (14) с весами $\{\rho(u)\}$ при фиксированных (i,j):

$$\gamma + H(i) \le c_{ij} + \beta_j \Delta - \lambda \Delta \alpha_j + H(j), \qquad c_{ij} < \infty,$$

где

$$H(i) = \sum_u \rho(u) h(u,i),$$

$$\lambda \Delta = \sum_u \rho(u) r_u = \Pr\{n(t) > 0\}.$$

Полагая $i=j=0$, получаем $\gamma \le 0$, что и требовалось доказать.

Согласно [19], общее решение задачи линейного программирования применительно к ситуации (13),(14), имеет вид

$$\sum \lambda_\mu X_\mu + \alpha Y + \beta W, \qquad \lambda_\mu \ge 0, \ \sum \lambda_\mu = 1, \ \alpha \ge 0, \ |\beta| < \infty,$$

где X_μ - крайние решения задачи (13),(14), Y - некоторое решение однородной системы неравенств (14) с $\gamma=0$.

$$h(u,i) \le \sum_v P_{uv} h(v,j), \qquad c_{ij} < \infty, \tag{B2}$$

а W - решение типа Y, которое обращает все неравенства (B2) в равенства. Покажем, что в условиях пункта "а" Y=W=0.

Действительно, усредним (B2) с весами $\rho(u)$. Тогда, как и выше, получим

$$H(i) \le H(j), \quad c_{ij} < \infty. \tag{B3}$$

Допустим, что при некоторых i=j неравенство (B2) строгое. Тогда неравенство (B3) тоже будет строгим при тех же i=j, что невозможно. Значит векторы $h_i = \{h(u,i)\}$ являются собственными для матрицы $[P_{uv}]$ с собственным значением 1. В силу допущений пункта "а" $h_i = b_i(1,\dots,1)$. Но тогда из (B3) получим: $b_i \le b_j$, $c_{ij} < \infty$. Если $c_{i_0 j} < \infty$, j=1,...,n, то $b_i \le b_{i_0}$ и $b_{i_0} \le b_i$, т.е. b_i=const. Но в силу (14б) $h(u_0,0)=0$. Значит $b_i=0$. Пункт "а" утверждения 3 доказан.

Подставим реализацию любого прогноза $\pi(t)$ в (14), полагая $u=\mathcal{T}(t)$, $i=\pi(t-\Delta)$ и $j=\pi(t)$. Имеем

$$\gamma + h(\mathcal{T}(t),\pi(t-\Delta)) \le \bar{z}_t + E\{h(\mathcal{T}(t+\Delta),\pi(t)) | \mathcal{T}(t),\pi(t)\},$$

где

$$\bar{z}_t = c_{ij} + \beta_i\Delta - r_u\Delta\alpha_j = E\{z_t | \mathcal{T}(t),\pi(t),\pi(t-\Delta)\},$$

$$\sum_v P_{uv} h(v,j) = E\{h(\mathcal{T}(t+\Delta),\pi(t)) | \mathcal{T}(t)=u,\pi(t)=j\}.$$

Здесь использована запись (14а) в терминах условных средних. Применим символ математического ожидания к обеим частям полученного неравенства. Тогда условные средние перейдут в безусловные и поэтому будем иметь

$$\gamma + \bar{h}_t \le Ez_t + \bar{h}_{t+\Delta}, \tag{B4}$$

где

$$\bar{h}_t = Eh(\mathcal{T}(t),\pi(t-\Delta)).$$

Складывая неравенства (B4) по $t=k\Delta$, получим

$$n\gamma + \bar{h}_0 \le E(z_0+\dots+z_{n\Delta}) + \bar{h}_{(n+1)\Delta}.$$

После деления на (n+1) здесь можно перейти к пределу. Для ограниченных h величины $\bar{h}$ ограничены и, следовательно, будем иметь

$$\gamma \le \gamma_\pi = \liminf_{n\to\infty} E(z_0+\dots+z_{(n-1)\Delta})/n.$$

Здесь γ - любая координата конечной точки многогранника K. Наилучшую оценку γ_π снизу дает решение задачи линейного программирования (13),(14):

$$\gamma^* = \sup_K \gamma \le \gamma_\pi.$$

Пункт "б" доказан. В этом пункте использованы идеи из [14].

Пусть π^* - политика, определенная в пункте "в" утверждения 3. Для нее неравенство (B4) и все связанные с ним являются равенствами, если (γ, h) - решение уравнения (12). Но тогда

$$\gamma = \gamma_{\pi^*} \geq \gamma^*.$$

С другой стороны, (γ, h) - вершина K, т.е. $\gamma \leq \gamma^*$. Значит $\gamma = \gamma^*$. Следовательно, решение уравнения (12) является решением задачи (13), (14), а политика π^* является оптимальной. Доказательство закончено.

Литература

1. Долгосрочный прогноз землетрясений (Метод. реком.) / Под ред. М.А.Садовского. М.: ИФЗ АН СССР, 1986. 128с.
2. *Nishenko S.P.* Circum-Pacific earthquake potential: 1989-1999, USGS. Open-file report 89-86. 1989. 126p.
3. *Aki K.* Ideal probabilistic earthquake prediction // Tectonophysics. 1989. Vol.169. P.197-198.
4. *Канторович Л.В., Кейлис-Борок В.И.* Экономика прогноза землетрясений// Тр.конф.ЮНЕСКО по сейсмическому риску. Париж, 1977. 21с.
5. *Molchan G.M.* Strategies in strong earthquake prediction // Phys. Earth and Planet. Inter. 1990. Vol.61, N 1-2. P.84-98.
6. *Молчан Г.М.* Структура оптимальных стратегий в прогнозе землетрясений // Современные методы обработки сейсмических данных. М.: Наука, 1991. С.3-19. (Вычисл.сейсмология; вып.24).
7. *Молчан Г.М.* Модели оптимизации прогноза землетрясений // ДАН СССР. 1991. Т.137, N1. С.77-81.
8. *Гусев А.А.* Землетрясения-индикаторы и прогноз // Сейсмичность и глубинное строение Сибири и Дальнего Востока. Новосибирск: Наука, 1976. С.241-247.
9. *De Yi Feng, Jing Ping Gu, Ming Zhou Lin, Shao Xie Xu, Hue Jun Yu.* Assessment of earthquake hazard by simultaneous use of the statistical method and the method of fuzzy mathematics // PAGEOPH, 1984/85. Vol.126, N6. P.982-997.
10. *Lindgren G.* Optimal prediction of level crossing in Gaussian processes and sequences // Ann. Probab. 1985. Vol.13. P.804-824.
11. *Ellis S.P.* An optimal statistical decision rule for calling earthquake alerts // Earthquake Prediction Research. 1985. Vol.3. P.1-10.
12. *Molchan G.M., Kagan Y.Y.* Earthquake prediction and its optimization // J.Geophys. Res. 1991, 000, p.00-00.
13. *Howard R.A.* Dynamic programming and Markov processes. N.-Y., 1960. 136p.
14. *Ross M.* Applied probability models with optimization applications. San Francisco: 1970. 198p.
15. *Vere-Jones D.* Earthquake prediction - a statistician's view // J. Phys. Earth. 1978. Vol.26. P.129-146.

16. *Sobolev G.A., Chelidze T.L., Zavyalov A.D., Slavina L.B., Nicoladze V.E.* Maps of expected earthquakes based on combination of parameters// Tectonophysics. 1991. Vol.193, N4. P.255-265.

17. *Наркунская Р.С., Шнирман М.Г.* Об одном алгоритме прогноза землетрясений // Компьютерный анализ геофизических полей. М.:Наука. 1990. С.27-37.(Вычисл. сейсмология: вып.23).

18. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Госиздат Ф.М. Лит., 1959. 683с.

19. *Булавский В.А. Звягина Р.А. Яковлева М.А.* Численные методы линейного программирования. М.: Наука, 1977. 367с.

УДК 550.31

И.А. Воробьева, Т.А. Левшина

ПРОГНОЗ ПОВТОРНОГО СИЛЬНОГО ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ ПО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ АФТЕРШОКОВ

I.A.Vorobieva, T.A. Levshina

PREDICTION OF THE REOCCURRENCE STRONG SHOCK USING THE AFTERSHOCK SEQUENCE

The problem is formulated to recognize strongest earthquakes aftershock sequences which can contain strong aftershocks. The recognition is based on seismic activity data in the focal zone of a strong shock. Functions characterizing the seismic process were found using California earthquake catalog. The material for the recognition was represented by 17 aftershock sequences. The application of the preliminary solution rule resulted in 1 error. The algorithm was tested on independent data of 8 seismoactive regions of the world without additional data fitting. The results of the test can be considered as satisfactory, because errors do not exceed 15%. The statistical significance of the obtained result is 96%. Two successful advance predictions were done.

Введение. Многие сильные землетрясения возникают "парами", т.е. близко друг к другу в пространстве и времени. Здесь исследуется возможность прогноза второго сильного землетрясения в паре. Оно может быть афтершоком первого в обычном смысле слова или новым основным толчком. Проблема возникает после каждого сильного землетрясения в населенном районе и рассматривалась в ряде работ [1-7].

Бот [1] предложил для магнитуды M_1 сильнейшего афтершока соотношение $M_1 \simeq M-1,2$, где M - магнитуда основного толчка. Однако ста-