

4. *Reasenberg P.A., Jones L.M.* Earthquake hazard after a main-shock in California// *Science*. 1989. Vol.243. P.1173-1176.
5. *Matsu'ura R.S.* Precursory quiescence and recovery of after-shock activities before some large aftershocks// *Bull. Earth. Res. Inst. University of Tokyo*. 1986. Vol.61. P.1-65.
6. *Шрейдер С.Ю.* Определение сейсмических затиший в терминах временных интервалов между событиями// *Компьютерный анализ геофизических полей*. М.: Наука, 1990. С.37-57. (Вычисл. сейсмология; Вып. 23).
7. *Haberman R.E., Creamer F.H.* Prediction of large aftershocks on the basis of quiescence. The 7th US - Japan seminar on earthquake prediction. 1990. Vol.1. P.93-96.
8. *Кейлис-Борок В.И., Кнопов Л., Ротвайн И.М.* Долгосрочные сейсмологические предвестники сильных землетрясений в Калифорнии - Сьерра - Неваде, Новой Зеландии, Японии и Аляске// *Методы и алгоритмы интерпретации сейсмологических данных*. М.: Наука, 1980. С.3-11. (Вычисл. сейсмология; Вып. 13).
9. *Аллен К.А., Кейлис-Борок В.И., Ротвайн И.М., Хаттен К.* Комплекс долгосрочных сейсмологических предвестников (Калифорния и некоторые другие регионы)// *Математические методы в сейсмологии и геодинамике*. М.: Наука, 1986. С.23-37. (Вычисл. сейсмология; Вып. 19).
10. *Кейлис-Борок В.И., Кособоков В.Г.* Периоды повышенной вероятности возникновения для сильных землетрясений мира// *Математические методы в сейсмологии и геодинамике*. М.: Наука, 1986. С.48-58. (Вычисл. сейсмология; Вып. 19).
11. *Tsuboi C.* Earthquake energy, earthquake volume, aftershock area, and strength of earth's crust// *J. Phys. Earth*. 1956. Vol.4. P.63-69.
12. World hypocenters data file. USGS-NEIS, Boulder, Colorado.
13. Southern California hypocenters data file. CIT-USGS, Pasadena, Calif.
14. Northern California hypocenters data file. Berkley, Calif.
15. *Кейлис-Борок В.И., Кособоков В.Г.* Периоды повышенной вероятности возникновения сильнейших землетрясений мира// *Достижения и проблемы современной геофизики*. М.: Наука, 1984. С.48-57.

УДК 550.34.013

Е.М.Блантер, М.Г.Шнирман

О "МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОМ" ПОДХОДЕ К ВОПРОСУ КЛАСТЕРИЗАЦИИ ЭПИЦЕНТРОВ

E.M.Blanter, M.G.Shnirman

A "MULTIFRACTAL" APPROACH TO THE EPICENTER CLUSTERIZATION

We study clusterisation properties of real and modeled flows of seismic events. The distribution of clusters by number of events is investigated in terms of multifractal technology. It is shown

that clusterization parameters of real seismic flows can be well approximated by the relevant parameters of multifractal seismic flow models.

Целью настоящей работы является демонстрация возможностей современной мультифрактальной "технологии" для изучения кластеризационных свойств как модельных, так и реальных точечных полей. В п.1 рассматривается возможность изучения кластеризации сейсмического потока на основе мультифрактальной идеологии, даются необходимые определения. В п.2 суммируются результаты счета для реальных и модельных каталогов эпицентров землетрясений. В п.3 - то же для потока времен.

1. Высокая степень гетерогенности поля сейсмичности общеизвестна. Она порождает необходимость создания аппарата, позволяющего правильно и компактно отражать конкретные особенности пространственной и временной гетерогенности. В последние годы был предпринят ряд попыток в этом направлении, основанных на идеологии фрактальных множеств (см., например, [1]). Фрактал - это множество, объем покрытия которого некоторыми элементами (кругами, квадратами и т.п.) стремится к нулю как l_0^γ при измельчении масштаба покрытия l_0 (γ - константа). Стандартным объектом изучения в этом случае является величина $d=D-\gamma$, где D - размерность пространства, на котором задано множество. Величину D принято называть фрактальной размерностью. Очевидно, что для обычных множеств $\gamma=0$ и $D=d$. Сейсмический поток представляется в [1] как равномерное распределение на фрактале.

Однако различные сейсмичные зоны активны явно не одинаково, и в связи с этим в [2] предложено исследовать гетерогенность сейсмического поля, опираясь на концепцию мультифракталов [3]. На эвристическом уровне мультифрактал - это смесь фракталов с разными фрактальными размерностями. Более формально, следуя [2], можно поступить таким образом. Рассматриваемая область $D \subseteq r^n$ делится на непересекающиеся кубики со стороной r . Путем перенормировки объем D делается равным 1. Пусть имеется вероятностная мера μ , которая на i -й ячейке принимает значение $p_i(r)$ (например, если рассматривается область очагов землетрясений, то $p_i(r)$ - вероятность попадания эпицентра в i -ю ячейку). Тогда обобщенная q -энтропия Реньи составит следующим образом:

$$\ln I_q(r) = \begin{cases} \frac{\ln \sum p_i^q(r)}{1-q}, & q \neq 1, \\ -\sum p_i(r) \ln(p_i(r)), & q = 1 \end{cases} \quad (1)$$

причем суммирование ведется по всем ячейкам с ненулевой вероятностью. Тогда обобщенная размерность $D(q)$ меры μ определяется равенством

$$D(q) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln I_q(r)}{\ln(1/r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(\sum p_i^q(r))}{(1-q) \ln(1/r)}. \quad (2)$$

При $q=0$ $D(0)$ совпадает с фрактальной размерностью множества точек, являющегося носителем меры μ . Таким образом, $D(q)$ является естественным обобщением понятия фрактальной размерности.

Очевидно, что в случае землетрясений $p(r)$ равно $[N_i(r)]/N$, где N - полное число землетрясений в каталоге, а $N_i(r)$ - число землетрясений в i -й ячейке.

Дробление пространства на ячейки, очевидно, не единственный способ разбиения точек сейсмического поля на кластеры. В этом случае все точки одного кластера находятся на расстоянии меньшем или равном r , при этом совершенно не ясно, не дробят ли границы ячеек достаточно тесные скопления точек.

В этой работе мы предлагаем иной способ объединения точек потока в кластеры, менее жесткий и более связанный с самим потоком. Объектом рассмотрения будут функции $D(q)$, сосчитанные для случая, когда $N_i(r)$ - число точек в кластерах иной природы, чем в [2], и поэтому нашу работу нельзя причислить к работам по мультифракталам в точном смысле.

Будем считать, что точка x входит в кластер K , если она находится на расстоянии меньшем или равном r хотя бы от одной точки y , принадлежащей K : тогда для каждого r множество эпицентров разделится на непересекающиеся кластеры (r - радиус кластеризации).

Для характеристики распределения эпицентров по кластерам использовалась функция $D(q, r)$, построенная по аналогии с функцией D_q в работе [2]:

$$D(q, r) = \frac{\log \sum p_i^q}{\log(N_{c1})(1-q)}, \quad \text{где } p_i = \frac{N_i}{N}. \quad (3)$$

Здесь N_i - число точек в i -м кластере; N - общее число точек; N_{c1} - число образовавшихся кластеров; r - радиус кластеризации. $\log(N_{c1})$ - аналог $\ln(1/r)$ в формуле (2), так как кластеры у нас являются

аналогами ячеек в "стандартном" мультифрактальном описании, а число ячеек пропорционально $1/r^2$.

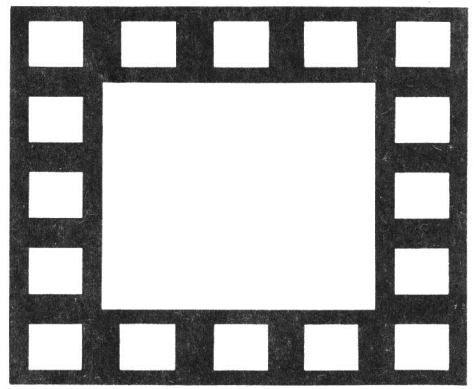
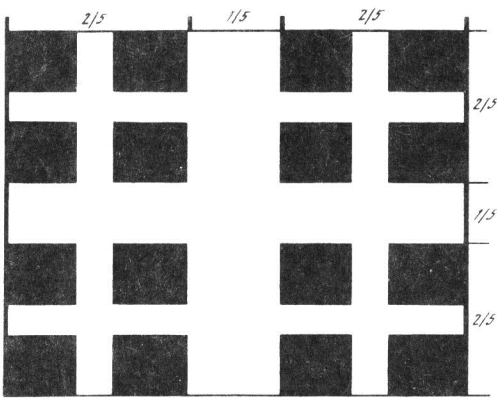
2. В настоящей работе мы исследуем кластеризацию множества эпицентров региона Южной Калифорнии, опираясь на технологию, разработанную в теории мультифракталов.

Рассмотрены землетрясения, входящие в каталог Южной Калифорнии за период с мая 1983 г. по апрель 1985 г. Выбор именно этого каталога связан с его высокой представительностью (в него включены все события с $M \geq 2,0$). Выбранный интервал времени мы разделили на пять периодов таким образом, чтобы количество событий за каждый период было равно 1000. Кроме полученных таким образом пяти подкаталогов рассмотрена также выборка из каталога основных толчков Южной Калифорнии, соответствующую данному периоду времени. Для каждого из пяти тысяч событий мы получили статистики кластеров для различных радиусов, из которых видно, что для исследования динамики кластеров интересны радиусы, лежащие в пределах от 7 до 40 км. Радиусы меньше 7 км не рассматриваются в связи с точностью определения координат эпицентров, а на радиусах больше 40 км образуется один большой кластер, поэтому столь большие радиусы для нашей задачи неприменимы.

Одновременно с реальными каталогами мы исследовали модельные каталоги, в которых точки равномерно распределены по классическим фрактальным объектам: плоскости, кладбищу Серпинского и ковру Серпинского. Общая площадь и количество точек в модельных каталогах определяются соответствующими параметрами реального каталога.

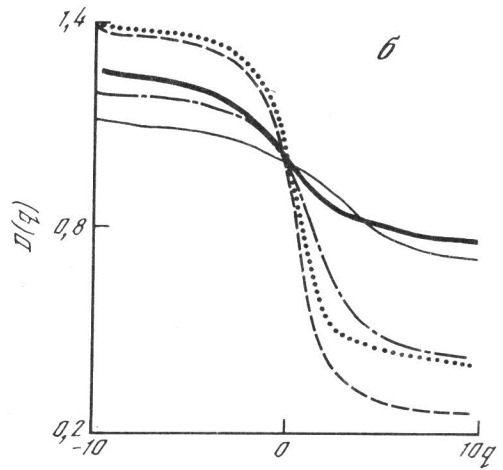
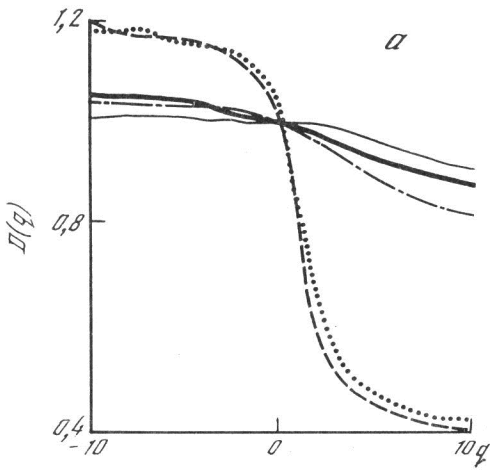
Кладбище Серпинского строится следующим образом. На каждой следующей итерации стороны прямоугольника делятся на 5 частей, центральный крест выкидывается (рис.1,а.). Ковёр Серпинского строится аналогично, но выкидывается центральный прямоугольник, состоящий из 9 маленьких (рис.1,б.). Таким образом, фрактальные размерности ковра и кладбища Серпинского совпадают.

Графики функций $D(q,r)|_{r=const}$ для модельных каталогов существенно отличаются на малых радиусах от соответствующего графика $D(q,r)|_{r=const}$ реального каталога (рис.2,а,б и 3,а,б). На $r=40$ км графики для двух моделей и реального каталога близки (см.рис. 2,в: 3,в), что связано с образованием одного достаточно большого кластера, который и определяет поведение функции $D(q,r)|_{r=40}$. То, что график для кладбища Серпинского отличается от остальных, видимо, происходит из-за того, что точки в этой модели распределяются по несвязному множеству. Это отличие хорошо видно на рис. $D(10,r)$

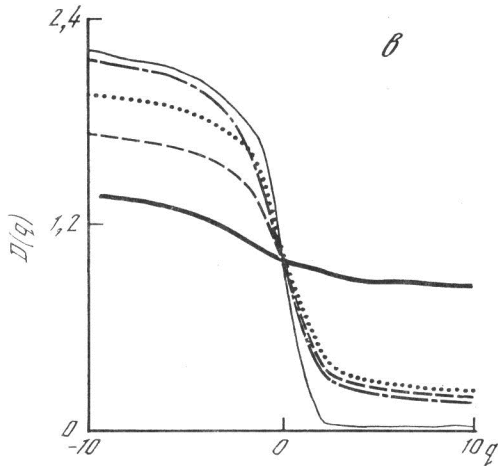


Р и с. 1. Фрактальные объекты

а - кладбище Серпинского; б - ковер Серпинского

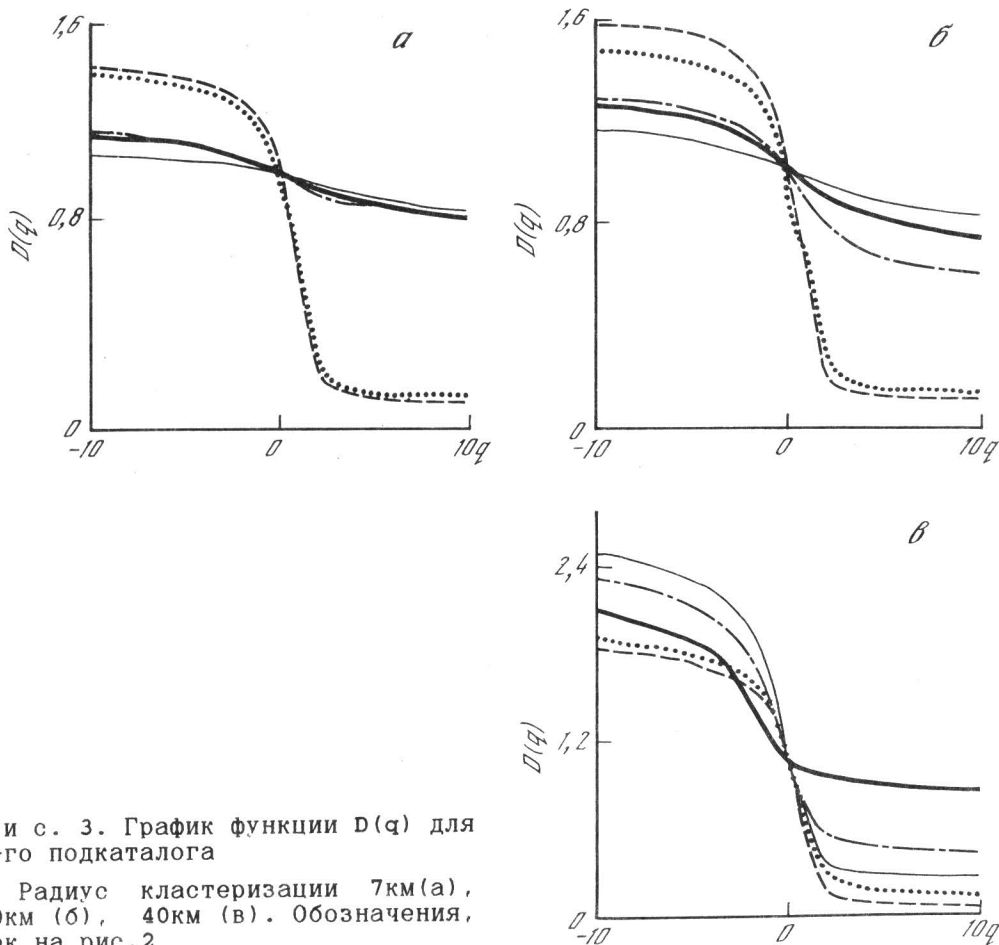


- 1
- 2
- 3
- 4
- 5



Р и с. 2. График функции $D(q)$ для 4-го подкаталога

Радиус кластеризации равен 7км (а), 20км (б), 40км (в); 1 - реальный каталог; 2 - равномерно распределенная модель; 3, 4 - фрактальные модели, распределенные на кладбище и ковре Серпинского соответственно; 5 - "мультифрактальная" модель

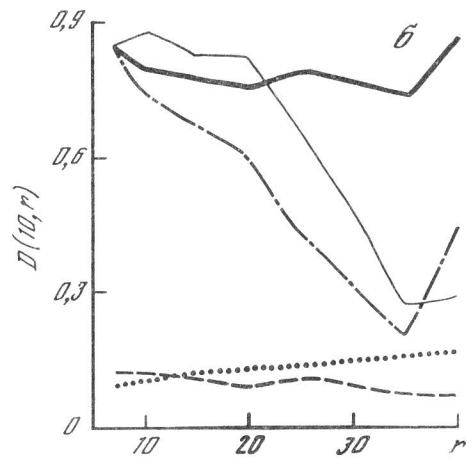
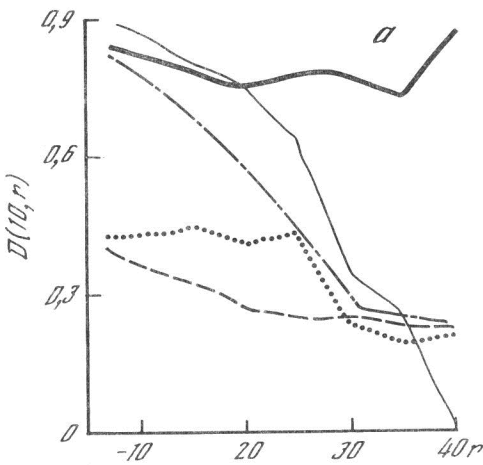


Р и с. 3. График функции $D(q)$ для 5-го подкаталога

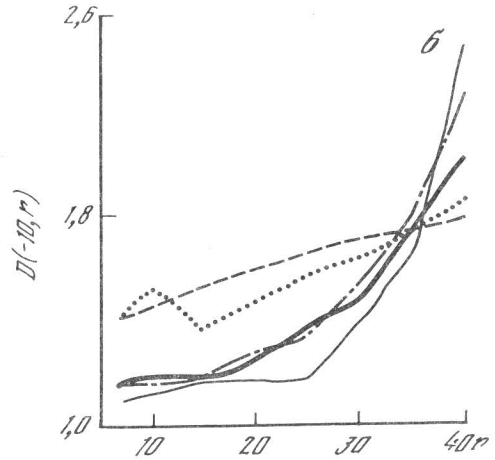
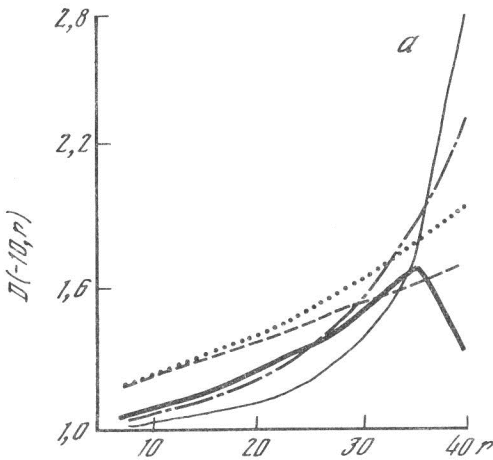
Радиус кластеризации 7км(а), 20км(б), 40км(в). Обозначения, как на рис.2

(рис.4, а, б), где график, соответствующий кладбищу Серпинского, близок к константе.

Ввиду большого отличия модельных каталогов от реального (см. рис. 4,5), мы рассмотрели простейшую "мультифрактальную" модель. Каждая сторона исходного прямоугольника делится пополам, и в четыре полученных прямоугольника точки попадают с вероятностями p_1, p_2, p_3, p_4 ($\sum p_i = 1$). На следующей итерации вероятности p_i случайно перемешиваются и в четыре прямоугольника следующей итерации точки попадают с вероятностями $p_{\pi(1)}, p_{\pi(2)}, p_{\pi(3)}, p_{\pi(4)}$, где π - перестановка чисел $\{1, 2, 3, 4\}$. Вероятности p_i выбирались таким образом, чтобы на минимальном радиусе 7 км график $D(q,r)|_{r=\text{const}}$ для реального каталога в своих крайних точках $q=10$ и $q=-10$ лежал бы в пределах $D(q,r) \pm \sigma(q,r)$, где $D(q,r)$ - график функции $D(q,r)$, усредненной по реализациям, а σ - корень из дисперсии. Таким образом,



Р и с. 4. Зависимость $D(10)$ от радиуса кластеризации для 4-го (а) и 5-го (б) подкаталогов. Обозначения, как на рис.2



Р и с. 5. Зависимость $D(-10)$ от радиуса кластеризации для 4-го (а) и 5-го (б) подкаталогов. Обозначения, как на рис.2

мы подгоняем три параметра по двум значениям. Чтобы избежать неопределенности, две из трех определяемых вероятностей считались равными (например, $p_1 = p_2$). Такая подгонка оказалась возможной, причем графики $D(q, r)|_{r=\text{const}}$ оказались близкими не только в крайних точках, но и на всем протяжении (рис.2, а; 3, а.). Кроме того график $D(q, r)|_{r=\text{const}}$ полученной мультифрактальной модели близок к $D(q, r)|_{r=\text{const}}$ для реального каталога и на остальных радиусах (рис.2, б. 3, б.). Графики $D(q, r)|_{q=-10, 10}$ (см. рис.4, 5) показывают,

что мультифрактальная модель относительно хорошо приближает реальный каталог.

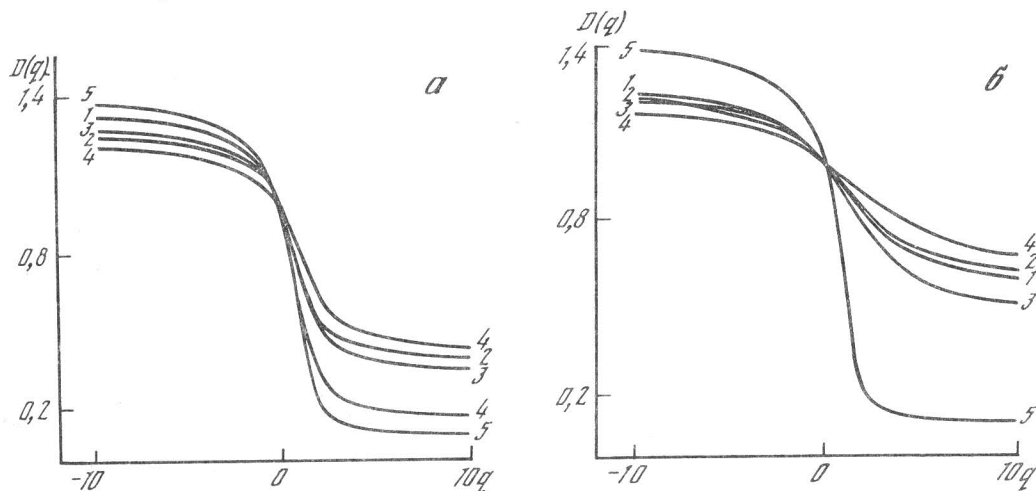
Из имеющихся пяти подкаталогов мы выбрали два наиболее различных по сейсмической ситуации. В 5-м подкаталоге содержится землетрясение с магнитудой 6,2: оно вместе со своими афтершоками образует один относительно крупный кластер, который уже на $r=7$ км включает половину всех точек. Распределения кластеров по размерам для 5-го каталога следующее:

Колич. точек в кластере	1	2	3	4	5	7	8	9	11	12	15	24	26	27	30	482
Колич. кластеров	139	29	12	6	6	4	3	1	1	2	1	1	1	1	1	1

В 4-м подкаталоге крупных землетрясений нет, все магнитуды меньше или равны 4,6. Кластеры распределены более равномерно и на $r = 20$ км образуется сразу несколько крупных кластеров:

Колич. точек в кластере1	2	3	4	5	6	8	9	11	12	13	17	18
Колич. кластеров61	12	9	6	4	2	2	2	1	2	2	1	1
Колич. точек в кластере22	33	34	42	58	99	115	128	482				
Колич. кластеров1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

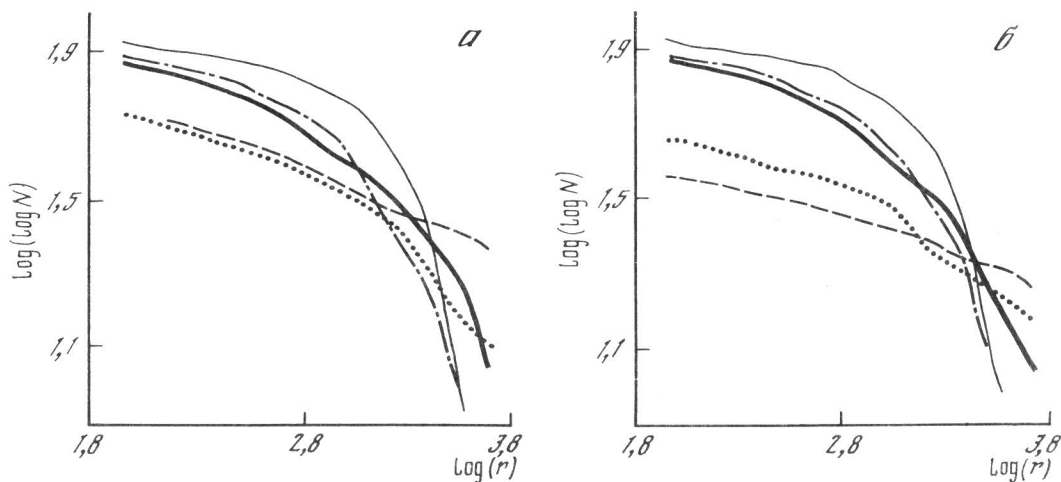
На рис. 6, а видно, что соответствующие этим каталогам функции $D(q)$ занимают крайние положения среди пяти подкаталогов. 3-й рассматри-



Р и с. 6. Графики функции $D(q)$ для пяти подкаталогов
 а - пространственная кластеризация, $R = 7$ км; б -
 временная кластеризация, $R = 4$ ч. Цифры у кривых -
 номера подкаталогов

ваемый каталог является частью каталога основных толчков, соответствующей периоду с мая 1983 г. по апрель 1985 г. В этом каталоге содержится 839 событий и они распределены еще более равномерно, чем в 4-м подкаталоге. Эта специфика рассматриваемых каталогов отразилась в параметрах подогнанных мультифрактальных моделей. Для 5-го подкаталога: $p_1 = 0,063$; $p_2 = p_3 = 0,0635$; $p_4 = 0,84$. Для 4-го подкаталога: $p_1 = p_2 = 0,034$; $p_3 = 0,3$; $p_4 = 0,632$. Для каталога основных толчков: $p_1 = p_2 = 0,05$; $p_3 = 0,325$; $p_4 = 0,575$. Такое распределение вероятностей соответствует степени равномерности распределения эпицентров, т.е. модель, полученная на основе функции $D(q,r)$ отражает реальную сейсмическую ситуацию.

Получив довольно хорошее приближение реального каталога мультифракталом, мы исследовали одну из самых простых характеристик распределения кластеров для данного каталога – это зависимость количества образовавшихся кластеров от радиуса кластеризации. Зависимость $N(r)$ входит в определение $D(q,r)$ в качестве масштабного множителя, но в данном случае мы исследуем ее поведение как самостоятельной характеристики сейсмического процесса. На тех радиусах, где число единичных кластеров велико, они во многом определяют значения как функции $D(q,r)$, так и $N(r)$, однако есть основания считать эти характеристики независимыми. Это видно, например, из рис. 5,б и 7,б. Если мультифрактал на рис. 7,б практически совпадает с реальным каталогом, то на рис. 5,б соответствующие кривые расходятся.



Р и с. 7. Зависимость количества кластеров от радиуса кластеризации для 4-го (а) и 5-го (б) подкаталогов. Обозначения, как на рис. 2

На рис. 7 видно, что поведение $N(r)$ для реального каталога существенно отличается от соответствующих кривых фрактальных моделей и равномерного распределения, и в то же время график этой функции для мультифрактала относительно близок к реальному. Эта близость тем более замечательна, что мультифрактал подгонялся только в двух точках - $D(-10,7)$ и $D(10,7)$ функции $D(q,r)$.

То, что путем изменения параметров мультифрактала можно довольно хорошо приблизить реальную функцию $D(q,r)$, является неочевидным фактом, поскольку изменение параметров фракталов (кладбища и ковра Серпинского) не обеспечивает достаточную близость модельной и реальной кривых. Это свидетельствует о том, что гетерогенность сейсмического процесса не находит объяснения в рамках фрактальной идеологии и требует применения более гибких "мультифрактальных" подходов. В работе [4] для каталога Нурека другим методом были получены значения вероятностей 0,4: 0,3: 0,2: 0,1 (при трех шагах дробления).

3. Рассмотрим проекцию сейсмического процесса на ось времени. Материал исследования тот же, что и выше. Кластеризация событий в подкаталоге производилась по следующему правилу. Пусть ξ - некоторое событие, произошедшее в момент времени t . ξ_0 - ближайшее по времени к ξ событие, принадлежащее кластеру K . Тогда ξ принадлежит K , если $|t-t_0| \leq r$, где t_0 - время соответствующее событию ξ_0 , а r - радиус кластеризации.

После того, как события в подкаталоге разбиты на кластеры с некоторым радиусом кластеризации r , можно построить функцию $D(q,r)$.

Проведенная кластеризация показывает, что на радиусах больших или равных R происходит полная кластеризация событий, т.е. образуется один большой кластер, включающий все точки каталога, и функция $D(q,r)$ не имеет смысла. Граница R зависит от периода времени, на котором распределены события подкаталога. Для рассматриваемых пяти подкаталогов R находится в пределах от 28 до 32 ч. Аналогично не представляют интереса слишком маленькие радиусы кластеризации, когда при достаточной равномерности процесса (которая достигается, например, в 4-м подкаталоге, содержащем землетрясения малой магнитуды) образуются только маленькие кластеры, размером порядка единицы. Такой случай тоже не интересен. Исходя из этих соображений, мы рассматривали радиусы, лежащие в пределах от 1 часа до 1 суток.

Рассмотрим графики функций $D(q,r)|_{r=\text{const}}$ для всех пяти подкаталогов. Из рис 6,б видно, что график $D(q,r)$ для 5-го подкаталога существенно отличается от остальных. Это связано с наличием в ка-

талоге относительно сильного землетрясения с магнитудой 6,2, изменение картины распределения кластеров происходит за счет его афтершоков. Другой "крайний" график на рис. 6,б соответствует 4-му подкаталогу - он является наиболее равномерным, поскольку состоит из слабых землетрясений с магнитудой $M \leq 4,3$. Кроме крайних случаев мы исследовали более подробно 1-й подкаталог, занимающий промежуточное положение на рис.6,б.

Помимо реальных были исследованы случайные каталоги, построенные на основе трех моделей: равномерной, фрактальной (случайной канторовой) и мультифрактальной.

Равномерная модель. Точки равномерно распределены на отрезке времени T . Длина отрезка T и количество точек N определяются соответствующими параметрами реального каталога.

Фрактальная модель. Эта модель является несколько видоизмененной конструкцией Канторова множества. На первом шаге построения отрезок времени T делится на 3 части. Длина первой части - случайная величина ξ_1 , равномерно распределенная на отрезке $[0, 25T, 0, 4T]$. Длина второй части - независимая от ξ_1 случайная величина η_1 , равномерно распределенная на том же отрезке. Средняя часть отрезка выбрасывается. Дальнейшее разбиение оставшихся двух отрезков характеризуется парами независимых случайных величин (ξ_2, η_2) и (ξ_3, η_3) , равномерно распределенных на отрезках $[0, 25T_1, 0, 4 T_1]$ и $[0, 25T_2, 0, 4T_2]$ соответственно, где T_1 и T_2 - длины оставшихся отрезков. Процесс продолжается аналогично. На полученном множестве равномерно распределяются N событий. Параметры T и N задаются соответствующими параметрами реального каталога.

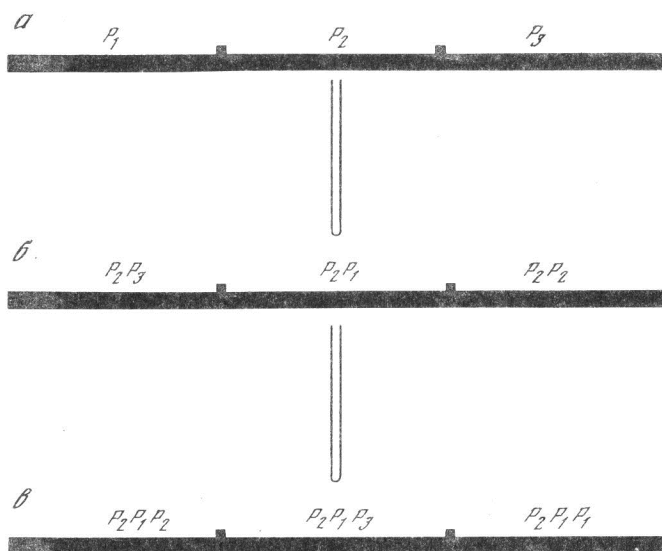
В своем рассмотрении мы ограничились семью итерациями: дальнейшее дробление не оказывает влияния на кластеризацию, так как размеры "дыр" и отрезков на этом шаге уже много меньше минимального радиуса кластеризации.

Мы считали, что в известном смысле, фрактальная (канторова) модель является "противоположным полюсом" по отношению к равномерной при изучении кластеризационных свойств (это и нашло подтверждение в компьютерных экспериментах).

Мультифрактальная модель. Исходный отрезок времени T делится на три равные части. В каждый из полученных отрезков события попадают с вероятностями p_1, p_2, p_3 , такими что: $p_1 + p_2 + p_3 = 1$; $p_1 \leq p_2 \leq p_3$. Соответствие между вероятностями p_i и отрезками разбиения устанавливается случайным образом, причем любое распределение p_i по отрезкам равновероятно. На следующем шаге каждый из трех отрезков

Р и с. 8. "Мультифрактальная" модель

а - первая, б - вторая, в - третья итерации



делится на три равные части, между которыми распределяются вероятности $p_1 p_1$, $p_1 p_2$, $p_1 p_3$, где p_i - вероятность, соответствующая данному отрезку на первой итерации (рис.8). Каждое распределение трех вероятностей по отрезкам производится независимо от остальных. Построение продолжается аналогично. Затем на отрезке случайно распределяются N точек, таким образом, чтобы в каждый отрезок последней итерации события попадали с соответствующей ему вероятностью. Значения T и N определяются соответствующими параметрами реального каталога. Так же, как и в случае фрактальной модели, мы ограничились при построении семью итерациями.

На самом деле мы не строили функцию $D(q, r)$ для какой-то конкретной реализации мультифрактала, а рассматривали среднюю кривую для нескольких реализаций с одними и теми же параметрами. Что касается исходных вероятностей p_i , то они выбирались таким образом, чтобы графики полученной усредненной кривой при $r=1$ и $D(q, 1)$ реального каталога в концевых точках $q=\pm 10$ различались бы не более, чем на стандартное отклонение мультифрактальной кривой в соответствующих точках.

На основе выбранных трех подкаталогов получены следующие значения параметров мультифракталов:

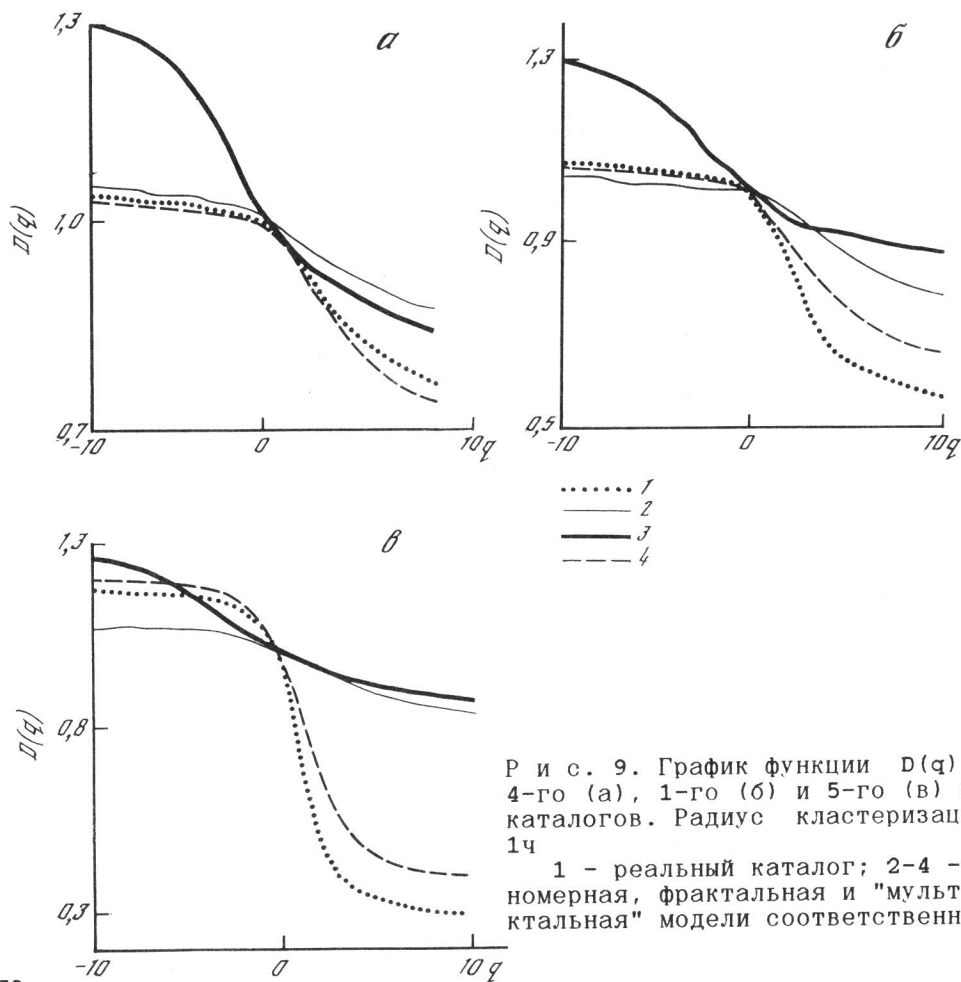
1-й подкаталог: $p_1 = p_2 = 0,25$, $p_3 = 0,5$:

4-й подкаталог: $p_1 = p_2 = 0,27$, $p_3 = 0,46$:

5-й подкаталог: $p_1 = p_2 = 0,18$, $p_3 = 0,64$:

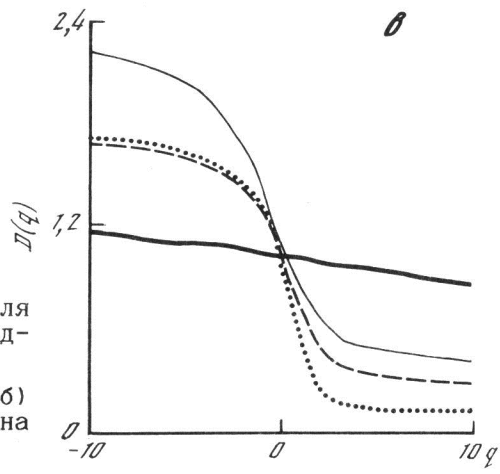
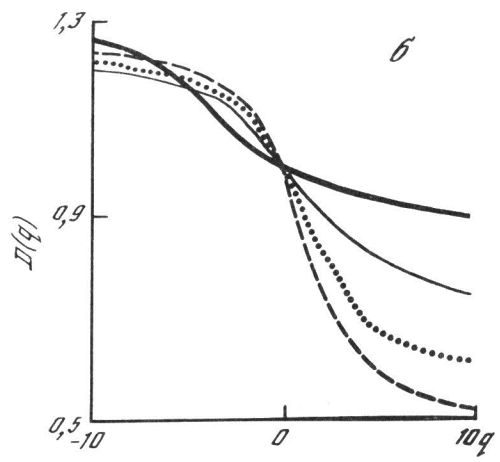
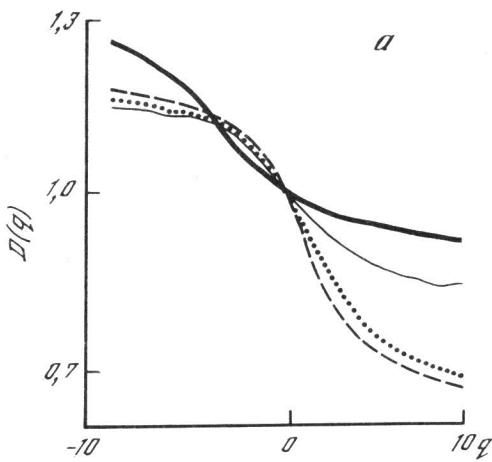
Они почти в точности соответствуют степени неравномерности реальных каталогов (см. рис.6,б).

На рис. 9,а-в видно, что при $r = 1$ реальная кривая функции $D(q,r)|_{r=const}$ близка к соответствующей кривой мультифрактала не только в концевых точках, в которых производилась подгонка, но и на всем отрезке значений q . Рисунки 10,а-в показывают, что реальная кривая относительно хорошо приближается мультифракталом и на больших радиусах. Но если в случае 5-го подкаталога этот радиус достигает 16 ч, то в случае 4-го подкаталога на радиусах кластеризации больше 4 ч реальная кривая ближе к равномерной модели, чем к мультифракталу, что особенно хорошо видно на рис. 11, 12, где изображены сечения функции $D(q,r)$ плоскостями $q=\pm 10$. Это свидетельствует о том, что при проекции сейсмического процесса на ось времени, в случае, когда проектируемый каталог содержит только слабые землетрясения, достигается очень большая равномерность распределения событий, и приближение мультифракталом не дает хороших результатов.



Р и с. 9. График функции $D(q)$ для 4-го (а), 1-го (б) и 5-го (в) подкаталогов. Радиус кластеризации - 1ч

1 - реальный каталог; 2-4 - равномерная, фрактальная и "мультифрактальная" модели соответственно

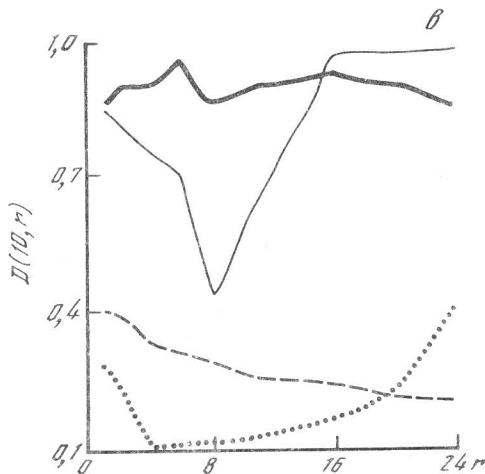
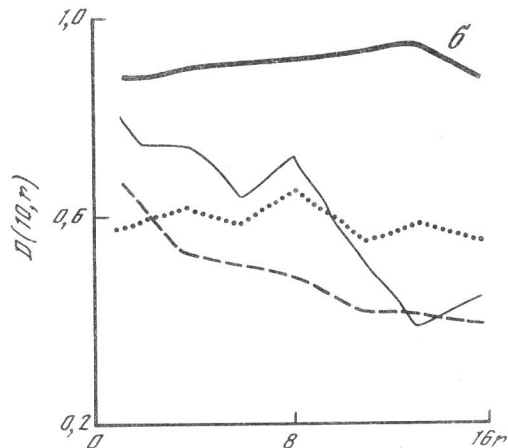
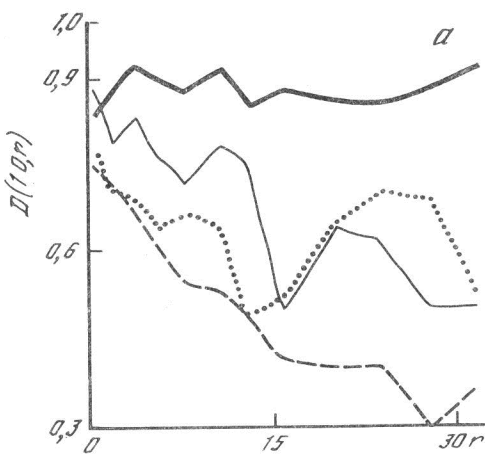


Р и с. 10. График функции $D(q)$ для 4-го (а), 1-го (б) и 5-го (в) подкаталогов

Радиус кластеризации - 4ч (а,б) и 8ч (в). Обозначения, как на рис.9

На рис. 9-12 видно особое поведение фрактальной модели, график которой сильно отличается от остальных для всех трех рассматриваемых подкаталогов. Функция $D(q,r)|_{q=\pm 10}$ для фрактальной модели очень близка к константе, что происходит из-за относительно равномерного распределения кластеров по размерам в пределах отрезка размеров Δ , границы которого зависят от радиуса кластеризации. В этом отношении фрактальная модель действительно противоположна равномерной.

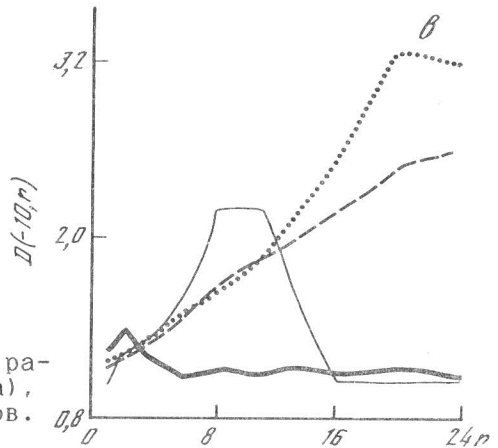
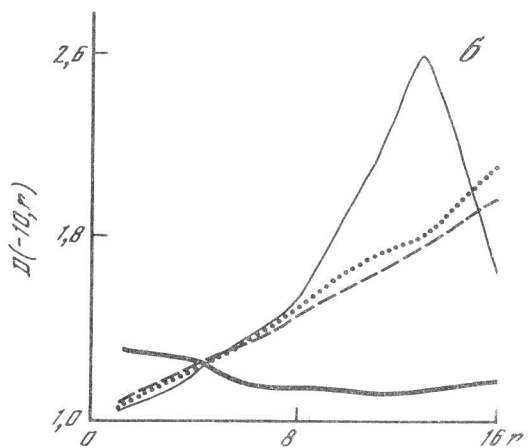
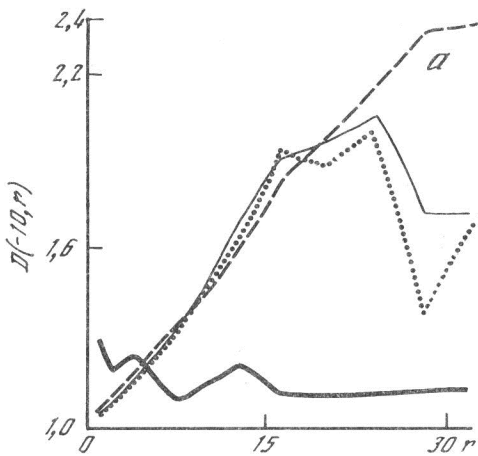
Кроме $D(q,r)$ мы рассмотрели функцию $N(r)$ (зависимость числа кластеров от радиуса кластеризации). На рис.13,а-в видно отличие фрактальной модели от остальных: соответствующая кривая убывает медленнее и расположена ниже. Равномерная кривая имеет максимальный "загиб", что особенно хорошо видно для 5-го подкаталога (см. рис.13,в). Графики реального каталога и мультифрактала во всех



Р и с. 11. Зависимость $D(10)$ от радиуса кластеризации для 4-го (а), 1-го (б) и 5-го (в) подкаталогов. Обозначения, как на рис.9

случаях идут вместе до достаточно больших радиусов, на которых флуктуация мультифрактала довольно велика. На этих графиках мультифрактал ближе к реальному каталогу, чем равномерная модель, даже для 4-го подкаталога. Из сравнения трех графиков (см.рис.13,а-в), видно, что на графике 4-го подкаталога (см.рис.13,а) три кривые (реальная, равномерная и мультифрактал) довольно близки, для 1-го подкаталога (см.рис.13,б) равномерная кривая начинает загигаться вниз, а для 5-го подкаталога (см.рис.13,в) она идет уже значительно круче, чем реальная и мультифрактальная кривые, на всем своем протяжении.

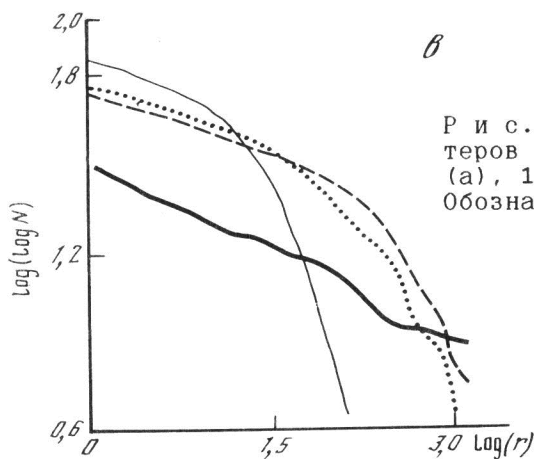
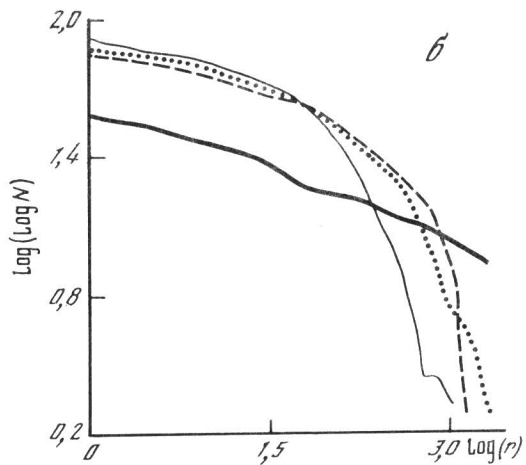
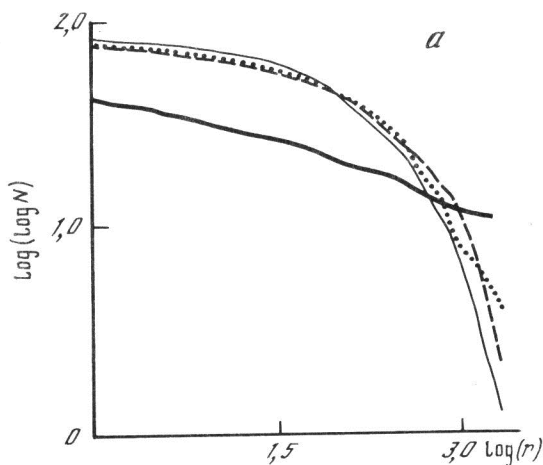
Таким образом, приближение реального каталога мультифракталом дает тем лучшие результаты, чем более "неравномерный" каталог мы аппроксимируем. Связано это с тем, что при проекции пространствен-



Р и с. 12. Зависимость $D(-10)$ от радиуса кластеризации для 4-го (а), 1-го (б) и 5-го (в) подкаталогов. Обозначения, как на рис.9

но-временного процесса на одно направление теряется существенная часть информации. Слабые землетрясения, если не учитывать их пространственных координат, происходят относительно равномерно, и мультифрактальная структура сейсмического процесса хорошо прослеживается только в случае наличия в каталоге сильного землетрясения.

Заключение. Можно считать, что моделирование реальной сейсмичности с помощью простейшей "мультифрактальной" модели с двумя (для времени) или тремя (для пространства) параметрами подгонки дает вполне удовлетворительные результаты, если говорить о распределении кластеров по числу точек. Этот успех, менее яркий в случае времени, инициирует ряд вопросов, например, о возможности характеризовать регионы в терминах функции $D(q)$: о прогностических свойствах вариаций этих функций: могут ли быть использованы для



Р и с. 13. Зависимость количества кластеров от радиуса кластеризации для 4-го (а), 1-го (б) и 5-го (в) подкаталогов. Обозначения, как на рис.9

этих целей параметры аппроксимирующих мультифракталов: какие модели сейсмического процесса удовлетворяют ограничениям, налагаемым выявленными кластеризационными свойствами реальной сейсмичности.

Литература

1. Садовский М.А., Болховитинов Л.Г., Писаренко В.Ф. Деформирование геофизической среды и сейсмический процесс. М.: Наука, 1987. 100 с.
2. Гейликман М.Б., Голубева Т.В., Писаренко В.Ф. Мультифрактальная структура пространственного распределения сейсмичности // ДАН СССР. 1990. Т. 310, N 6. С.1335-1338.
3. Halsey T.C., Yensen M.H., Kadanoff L. et al. Fractal measures and their singularities: the characterisation of strange sets // Phys. Rev. A. 1986. Vol. 33, N 2. P.1141-1151.
4. Садовский М.А., Голубева Т.В., Писаренко В.Ф., Шнирман М.Г. Характерные размеры горной породы и иерархические свойства сейсмичности // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1984. N 2. С.3-15.