УДК 550.348

А.Г.Тумаркин, М.Г.Шнирман

КРИТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СРЕДАХ

A.G.Tumarkin, M.G.Shnirman

CRITICAL EFFECTS IN HIERARCHICAL MEDIA

We consider a general model of defects developing in hierarchical selfsimilar media. We establish the existence of the critical value of defect generation rate on the lower level, which turned to be a root of the derivative of a certain function explicitly determined by the model.

Введение

Эта статья продолжает серию работ [1-3], в которых исследовалась иерархическая система уравнений кинетики многомасштабного дефектообразования, навеянная современными представлениями о геофизической среде,как об иерархии отдельностей разных масштабов [4,5]. Конкретно - использовались следующие основные представления о процессе. Дефект - зона с существенно повышенной способностью релаксировать напряжения. Процесс дефектообразования многомасштабен и самоподобен на разных уровнях. Дефекты возникают спонтанно и на одном масштабном уровне независимо друг от друга. Некоторые пространственные сочетания дефектов порождают дефекты следующего масштабного уровня. Интенсивность "залечивания" (исчезновения) дефектов уменьшается с ростом размера дефекта. Акт дефектообразования может рассматриваться как землетрясение.

В настоящей работе наряду с этим подходом рассматривается и иной, когда интенсивность "залечивания" растет с ростом размера дефекта (т.е. время существования дефекта убывает). В этом случае естественно считать, что дефект - это зона неустойчивости, подготовленная к возникновению землетрясения, а акт залечивания и есть собственно землетрясение, т.е. переход к нормальному "устойчивому" состоянию. При этом понимании время "жизни" убывает с ростом размера дефекта, что кажется вполне обоснованным.

Отметим, что уравнения, связывающие интенсивности дефектообразования на разных масштабных уровнях, рассматриваются нами в существенно более общей форме, чем ранее в [2,3].

В статье описывается общая модель и формулируются две теоремы, устанавливающие критический характер поведения модели в зависимости от величины интенсивности дефектообразования на нижнем масштабном уровне. В отдельном пункте даны доказательства результатов. В Приложение отнесены проверка того, что модель, рассматривавшаяся ранее [2,3] удовлетворяет условиям Теорем 1 и 2 из настоящей работы, а также рассуждения, устанавливающие независимость характера поведения общей системы от начальных условий при случайном законе залечивания.

Описание модели

Пусть i - номер уровня: $i=0,\dots,N$; $p_i(t)$ - концентрация дефектов на i-м уровне (т.е. отношение числа дефектных блоков к их общему числу); $q_i(t)$ - концентрация "старых" дефектов, т.е. существовавших в момент $(t-1)$ и не исчезнувших в момент t; $\alpha_i(t)$ - интенсивность дефектообразования; t_i - продолжительность жизни дефекта на i-м уровне. Время дискретно.

В работах [2,3] М.Г.Шнирман и Г.С.Наркунская исследовали следующую модель. Пусть каждый блок i-го уровня состоит из n блоков $(i-1)$-го уровня. Блок i-го уровня становится дефектным, если не менее k из n его составляющих блоков предыдущего уровня дефектны. В [2] было показано, что основное соотношение для интенсивности дефектообразования имеет вид

$$\alpha_{i+1}(t)=\frac{\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n}{l}q_i(t)^l(1-q_i(t))^{n-l}\left(\sum_{j=k-l}^{n-l}\binom{n-l}{j}\alpha_i(t)^j(1-\alpha_i(t))^{n-l-j}\right)}{\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n}{l}q_i(t)^l(1-q_i(t))^{n-l}}.$$

В Приложении мы доказываем, что это выражение можно преобразовать к виду

$$\alpha_{i+1}(t) = 1 - \frac{\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n}{l}p_i(t)^l(1-p_i(t))^{n-l}}{\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n}{l}q_i(t)^l(1-q_i(t))^{n-l}}.$$

Это позволит рассмотреть обшие системы со следующим соотношением, определяющим вероятность перехода блока в дефектное состояние через характеристики предыдущего уровня:

$$\alpha_i(t) = 1 - \frac{F(1-p_{i-1}(t))}{F(1-q_{i-1}(t))}. \tag{1}$$

Так как новые дефекты возникают только из недефектных блоков, то

$$p_i(t) = q_i(t)+\alpha_i(t)(1-q_i(t)). \qquad (2)$$

И, наконец, рассматриваются два варианта залечивания дефектов. Первый, когда блок перестает быть дефектным через фиксированное для данного уровня время t_i:

$$q_i(t) = p_i(t-1)-(p_i(t-t_i)-q_i(t-t_i)), \qquad (3')$$

и второй, когда происходит случайное залечивание с вероятностью $1/t_i$:

$$q_i(t) = (1-1/t_i)p_i(t-1). \qquad (3'')$$

Оба случая рассматриваются аналогично и результаты одинаковы.

Предполагается, что на 0-м уровне интенсивность дефектообразования постоянна и равна константе α_0, и до момента $t=1$ ничего не происходило.

Так как α - это вероятность перехода блока в дефектное состояние, то функция F должна быть неотрицательной и монотонно возрастающей. Будем предполагать дополнительно, что F дважды дифференцируема на $[0,1]$, $F(\zeta)=\zeta^\lambda\Phi(\zeta)$, где функция Φ подчиняется условию монотонности: *функция* $-\zeta\Phi'(\zeta)/\Phi(\zeta)$ *является монотонно возрастающей*, называемому в дальнейшем М-условием. Отсюда, в частности, следует, что сама функция Φ должна быть монотонно убывающей, так как $\Phi'<0$ и $\Phi(0)\neq 0$.

Будем называть систему (1)-(3) с функцией F, для которой выполнено М-условие, F-моделью. В Приложении будет доказано, что модель дефектообразования, рассматривавшаяся в [2,3], является F-моделью.

Исследуем два случая: когда время жизни дефекта прямо или обратно пропорционально его размеру. Для этих случаев будет установлено существование критичности, т.е. пороговой величины интенсивности дефектообразования на нулевом уровне α_0^{cr}, такой, что при достаточно больших размерах системы (количестве уровней N) и времени t для $\alpha_0>\alpha_0^{cr}$ высшие уровни почти полностью состоят из дефектных блоков, в то время как при $\alpha_0<\alpha_0^{cr}$ на высших уровнях дефектов практически нет.

Т е о р е м а 1. *Предположим, что функция Φ удовлетворяет М-условию на $[0,1]$ и $t_i=C_0C^i$ с $C>1$. Тогда существует критическое значение интенсивности дефектообразования на нижнем уровне α_0^{cr}. При достаточно большом C_0 значение α_0^{cr} может быть найдено из условия, что $1-p_0^{cr}$ является единственным корнем в $[0,1]$ производной функции $\zeta^{\lambda-1/C}\Phi(\zeta)$, где $p_0^{cr}=C_0\alpha_0^{cr}/(1+(C_0-1)\alpha_0^{cr})$.*

В случае $t_i=C_0C^i$, $C<1$, рассмотрим последовательность систем с возрастающим количеством уровней N и величиной интенсивности дефектообразования на 0-м уровне $\alpha_0^{(N)}$, нормированной на время жизни дефектов на нижнем уровне $t_0^{(N)}=C_0C^{-N}$, т.е. $\alpha_0^{(N)}=\alpha_0/t_0^{(N)}$.

Теорема 2. *Предположим, что функция Φ удовлетворяет М-условию на [0,1]. $t_i=t_0^{(N)}C^i$, $\alpha_0^{(N)}=\alpha_0/t_0^{(N)}$, где $t_0^{(N)}=C^{-N}$ с $C<1$. Тогда при $C>1/\lambda$ у величины α_0 существует критическое значение $\alpha_0^{cr}=p_0^{cr}/(1-p_0^{cr})$, где $1-p_0^{cr}$ является единственным корнем в [0,1] производной функции $\zeta^{\lambda-1/C}\Phi(\zeta)$. При $C<1/\lambda$ для любых α_0 высшие уровни свободны от дефектов.*

Тот факт, что при $C<1/\lambda$ дефекты не проникают на высшие уровни, объясняется тем, что их время жизни слишком быстро убывает при возрастании номера уровня.

Доказательство результатов

Приведем доказательство Теоремы 2, так как результат Теоремы 1 рассматривается совершенно аналогично.

Вследствие убывания функции Φ выполнено неравенство:

$$1-\alpha_{i+1}(t) \geq (1-\alpha_i(t))^{1/\lambda},$$

откуда, при $C<1/\lambda$

$$1-\alpha_{i+1}^{(N)}(t) \geq (1-\alpha_0C^N)^{1/\lambda^i} \geq 1-\alpha_0C^N/\lambda^i,$$

и

$$\alpha_{i+1}^{(N)}(t) \leq \alpha_0C^N/\lambda^i,$$

что доказывает быстрое убывание интенсивностей с номером уровня.

Из [2] и Приложения следует, что $p_i(t)$, $q_i(t)$ и $\alpha_i(t)$, удовлетворяющие (1)-(3), экспоненциально сходятся при $t\to\infty$ к своим предельным значениям $p_i(\infty)$, $q_i(\infty)$ и $\alpha_i(\infty)$ соответственно и выполнены следующие соотношения:

$$p_i(\infty) = \frac{t_i\alpha_i(\infty)}{1+(t_i-1)\alpha_i(\infty)}, \quad q_i(\infty) = \frac{(t_i-1)\alpha_i(\infty)}{1+(t_i-1)\alpha_i(\infty)}. \tag{4}$$

Вместе с предыдущими оценками это дает искомый результат для $C<1/\lambda$.

Изучим функцию $\zeta^{\lambda-1/C}\Phi(\zeta)$. Обозначая через $\zeta(C)$ корень ее производной, получаем для его определения уравнение

$$-\frac{\zeta\Phi'(\zeta)}{\Phi(\zeta)} = \lambda-1/C.$$

М-условие означает, что функция $\zeta(C)$ монотонно возрастает с возрастанием C от $1/\lambda$ до 1. Поскольку $\zeta(1/\lambda)=0$, то $\zeta(C)>0$ для $C>1/\lambda$. Рассматриваемая функция $\zeta^{\lambda-1/C}\Phi(\zeta)$ является возрастающей при $\zeta\in(0,\zeta(C))$ и убывающей при $\zeta\in(\zeta(C),1)$.

Перепишем (1) следующим образом:

$$1-\alpha_{i+1}(t)=(1-\alpha_i(t))^{1/C}\frac{(1-p_i(t))^{\lambda-1/C}\Phi(1-p_i(t))}{(1-q_i(t))^{\lambda-1/C}\Phi(1-q_i(t))}\ . \tag{5}$$

Если $(1-p_0^{(N)}(\infty))>\zeta(C)$, то существуют $\delta>0$, $\varepsilon>0$, такие что

$$1-q_0^{(N)}(\infty)>\ 1-p_0^{(N)}(\infty)\ >\ \zeta(C)+\delta$$

и

$$1-\alpha_1^{(N)}(\infty)>(1-\alpha_0^{(N)})^{1/(C+\varepsilon)}.$$

Из неравенства $(1-\alpha)^a\ \ge\ 1-\alpha a$ получаем

$$\alpha_1^{(N)}(\infty)\ <\ \alpha_0^{(N)}/(C+\varepsilon).$$

Это соотношение вместе с (4) обеспечивает для достаточно больших $t_0^{(N)}$, выполнение неравенства $p_1^{(N)}(\infty)<p_0^{(N)}(\infty)$, а следовательно, $(1-p_1^{(N)}(\infty))>\zeta(C)+\delta$.

Из приведенных рассуждений следует существование числа N_0, такого, что для $N>N_0$ выполняется $(1-p_0^{(N)}(\infty))>\zeta(C)$, и

$$\alpha_{i+1}^{(N)}(\infty)<\ \alpha_i^{(N)}(\infty)/(C+\varepsilon)$$

для $i=0,\dots,N-N_0$, откуда

$$\alpha_{i+1}^{(N)}(\infty)<\ \alpha_0^{(N)}\frac{C^N}{(C+\varepsilon)^{N-N_0}}.$$

Поэтому $\alpha_i^{(N)}(\infty)$ для $i\le N-N_0$, а следовательно, и для всех i стремится к 0 быстрее, чем геометрическая прогрессия с основанием $C/(C+\varepsilon)$.

Теперь, если $(1-p_0^{(N)}(\infty))<\zeta(C)$, то существуют $\delta>0$, $\varepsilon>0$, такие, что для достаточно больших N

$$\zeta(C)-\delta\ >\ 1-q_0^{(N)}(\infty)>\ 1-p_0^{(N)}(\infty)$$

и из (5)

$$1-\alpha_1^{(N)}(\infty)<\ (1-\alpha_0^{(N)})^{1/(C-\varepsilon)}$$

Следовательно,

$$\alpha_1^{(N)}(\infty)>\ \alpha_0^{(N)}/(C-\varepsilon/2).$$

Это неравенство вместе с (4) для достаточно больших $t_0^{(N)}$ обеспечивает выполнение условия $p_1^{(N)}(\infty)>p_0^{(N)}(\infty)$, откуда $(1-p_1^{(N)}(\infty))<\zeta(C)-\delta$.

Таким образом, существует число N_0, такое, что при достаточно больших N из $(1-p_0^{(N)}(\infty))<\zeta(C)$ следует, что

$$\alpha_{i+1}^{(N)}(\infty)> \alpha_i^{(N)}(\infty)/(C-\varepsilon/2),$$

для $i=0,\dots,N-N_0$ и

$$1 - \alpha_{i+1}^{(N)}(\infty)<(1 - \alpha_i^{(N)}(\infty))^{1/(C-\varepsilon)}.$$

Поскольку $(1-\alpha/a)^a\le e^{-\alpha}$, то

$$1-\alpha_i^{(N)}(\infty)<(1-\alpha_0^{(N)})^{1/(C-\varepsilon)^i}=(1-\alpha_0 C^N)^{1/(C-\varepsilon)^i}\le e^{-\alpha_0(C/(C-\varepsilon))^i C^{N-i}}.$$

Следовательно, при $N\to\infty$ концентрации дефектов на высших уровнях очень быстро стремятся к 1.

Доказательство закончено.

Заключение

Итак, можно утверждать следующее:

1) для достаточно общей схемы порождения дефекта уровня i дефектами уровня i-1 в случае возрастания времени залечивания с увеличением размера (C>1) существует критический порог интенсивности дефектообразования α_0, разделяющий ситуации с отсутствием крупных дефектов и с тотальной дефектностью на высших уровнях;

2) для случая, когда время существования дефекта убывает с увеличением размера (C<1), показано существование критической величины интенсивности α_0 при не слишком быстром убывании жизни дефекта $(C_1<C<1)$;

3) при быстром убывании времени существования дефекта с увеличением размера $(C<C_1)$ больших дефектов нет;

4) во всех перечисленных случаях поведение системы при случайном (пуассоновском) залечивании (3") не зависит от начальных условий.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Покажем, что иерархическая система из работ [2,3] определяет F-модель. Используя представление для суммы биномиальных вероятностей [6]:

$$\sum_{l=0}^{k}\binom{n}{l}x^l(1-x)^{n-l} = (n-k)\binom{n}{k}\int_0^{1-x}\tau^{\,n-k-1}(1-\tau)^k d\tau,$$

получаем

$$\sum_{j=k-1}^{n-1}\binom{n-1}{j}\alpha_i(t)^j(1-\alpha_i(t))^{n-1-j} = (n-l)\binom{n-l-1}{k-l-1}\int_0^{\alpha_i(t)}\tau^{k-l-1}(1-\tau)^{n-k}d\tau$$

и

$$\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n}{l}q_i(t)^l(1-q_i(t))^{n-l}(n-l)\binom{n-l-1}{k-l-1}\int_0^{\alpha_i(t)}\tau^{k-l-1}(1-\tau)^{n-k}d\tau =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!}\int_0^{\alpha_i(t)}(1-\tau)^{n-k}(1-q_i(t))^{n-k+1}(q_i(t)+(1-q_i(t))\tau)^{k-1}d\tau.$$

Вводя новую переменную $1-\zeta = q_i(t) + (1-q_i(t))\tau$, получаем $\zeta=(1-q_i(t))\times\times(1-\tau)$, откуда

$$\alpha_{i+1}(t) = 1 - \frac{\int_0^{1-p_i}\tau^{n-k}(1-\tau)^{k-1}d\tau}{\int_0^{1-q_i}\tau^{n-k}(1-\tau)^{k-1}d\tau}, \qquad (6)$$

что дает формулу для α в виде (1).

Таким образом, для системы, рассматривавшейся в [2,3], имеем:

$$F(\zeta)=\int_0^{\zeta}\tau^{n-k}(1-\tau)^{k-1}d\tau \qquad \text{и} \qquad \Phi(\zeta)=\int_0^1\tau^{n-k}(1-\zeta\tau)^{k-1}d\tau,$$

причем $F(\zeta)=\zeta^{n-k+1}\Phi(\zeta)$.

Чтобы убедиться, что соотношение (6) вместе с (2),(3) определяет F-модель, нужно исследовать функцию $-\zeta\Phi'(\zeta)/\Phi(\zeta)$, которая может быть преобразована к виду

$$(k-1)\frac{\int_0^{\zeta}\tau^{n-k+1}(1-\tau)^{k-2}d\tau}{\int_0^{\zeta}\tau^{n-k}(1-\tau)^{k-1}d\tau} = K\frac{\sum_{l=0}^{k-2}\binom{n}{l}(1-\zeta)^l\zeta^{n-l}}{\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n}{l}(1-\zeta)^l\zeta^{n-l}} =$$

$$= K\Bigg/\left[1 + \frac{\binom{n}{k-1}(1-\zeta)^{k-1}\zeta^{n-k+1}}{\sum_{l=0}^{k-2}\binom{n}{l}(1-\zeta)^l\zeta^{n-l}}\right] = K\Bigg/\left[1 + \frac{\binom{n}{k-1}}{\sum_{l=0}^{k-2}\binom{n}{l}\zeta^{k-l-1}/(1-\zeta)^{k-l-1}}\right],$$

где K обозначает положительную константу. Поскольку $\zeta/(1-\zeta)$ возрастает, видно, что исследуемая функция удовлетворяет М-условию.

Итак, для системы из [2,3] выполнены условия теорем (1),(2), что доказывает наличие критического поведения в этой модели. Отметим, что в этом случае α_0^{cr} является корнем многочлена степени k-1. Существование критического значения интенсивности на нижнем уровне при C>1 впервые было установлено в [2] другим методом, не позволяющим получить выражение для его вычисления.

Покажем теперь, что в случае пуассоновского залечивания поведение системы (1),(2),(3″) не зависит от начальных условий. Для этого докажем, что независимо от значений переменных в начальный момент справедливы соотношения (5) для их предельных значений. Действительно, на нулевом уровне

$$p_0(t) = q_0(t)+\alpha_0(1-q_0(t)) = \alpha_0+(1-\alpha_0)(1-1/t_0)(1-p_0(t-1)),$$

т.е. $p_0(t)=\Psi(p_0(t-1),\alpha_0)$, где функция Ψ отображает отрезок [0,1] в себя, монотонно возрастает и пересекается с прямой $y=x$ в единственной точке $t_0\alpha_0/(1 + (t_0-1)\alpha_0)$. Тогда (см., например, [7]) при любом начальном значении p_0 при $t\to\infty$ существует предел p_0, а значит и q_0. Для предельных значений справедливы соотношения:

$$p_0(\infty)=t_0\alpha_0/(1+(t_0-1)\alpha_0), \quad q_0(\infty)=(t_0-1)\alpha_0/(1+(t_0-1)\alpha_0).$$

Поэтому из (1) получаем, что $\alpha_1(t)$ имеет в бесконечности предельное значение. Теперь нетрудно видеть, что, так как

$$p_1(t) = \alpha_1(t) + (1-\alpha_1(t))(1-1/t_1)(1-p_1(t-1)),$$

$p_1(t)=\Psi(p_1(t-1),\alpha_1(t))$, где функция Ψ имеет те же свойства при каждом значении α_1, а α_1 стремится к пределу, то и для p_1, q_1 справедливы соотношения (5) при произвольных начальных значениях, и т.д.

Литература

1. *Шнирман М.Г.* Динамическая иерархическая модель дефектообразования //Численное моделирование и анализ геофизических процессов. М.: Наука, 1987. С.87-95. (Вычисл. сейсмология: Вып.20).
2. *Наркунская Г.С.* Фазовый переход в одной иерархической модели // Проблемы сейсмологической информатики. М.: Наука,1988. С.65-74. (Вычисл. сейсмология: Вып. 21).
3. *Наркунская Г.С., Шнирман М.Г.* Иерархическая модель дефектообразования и сейсмичность // Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука, 1989. С.68-76. (Вычисл. сейсмология: Вып.22).

4. *Садовский М.А.* О естественной кусковатости горных пород // ДАН СССР. 1979. Т.247, N 4. С.829-832.

5. *Садовский М.А., Писаренко В.Ф.* Сейсмический процесс в блоковой среде. М.: Наука, 1991. 120с.

6. *Кендалл М.Дж., Стьюарт А.* Теория распределений. М.: Наука, 1966. 587с.

7. *Де Брейн Н.* Асимптотические методы в анализе. М.: Наука, 1968. 209 с.

УДК 550.341

С.С.Бхатия, А.И.Горшков, Е.Я.Ранцман, М.Н.Рао, М.Б.Филимонов, Т.Р.К.Четти

РАСПОЗНАВАНИЕ МЕСТ ВОЗМОЖНОГО ВОЗНИКНОВЕНИЯ СИЛЬНЫХ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ. XVIII. ГИМАЛАИ, (M ≥ 6,5)

S.C.Bhatia, A.I.Gorshkov, E.Ya.Rantsman, M.N.Rao, M.B.Filimonov, T.R.K.Chetty

RECOGNITION OF EARTHQUAKE-PRONE AREAS. XYIII. THE HIMALAYA, (M ≥ 6,5)

Places where earthquakes with M≥6,5 may occure, are recognized in the Himalayan region on the basis of morphostructural zoning scheme.

Статья продолжает цикл работ по распознаванию мест возможных землетрясений в сейсмоактивных регионах мира на основе схем морфоструктурного районирования (МСР) (см."Вычислительная сейсмология", Вып.6-23). В работе рассматривается высочайшая на Земле горная система Гималаев, протянувшаяся в форме выпуклой к югу дуги на расстояние 2500 км, шириной до 320 км при среднем уровне высот осевого гребня 6000-7000 м. Решается задача распознавания мест возможных землетрясений с M≥6,5.

Морфоструктурное районирование Гималаев

Схема МСР Гималаев (рис.1, см. вклейку) была составлена по формализованной методике [1] путем совместного анализа разномасштабных топографических, геологических, тектонических карт и космических снимков.

Согласно теории тектоники плит, современная морфоструктура Гималаев сформировалась в результате коллизии Индийской и Евроазиат-