

В.А.Желиговский

О ГЕНЕРАЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ОДНИМ КЛАССОМ ТЕЧЕНИИ
ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ШАРЕ: CORRIGENDUM ET ADDENDUM

V.A.Zheligovsky

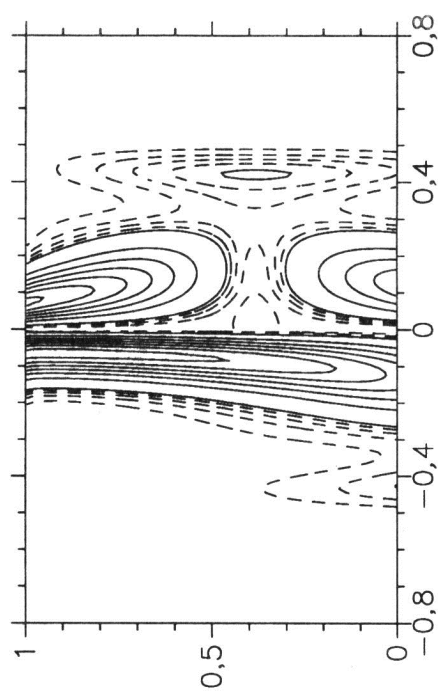
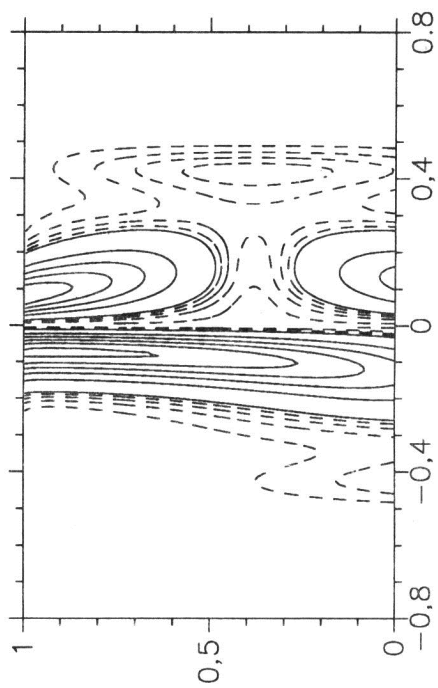
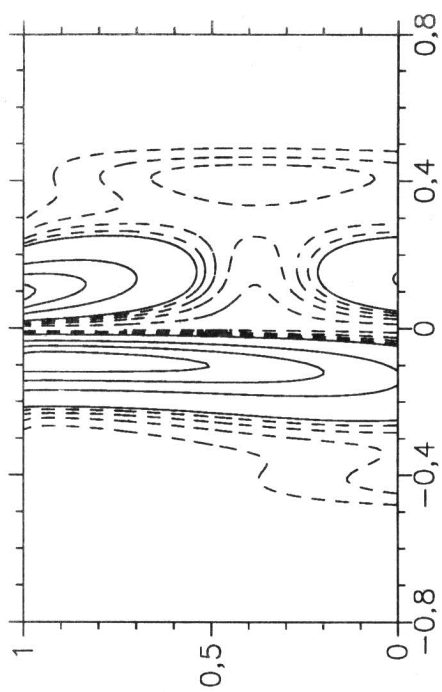
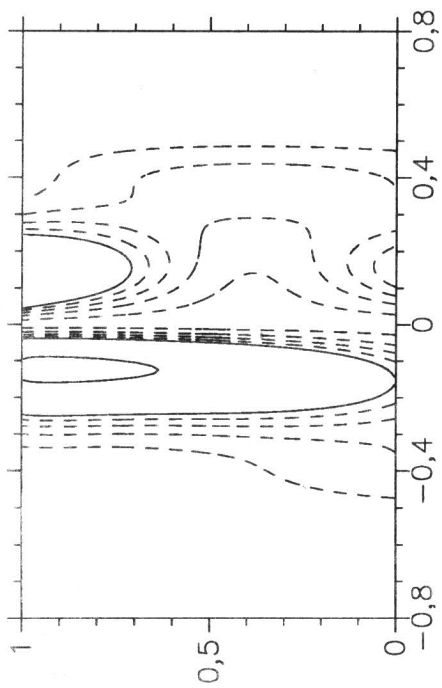
ON MAGNETIC FIELD GENERATION BY A CLASS OF FLOWS OF
CONDUCTING FLUID IN A SPHERE: CORRIGENDUM ET ADDENDUM

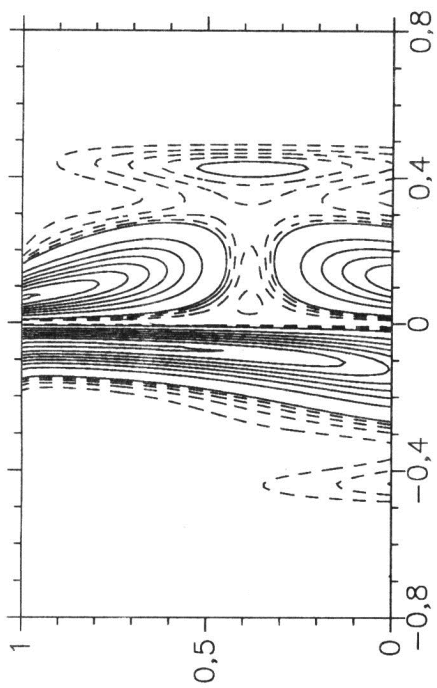
The paper contains further new results in the solution of the kinematic problem of magnetic field generation by a Beltrami flow in a sphere. We also present the corrections to the numerical results, reported previously in [1].

Настоящая заметка посвящена непосредственному продолжению работы [1] по численному исследованию доминирующих собственных значений оператора магнитной индукции и структуры соответствующих мод магнитного поля при магнитных числах Рейнольдса R_m порядка 10^1 – 10^2 , когда объем, занимаемый проводящей жидкостью, является шаром. (Детальное описание постановки задачи, метода ее решения, определения и обозначения приведены в статье [1], к которой адресуется читатель.)

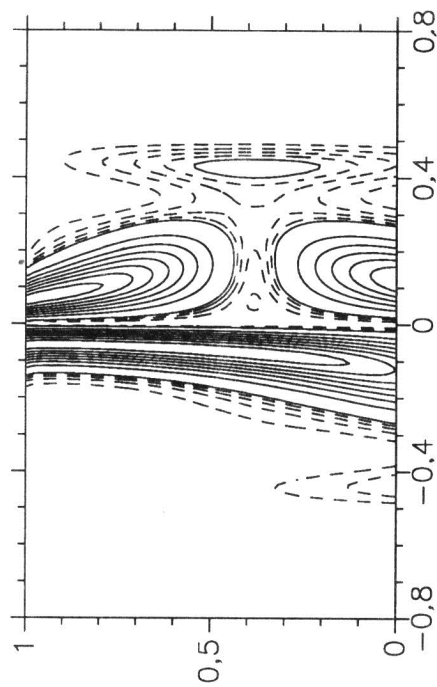
1°. В процессе оптимизации программы расчета доминирующих собственных значений и соответствующих собственных векторов оператора магнитной индукции в ней были выявлены ошибки, что потребовало повторения расчетов, описанных в [1]. Их результаты приведены в табл.1 и 2 и в виде рис.1-4 (соответственно заменяющих табл.1,2 и рис.1-4 в [1]). В табл.1 добавлены собственные значения, рассчитанные в подпространстве V для $R_m=15,3$, которое согласно [2] отвечает стационарному динамо. На рисунках для обоих подпространств (X и Y) пунктирные изолинии на картах квадрата нормы собственных векторов проведены с единичным интервалом в диапазоне от 1 до 4: сплошные изолинии отвечают значениям от 5 и выше, интервал между ними равен 10 и 25 в X и Y соответственно.

Как следует из табл.1,2, сходимость при $R=31$ неудовлетворительна, в связи с чем были проведены расчеты с большими галеркинскими матрицами. В табл.2 для иллюстрации сходимости нормированных собственных векторов вместо коэффициента $\alpha_{1,0,2}^P$ разложения по использованному функциональному базису в подпространстве Y при $R \geq 55$

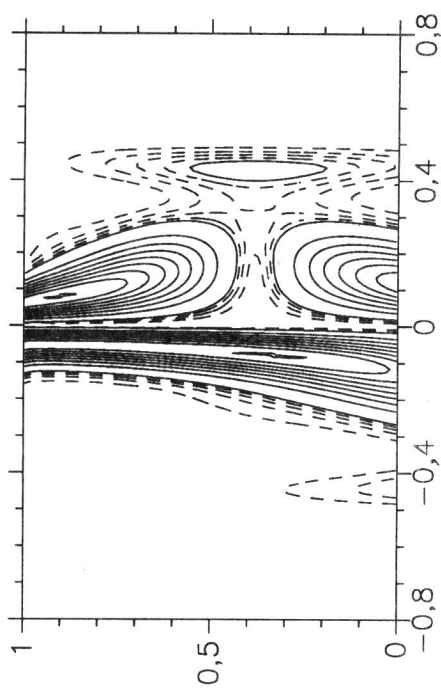




$R_m = 80,190$ ($X; \phi = 0, \pi$) $R = 59$

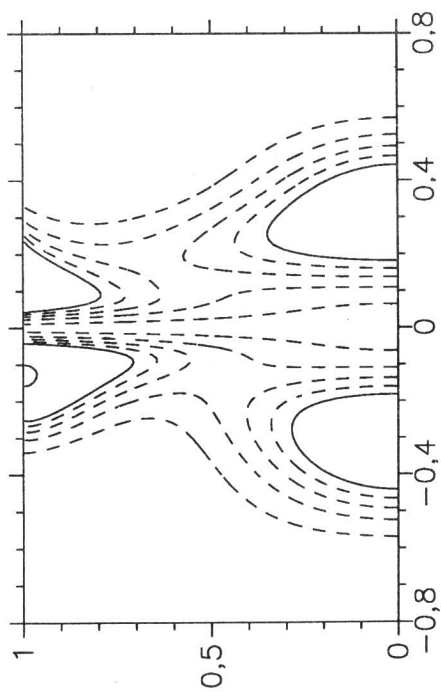


$R_m = 96,228$ ($X; \phi = 0, \pi$) $R = 59$

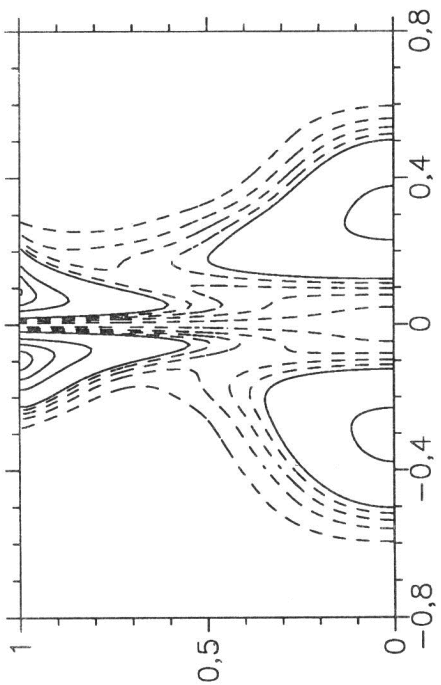


$R_m = 112,266$ ($X; \phi = 0, \pi$) $R = 59$

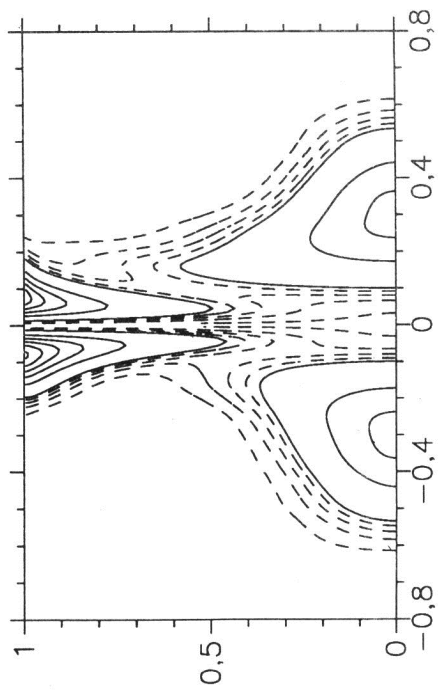
Р и с . I



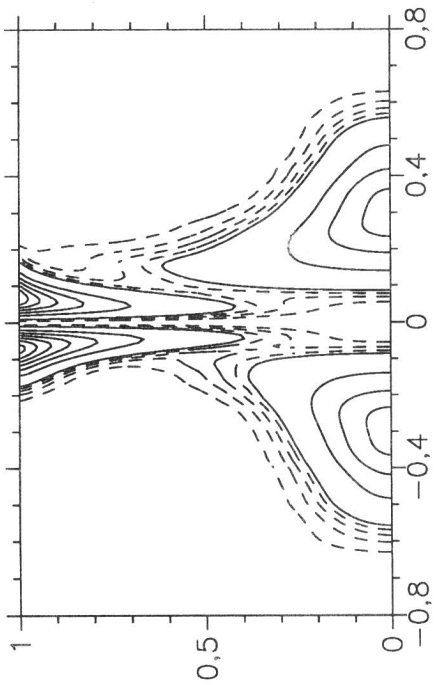
$R_m = 16,038$ ($X; \phi = \pi/2, 3\pi/2$)



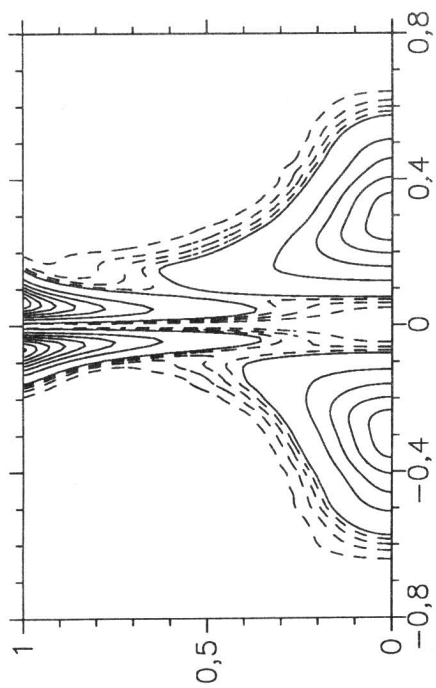
$R_m = 32,076$ ($X; \phi = \pi/2, 3\pi/2$)



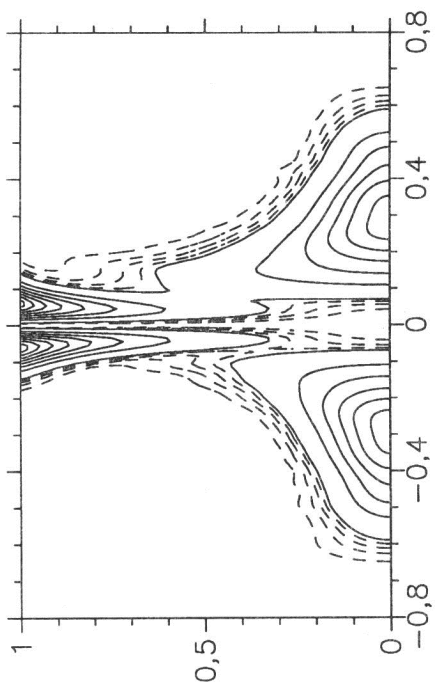
$R_m = 48,114$ ($X; \phi = \pi/2, 3\pi/2$)



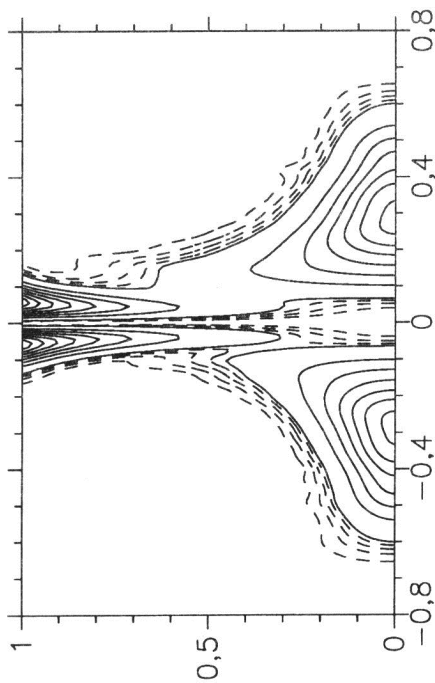
$R_m = 64,152$ ($X; \phi = \pi/2, 3\pi/2$)



$R_m = 80.190$ (X ; $\phi = \pi/2, 3\pi/2$)

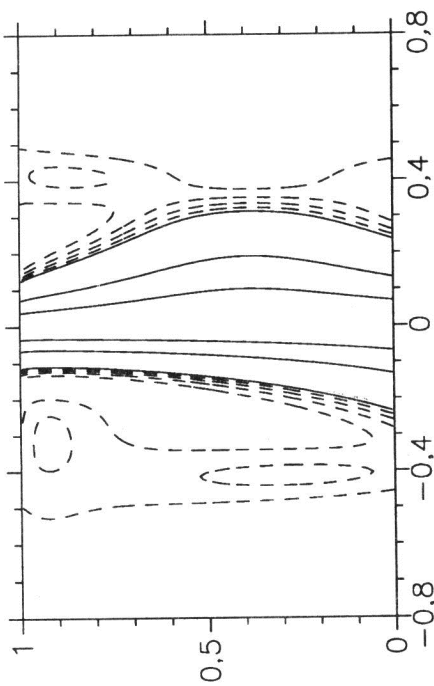
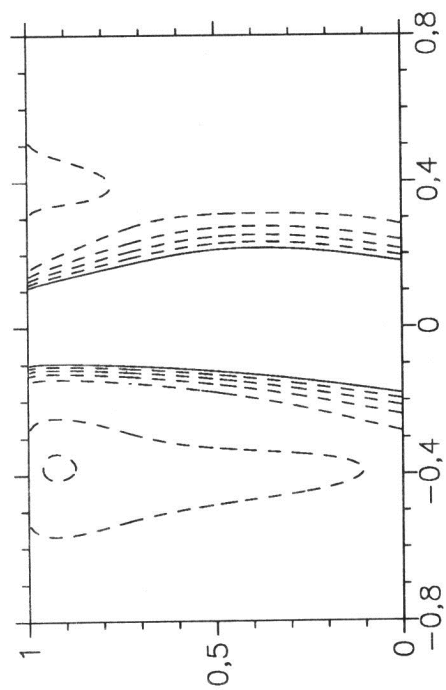


$R_m = 96.228$ (X ; $\phi = \pi/2, 3\pi/2$)

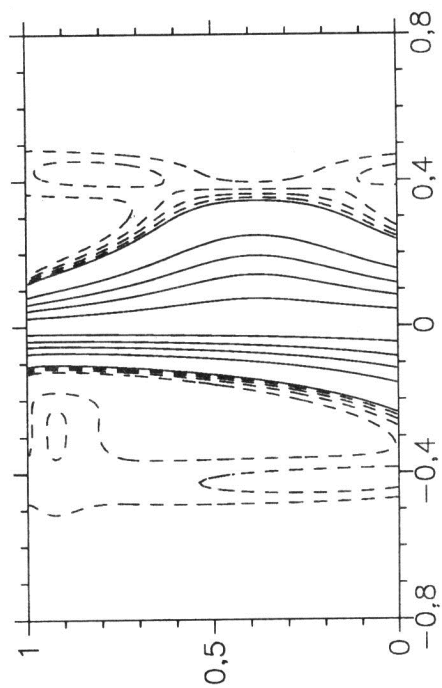


$R_m = 112.266$ (X ; $\phi = \pi/2, 3\pi/2$)

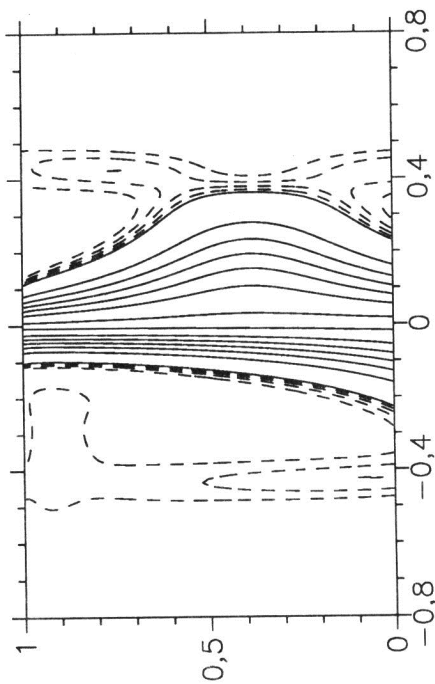
Р и с . 2



$R_m = 16,038$ ($Y; \phi = 0, \pi$) $R = 59$

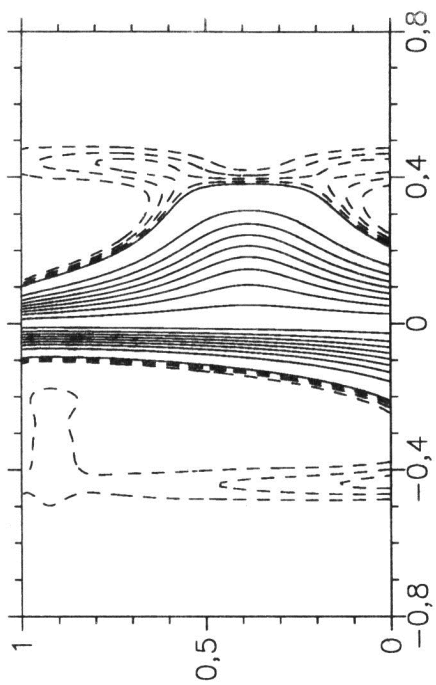
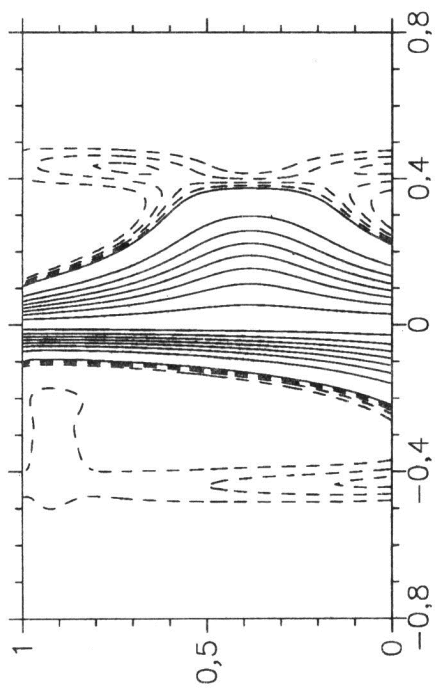


$R_m = 32,076$ ($Y; \phi = 0, \pi$) $R = 59$



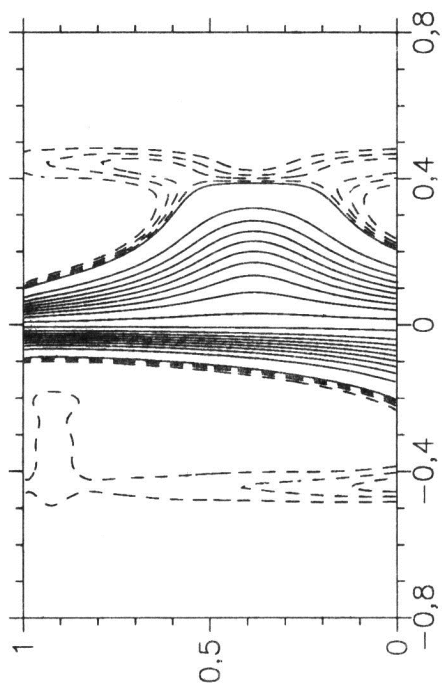
$R_m = 48,114$ ($Y; \phi = 0, \pi$) $R = 59$

$R_m = 64,152$ ($Y; \phi = 0, \pi$) $R = 59$



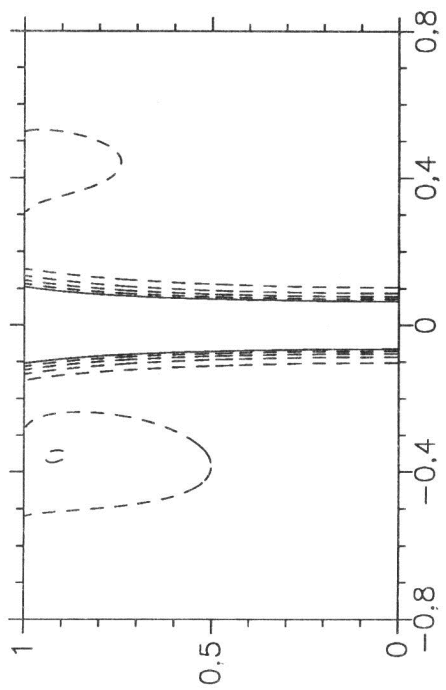
$R_m = 80,190$ ($Y; \phi = 0, \pi$) $R = 59$

$R_m = 96,228$ ($Y; \phi = 0, \pi$) $R = 59$

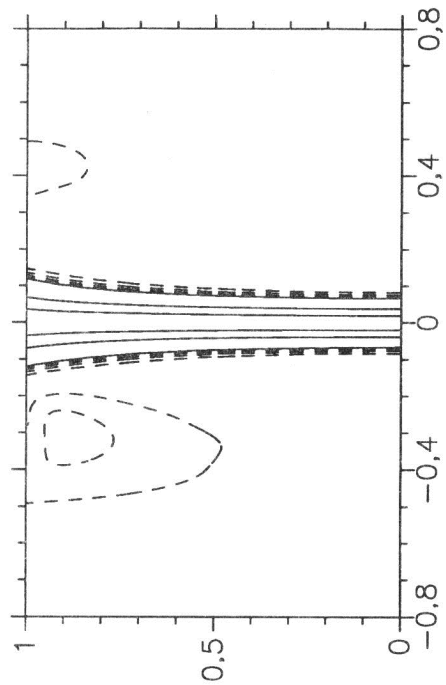


$R_m = 112,266$ ($Y; \phi = 0, \pi$) $R = 59$

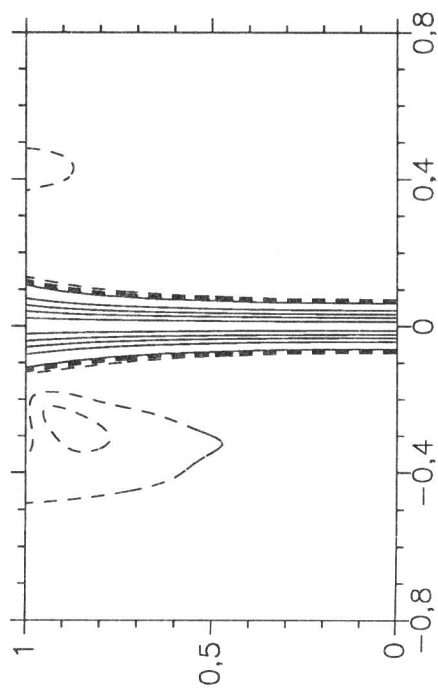
Р и с . 3



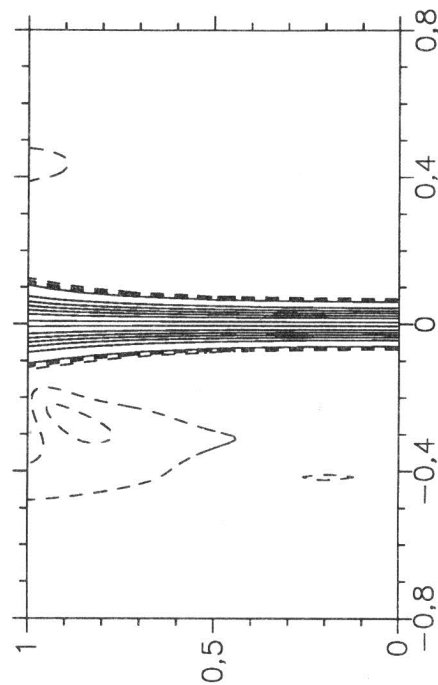
$R_m = 16,038$ ($Y; \phi = \pi/2, 3\pi/2$)



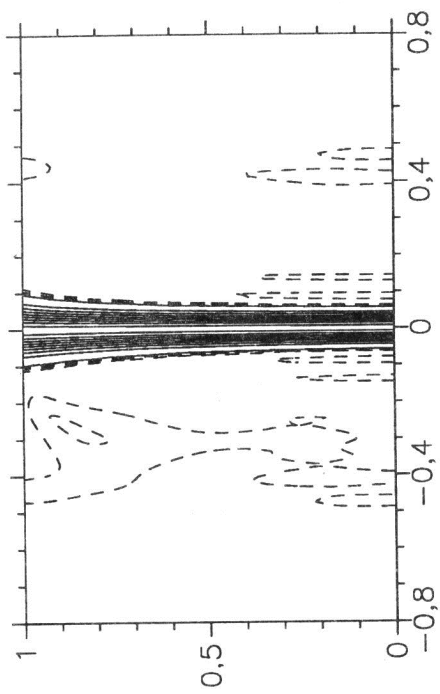
$R_m = 32,076$ ($Y; \phi = \pi/2, 3\pi/2$)



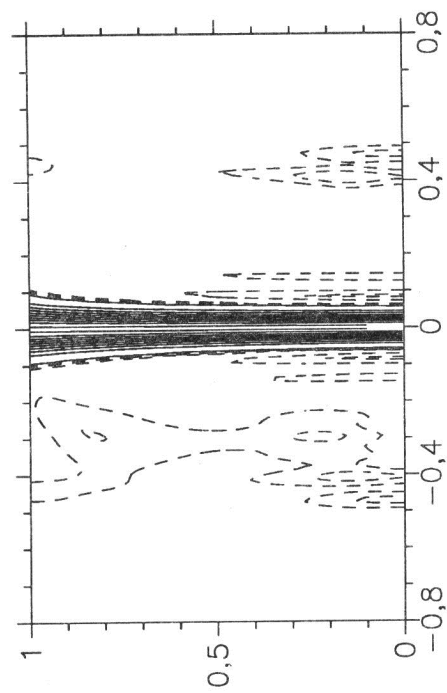
$R_m = 48,114$ ($Y; \phi = \pi/2, 3\pi/2$)



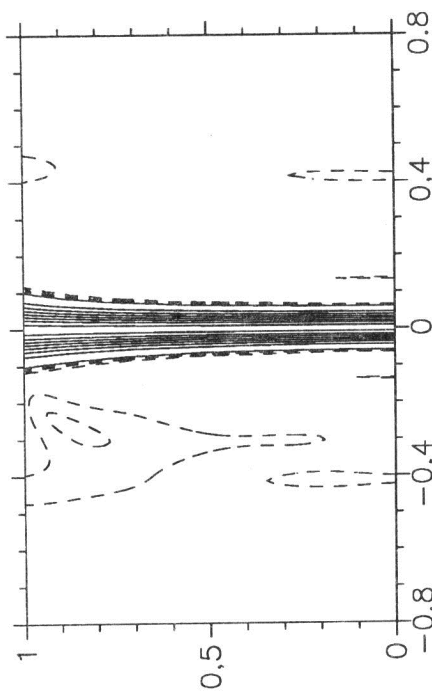
$R_m = 64,152$ ($Y; \phi = \pi/2, 3\pi/2$)



$R_m = 96,228 \quad (Y; \phi = \pi/2, 3\pi/2)$



$R_m = 112,266 \quad (Y; \phi = \pi/2, 3\pi/2)$



$R_m = 80,190 \quad (Y; \phi = \pi/2, 3\pi/2)$

приведен коэффициент $\alpha_{1, -1, 1}^t$ при $\text{Im } T_{1, 1, 1} / \|\text{Im } T_{1, 1, 1}\|$, как более представительный.

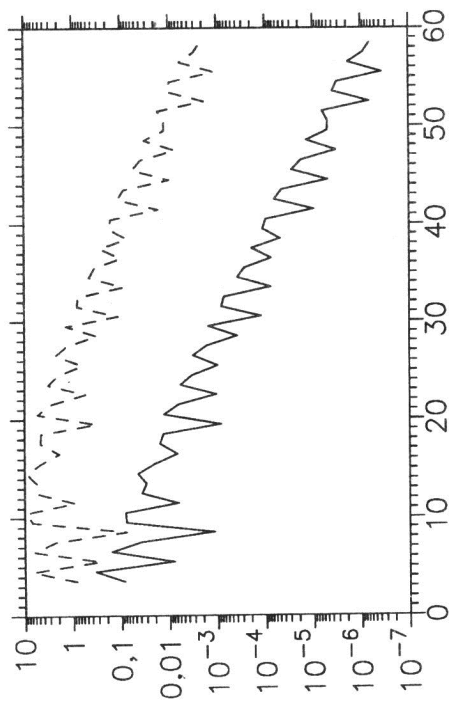
Т а б л и ц а 1

| R | N' _R | A | | | B | | | C | | |
|----|-----------------|----------------------|----------------------|------------------------|----------------------|------------------------|------------------------|---|--|--|
| | | R _m =29,4 | R _m =15,6 | R _m =16,038 | R _m =15,3 | R _m =16,038 | R _m =32,076 | | | |
| 13 | 269 | -0,12103 | -0,29098 | -0,24665 | -0,22170 | -0,15668 | 0,79716 | | | |
| 15 | 359 | -0,19423 | -0,08888 | -0,03444 | -0,06943 | 0,00888 | 1,23765 | | | |
| 17 | 590 | -0,16356 | -0,00522 | 0,05788 | 0,03712 | 0,13769 | 1,70893 | | | |
| 19 | 837 | 0,12664 | 0,04524 | 0,10954 | 0,06153 | 0,16712 | 1,65329 | | | |
| 21 | 1161 | 0,07809 | 0,04335 | 0,10654 | 0,04168 | 0,14206 | 1,55891 | | | |
| 23 | 1580 | 0,03621 | 0,02037 | 0,08090 | 0,01261 | 0,10597 | 1,30090 | | | |
| 25 | 2052 | 0,03894 | 0,00900 | 0,06792 | 0,01385 | 0,10637 | 1,31300 | | | |
| 27 | 2485 | 0,00738 | -0,00947 | 0,04804 | 0,00103 | 0,09128 | 1,26903 | | | |
| 29 | 3168 | -0,00701 | -0,01268 | 0,04451 | -0,00330 | 0,08599 | 1,23544 | | | |
| 31 | 3852 | -0,00753 | -0,01329 | 0,04382 | -0,00493 | 0,08410 | 1,21217 | | | |
| 35 | 5690 | 0,00268 | -0,01255 | 0,04455 | -0,00429 | 0,08495 | 1,21111 | | | |
| 39 | 7917 | 0,00011 | -0,01228 | 0,04485 | -0,00420 | 0,08502 | 1,21607 | | | |
| 43 | 10720 | 0,00179 | -0,01272 | 0,04435 | -0,00436 | 0,08480 | 1,21742 | | | |

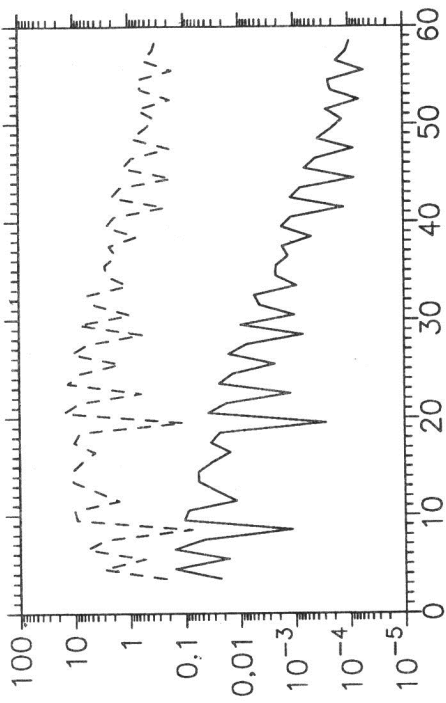
Степень согласия тестовых расчетов с результатами [2] оказывается существенно лучше, чем это предполагали результаты [1]. Основной вывод статьи [1] о том, что характер наблюдаемой зависимости доминирующих собственных значений от величины магнитного числа Рейнольдса не противоречит гипотезе, что данное поле скоростей является генератором быстрого динамо, остается в силе. Такое заключение, однако, требует теоретического подтверждения, или, как минимум, проведения расчетов для существенно больших значений магнитного числа Рейнольдса, выполняемых автором в настоящее время.

Для построения рис.1-4 были использованы результаты расчетов с 28081 базисными функциями (R=59). Для иллюстрации того, насколько это множество предоставляет достаточное разрешение для представления собственных векторов, на рис.5 и 6 (для подпространств X и Y соответственно) приведены графики энергетического спектра (логарифмический масштаб) как функции "волнового числа" для магнитного поля В (сплошная линия) и плотности тока rot В (пунктир). Точнее, на графиках в точках k+1/2 (k - целые) отложены по вертикали значения величин $\lg \sum \alpha_s^2$ и $\lg \sum \zeta_s \alpha_s^2$, где α_s - коэффициенты разложения нормированного собственного вектора по использованному базису

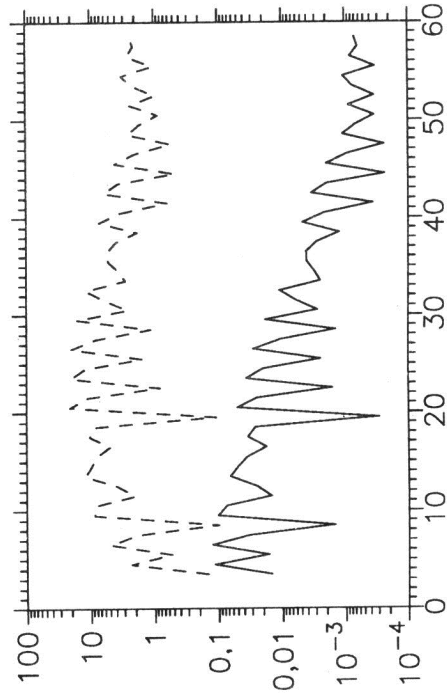
| R | σ/α | R_m | | | | | | |
|-------------------|-------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | | 16,038 | 32,076 | 48,114 | 64,152 | 80,190 | 96,228 | 112,266 |
| Подпространство X | | | | | | | | |
| 27 | σ_R | 0,00223 | 0,86225 | 1,09382 | 1,18133 | 1,22496 | 1,24526 | 1,24827 |
| 31 | σ_R | -0,00213 | 0,82315 | 1,00789 | 1,06319 | 1,09611 | 1,12399 | 1,14895 |
| 55 | σ_R | -0,00158 | 0,82180 | 0,99163 | 1,01311 | 1,00533 | 0,99531 | 0,98680 |
| 59 | σ_R | -0,00159 | 0,82164 | 0,99132 | 1,01162 | 1,00027 | 0,98461 | 0,96982 |
| 27 | α_{1-12}^P | 0,39326 | 0,38763 | 0,34319 | 0,30880 | 0,28206 | 0,26096 | 0,24395 |
| 31 | α_{1-12}^P | 0,39485 | 0,39606 | 0,35798 | 0,33008 | 0,31030 | 0,29610 | 0,28563 |
| 55 | α_{1-12}^P | 0,39454 | 0,39338 | 0,35136 | 0,31878 | 0,29283 | 0,27099 | 0,25218 |
| 59 | α_{1-12}^P | 0,39454 | 0,39343 | 0,35157 | 0,31943 | 0,29445 | 0,27415 | 0,25725 |
| 27 | α_{1-11}^t | -0,57902 | -0,37834 | -0,30764 | -0,26748 | -0,24039 | -0,22159 | -0,20839 |
| 31 | α_{1-11}^t | -0,58001 | -0,38924 | -0,33095 | -0,30190 | -0,28296 | -0,26946 | -0,25925 |
| 55 | α_{1-11}^t | -0,58058 | -0,39279 | -0,33751 | -0,31081 | -0,29156 | -0,27489 | -0,26010 |
| 59 | α_{1-11}^t | -0,58058 | -0,39281 | -0,33764 | -0,31158 | -0,29395 | -0,27977 | -0,26785 |
| Подпространство Y | | | | | | | | |
| 27 | σ_R | -0,16976 | 0,78480 | 1,05700 | 1,15218 | 1,19200 | 1,21925 | 1,24893 |
| 31 | σ_R | -0,16799 | 0,83820 | 1,19268 | 1,40219 | 1,56863 | 1,71109 | 1,83359 |
| 55 | σ_R | -0,16221 | 0,87187 | 1,22398 | 1,38689 | 1,47803 | 1,53564 | 1,57561 |
| 59 | σ_R | -0,16222 | 0,87216 | 1,22624 | 1,39253 | 1,48768 | 1,54936 | 1,59306 |
| 27 | α_{102}^P | 0,04509 | 0,05290 | 0,04814 | 0,04263 | 0,03730 | 0,03255 | 0,02856 |
| 31 | α_{102}^P | 0,04493 | 0,05270 | 0,04653 | 0,03943 | 0,03336 | 0,02866 | 0,02512 |
| 55 | α_{102}^t | -0,79353 | -0,62728 | -0,54237 | -0,49016 | -0,45267 | -0,42331 | -0,39911 |
| 59 | α_{102}^t | -0,79353 | -0,62711 | -0,54098 | -0,48645 | -0,44611 | -0,41388 | -0,38718 |
| 27 | α_{112}^P | 0,10886 | 0,12771 | 0,11622 | 0,10292 | 0,09005 | 0,07859 | 0,06895 |
| 31 | α_{112}^P | 0,10847 | 0,12723 | 0,11233 | 0,09519 | 0,08053 | 0,06919 | 0,06064 |
| 55 | α_{112}^P | 0,11008 | 0,13577 | 0,13004 | 0,12260 | 0,11567 | 0,10937 | 0,10357 |
| 59 | α_{112}^P | 0,11008 | 0,13576 | 0,13000 | 0,12245 | 0,11541 | 0,10907 | 0,10340 |



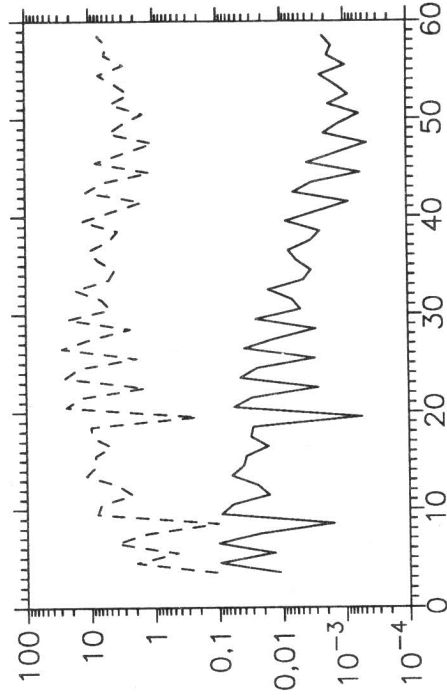
$R_m = 32,076$ (X) $R = 59$

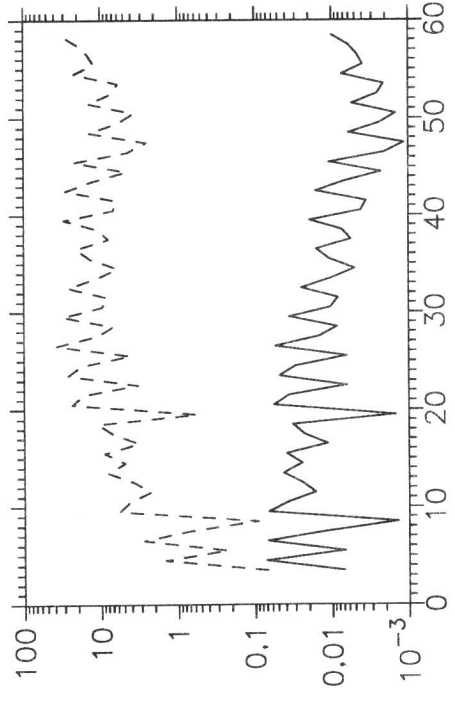
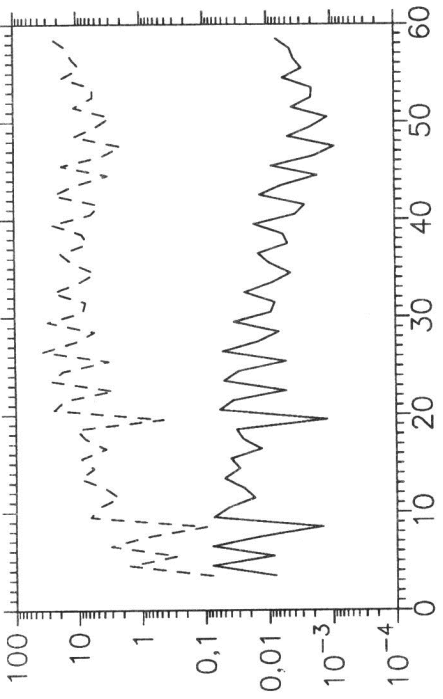
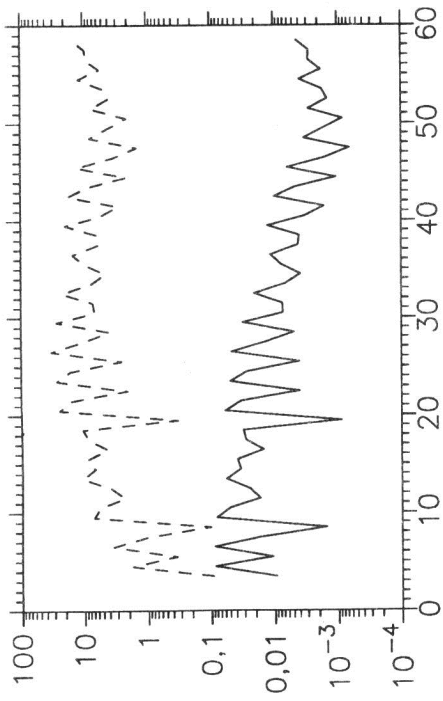


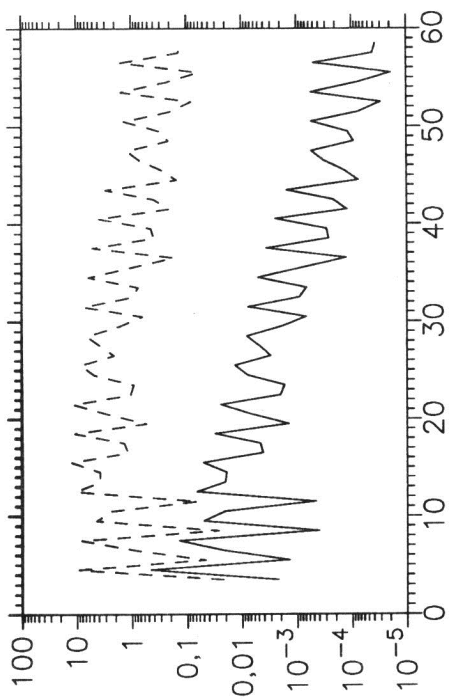
$R_m = 48,114$ (X) $R = 59$



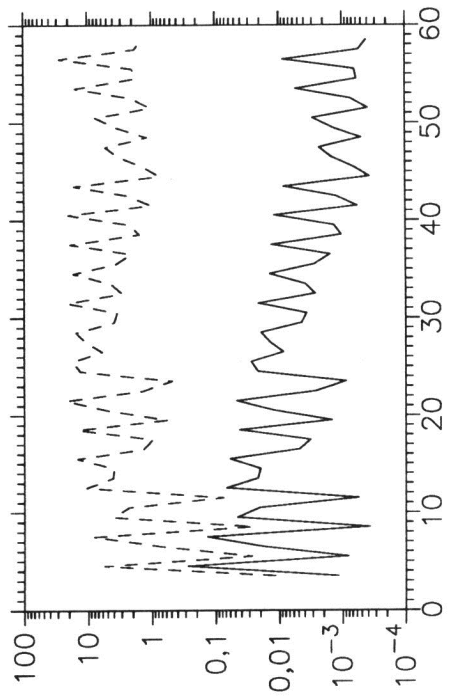
$R_m = 64,152$ (X) $R = 59$



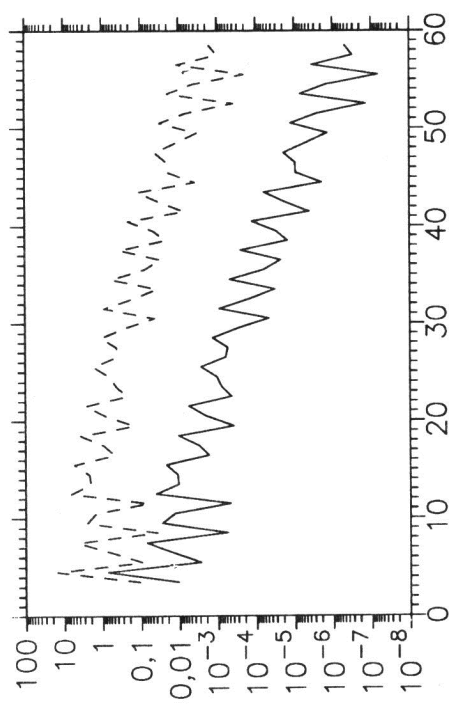




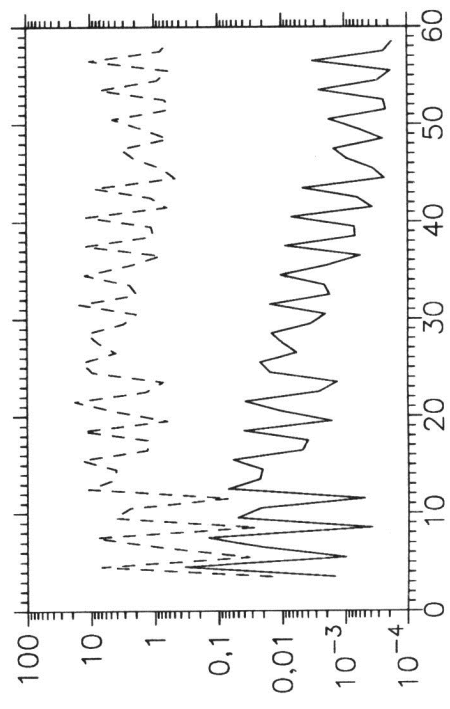
$R_m = 32,076$ (Y) $R = 59$



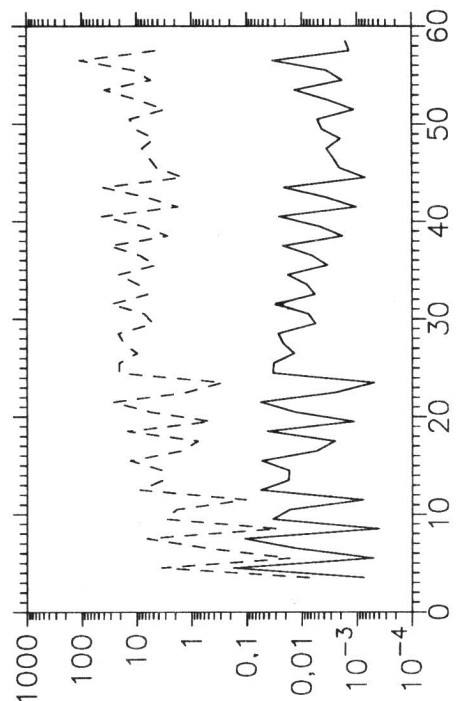
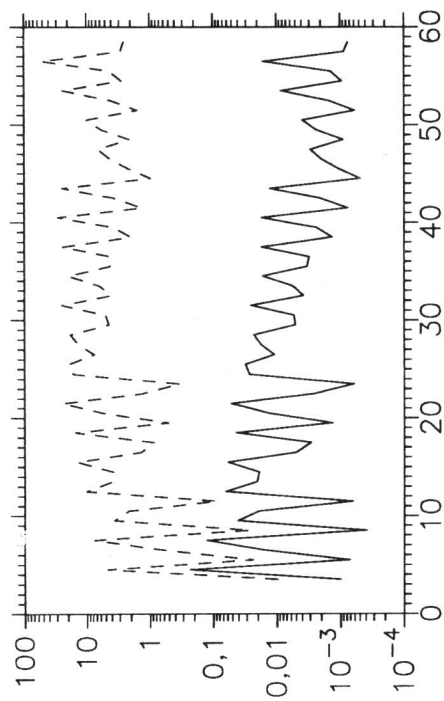
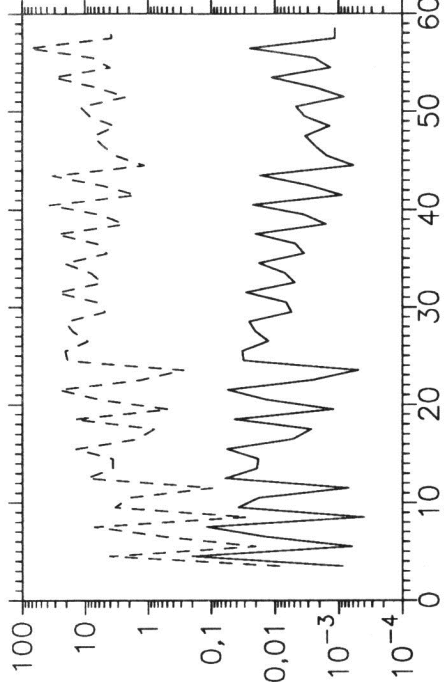
$R_m = 64,152$ (Y) $R = 59$



$R_m = 16,038$ (Y) $R = 59$



$R_m = 48,114$ (Y) $R = 59$



собственных функций оператора Лапласа $\Delta f_s = -\zeta_s f_s$, а суммирование проводится по s , для которых $k^2 < \zeta_s < (k+1)^2$. Сходимость собственных чисел при $R=59$ удовлетворительна для всех рассмотренных значений магнитного числа Рейнольдса. Наблюдаемая степень затухания энергетического спектра показывает, однако, что разрешение достаточно для представления плотности тока для $R_m \leq 32,076$ и собственной моды магнитного поля для $R_m \leq 48,114$. Вместе с тем визуальные отличия рис.1-4 от соответствующих карт, отвечающих $R=55$ (22678 базисных функций), незначительны.

Поведение собственных чисел оператора индукции на изученном интервале магнитного числа Рейнольдса оказывается проще, чем в случае АВС-потоков в пространственно-периодической геометрии. В рассматриваемой задаче не наблюдается эффект перемежаемости зон числа Рейнольдса, где нет генерации, и зон, в которых имеет место динамо [3-5]. В каждом из собственных подпространств X и Y нет перестройки магнитных мод, отвечающих доминирующему собственному значению, однако максимальное собственное значение достигается в подпространстве X при $R_m = 16,038$ и в подпространстве Y при $R_m \geq 32,076$.

Укажем также правильный вариант формул (12) из статьи [1]:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} ([v_J^j, T_{nmk}], \text{rot } \overline{T}_{n, m+j, k}^{\prime}) dx^3 = \\ & = \pi I(m, n, j, J, n') Y(n, \gamma_{nk}, n', \gamma_{n'k}, J, \delta) + \\ & + 2\pi i \delta n'(n'+1) A(m, n, j, J, n') \int_0^1 a_J(\delta \rho) a_n(\beta_{nk} \rho) a_{n'}(\gamma_{n'k}, \rho) \rho^{-2} d\rho, \\ & \int_{\Omega} ([v_J^j, T_{nmk}], \text{rot } \overline{P}_{n, m+j, k}^{\prime}) dx^3 = \\ & = 2\pi i \beta_{n, k}^2 J(J+1) A(m, n, j, J, n') \int_0^1 a_J(\delta \rho) a_n(\beta_{nk} \rho) a_{n'}(\gamma_{n'k}, \rho) \rho^{-2} d\rho, \\ & \int_{\Omega} ([v_J^j, P_{nmk}], \text{rot } \overline{T}_{n, m+j, k}^{\prime}) dx^3 = \\ & = \pi \delta I(m, n, j, J, n') Y(J, \delta, n, \beta_{nk}, n', \gamma_{n'k}, J) + \\ & + 2\pi i A(m, n, j, J, n') Z(J, \delta, n, \beta_{nk}, n', \gamma_{n'k}, J), \\ & \int_{\Omega} ([v_J^j, P_{nmk}], \text{rot } \overline{P}_{n, m+j, k}^{\prime}) dx^3 = \\ & = \pi \beta_{n, k}^2 I(m, n, j, J, n') Y(n', \beta_{n'k}, J, \delta, n, \beta_{nk}) + \\ & + 2\pi i \delta \beta_{n, k}^2 n(n+1) A(m, n, j, J, n') \int_0^1 a_J(\delta \rho) a_n(\beta_{nk} \rho) a_{n'}(\gamma_{n'k}, \rho) \rho^{-2} d\rho, \end{aligned}$$

а также рекуррентных соотношений для присоединенных многочленов Лежандра:

$$\begin{aligned} (1-c^2)^{-1/2} P_m^m(c) &= (2m-1) P_{m-1}^{m-1}(c), \\ (1-c^2)^{-1/2} P_{m+1}^m(c) &= (2m+1) P_m^{m-1}(c), \end{aligned} \quad (1)$$

которые были приведены в [1] с опечатками.

Отметим, наконец, что вопрос эквивалентности норм функциональных пространств Соболева и пространств $H^q(\Omega)$ рассмотрен с большей полнотой в [6].

2°. Для расчетов доминирующих собственных значений и соответствующих собственных векторов оператора магнитной индукции по методу Галеркина с большим числом базисных функций потребовалась значительная модификация вычислительных алгоритмов.

а). При вычислении элементов матрицы Галеркина необходимо определять значения интегралов вида

$$\int_0^1 a_n(y_i \rho) a_n(y_j \rho) a_n(y_k \rho) \rho^{-m} d\rho.$$

где $a_n(z) = (\pi z/2)^{1/2} J_{n+1/2}(z)$; $J_{n+1/2}(z)$ - функция Бесселя; $m=0$ или 2 ; i, j, k - натуральные числа; $i+j+k$ - нечетно; $y_p = const$.

При этих ограничениях подынтегральное выражение является четной аналитической функцией с единственной особенностью на бесконечности. Как показали экспериментальные расчеты, алгоритм, приведенный ниже, является существенно более быстрым, чем основанный на формулах, предложенных для вычисления этих интегралов в [1].

Сделаем подстановку $\rho = \cos \xi$ и представим каждый сомножитель под знаком интеграла в виде ряда Фурье по ξ на отрезке $[0, 2\pi]$:

$$a_n(y \cos \xi) \cos^{-m} \xi = \sum_{k \geq 0}^{\infty} \hat{a}_k(n, y, m) \cos k\xi,$$

(суммирование ведется по k , имеющим ту же четность, что и $n+1-m$),

$$\hat{a}_k(n, y, m) = \frac{2^m}{1 + \delta_0^k} \sum_{k \geq \max(0, (m-n-1)/2)}^{\infty} C_{k+(n+1-m)/2}^{n+1+2k} \frac{(-1)^k (y/4)^{n+1+2k}}{k! \prod_{p=1}^{n+k} (p + \frac{1}{2})}$$

[7], δ_0^k - символ Кронекера. Тогда

$$\begin{aligned} &\int_0^1 a_n(y_i \rho) a_n(y_j \rho) a_n(y_k \rho) \rho^{-m} d\rho = \\ &= \sum_{p, q, s}^{\infty} \hat{a}_p(n_i, y_i, 0) \hat{a}_q(n_j, y_j, 0) \hat{a}_s(n_k, y_k, 2) [(1-(p+q+s)^2)^{-1} + \\ &+ (1-(p+q-s)^2)^{-1} + (1-(p-q+s)^2)^{-1} + (1-(p-q-s)^2)^{-1}] / 4. \end{aligned}$$

Поскольку функция $a_n(y \cos \xi) \cos^{-m} \xi$ является периодической и бес-

конечно дифференцируемой на всем интервале периодичности (включая его граничные точки), с ростом k коэффициенты $\hat{a}_k(n, y, m)$ быстро сходятся к нулю. При больших значениях параметров n и y ($y \geq 30$, если вычисления проводить с так называемой двойной точностью, т.е. приблизительно с 16 десятичными цифрами) имеет место существенная прогрессирующая потеря точности (вследствие хорошо известного эффекта потери точности при взаимном сокращении больших чисел разных знаков, имеющих конечное число верных цифр [8]), поэтому для их вычисления была программно реализована арифметика контролируемой точности. Временные затраты на разложение в ряд Фурье составляют тем не менее малую часть (менее 5%) общего времени вычисления этих интегралов, так как каждый из этих рядов используется при вычислении большого числа интегралов указанного вида.

б). Прогрессирующая потеря точности при больших значениях индексов n, n_1, n_2 может также иметь место (вследствие той же причины, что и в случае гармоник Фурье $\hat{a}_k(n, y, m)$) при вычислении интегралов по угловой координате вида

$$I(m_1, n_1, m_2, n_2, n) = \int_{-1}^1 P_{n_1}^{|m_1|}(c) P_{n_2}^{|m_2|}(c) P_n^{|m_1+m_2|}(c) dc,$$

$$A(m_1, n_1, m_2, n_2, n) = \int_{-1}^1 (m_2 P_{n_1}^{|m_1|} P_{n_2}^{|m_2|} - m_1 P_{n_1}^{|m_1|} P_{n_2}^{|m_2|}) P_n^{|m_1+m_2|}(c) dc,$$

($P_n^m(c)$, $0 \leq m \leq n$ - присоединенные многочлены Лежандра, точка обозначает дифференцирование функции по ее аргументу) с использованием известных соотношений, выражающих эти интегралы через коэффициенты Клебша-Гордона [9,10]. Для нейтрализации этого эффекта достаточно правильно планировать порядок вычислений.

Именно, будем предполагать (без ограничения общности в силу симметрии), что $n_2 \geq n_1$ и обозначим

$$Q = \frac{2(-1)^{n_1+m_1+q+n} q!(n+m_1+m_2)!}{(q-n_1)!(q-n_2)!(q-n)!(n-m_1-m_2)!}, \quad q = (n_1+n_2+n)/2.$$

При $n_1+n_2 \leq n$ или $|n_1-n_2| \geq n$ оба интеграла равны нулю: $I=A=0$; кроме того, в силу свойств четности присоединенных многочленов Лежандра $A(m_1, n_1, m_2, n_2, n)=0$, если $n+n_1+n_2$ четно, и $I(m_1, n_1, m_2, n_2, n)=0$, если $n+n_1+n_2$ нечетно. Вследствие этого и поскольку один из индексов n, n_1, n_2 совпадает с принимающим небольшое значение индексом функции Бесселя, определяющей поле скорости, достаточно рассмотреть два случая: $n_1 \cong n_2 \gg n$ или $n_2 \cong n \gg n_1$.

При $n_1 \approx n_2 \gg n$ сомножители в сумме, определяющей I, группируются следующим образом:

$$I = Q \sum_{s=\max(0, n-n_2-m_1)}^{\min(n-m_1-m_2, n_1-m_1)} \frac{(-1)^s (n-m_1-m_2)!}{[s!(n-m_1-m_2-s)!]} \left[\frac{(n_1+m_1+s)!(n+n_2-m_1-s)!}{(n_1+n_2+n+1)!} \right] \times \\ \times \left[\frac{(n_1+n_2-n)!}{(n_1-m_1-s)!(n_2-n+m_1+s)!} \right],$$

тогда как при $n_2 \approx n \gg n_1$

$$I = Q \left[\frac{(n_1+n_2-n)!(n-m_1-m_2)!}{(n_1+n_2+n+1)!} \right] \times$$

$$\times \sum_{s=\max(0, n-n_2-m_1)}^{\min(n-m_1-m_2, n_1-m_1)} \frac{(-1)^s (n_1+m_1+s)!}{[s!(n_1-m_1-s)!]} \left[\frac{(n+n_2-m_1-s)!}{(n-m_1-m_2-s)!(n_2-n+m_1+s)!} \right],$$

и в каждой группе (выделенной в формулах квадратными скобками) после взаимного сокращения остается небольшое число сомножителей.

Чтобы рассмотреть интегралы вида А предположим сначала, что $m_1 \neq 0$ и $m_2 \neq 0$. В силу антисимметрии А при перестановке пар индексов (m_1, n_1) , (m_2, n_2) и (m_1+m_2, n) (см. формулу (11) в [1]) будем без ограничения общности предполагать, что $m_1 > 0$, $m_2 > 0$. Интегралы вида А можно выразить тогда в виде суммы интегралов вида I с малым числом слагаемых, используя следующие рекуррентные соотношения [11] для присоединенных многочленов Лежандра:

$$m_2 \dot{P}_{n_1}^{m_1}(c) P_{n_2}^{m_2}(c) - m_1 P_{n_1}^{m_1}(c) \dot{P}_{n_2}^{m_2}(c) = (1-c^2)^{-1/2} (m_2 P_{n_1}^{m_1+1} P_{n_2}^{m_2} - m_1 P_{n_1}^{m_1} P_{n_2}^{m_2+1}),$$

$$P_n^m(c) = -(1-c^2)^{1/2} \sum_{k=0}^s \frac{(n+m)!(n-m-2k-2)!}{(n-m)!(n+m-2k)!} (2n-4k-1) P_{n-2k-1}^{m+1}(c) + \\ + \frac{(n+m)!(n-m-2s-2)!}{(n-m)!(n+m-2s-2)!} P_{n-2s-2}^m(c),$$

где $m=m_1+m_2$, а параметр s выбирается так, чтобы было выполнено одно из равенств: $n-2s-2=|n_1-n_2|-1$ (тогда интеграл, соответствующий последнему слагаемому в (2), равен 0), или $n-2s-2=m \bmod_2(n+m)$ (тогда для редукции интеграла, соответствующего последнему слагаемому в (2), к сумме интегралов вида I используются тождества (1) и

$$m_2 \dot{P}_{n_1}^{m_1}(c) P_{n_2}^{m_2}(c) - m_1 P_{n_1}^{m_1}(c) \dot{P}_{n_2}^{m_2}(c) = (1-c^2)^{-1/2} \times$$

$$\times (m_2 (n_1 - m_1 + 1) (n_1 + m_1) P_{n_1}^{m_1 - 1} P_{n_2}^{m_2 - 1} - m_1 (n_2 - m_2 + 1) (n_2 + m_2) P_{n_1}^{m_1} P_{n_2}^{m_2 - 1})).$$

Пусть теперь $m_1=0$ или $m_2=0$, т.е. надо вычислить интеграл вида

$$B(m, n, n_1, n_2) = \int_{-1}^1 P_{n_1}^0(c) P_{n_2}^m(c) P_n^m(c) dc = \int_{-1}^1 (1-c^2)^{-1/2} P_{n_1}^1 P_{n_2}^m P_n^m dc,$$

где (при необходимости - вновь после переобозначения коэффициентов) $n \geq n_2$, $m \geq 0$. Тогда применяется рекуррентное соотношение

$$P_n^m(c) = (1-c^2)^{1/2} \sum_{k=0}^s \frac{(n+m)! (n-m+2k)!}{(n-m)! (n+m+2k+2)!} (2n+4k+3) P_{n+2k+1}^{m+1}(c) + \frac{(n+m)! (n-m+2s+2)!}{(n-m)! (n+m+2s+2)!} P_{n+2s+2}^m(c), \quad (3)$$

причем параметр s определяется из равенства $n+2s+2=n_1+n_2+1$ (тогда интеграл, соответствующий последнему слагаемому в (3), равен нулю).

в. Доминирующее собственное значение матрицы Галеркина L - оператора магнитной индукции и соответствующий собственный вектор вычисляются (как и в [3]) итерированием некоторого начального вектора b_0 :

$$b_{i+1} = T b_i / |T b_i|, \quad T = I + \varepsilon L$$

(I - единичная матрица) при достаточно малом $\varepsilon > 0$, пока величина невязки $\varepsilon^{-1} |\sigma_i b_i - T b_i|$ превышает некоторую пороговую величину. Для ускорения сходимости итерационного процесса были разработаны специальные методы, идейно близкие к описанным в [12,13]. Алгоритм ускорения сходимости включает в себя следующие элементы.

1. Относительная величина проекции начального вектора b_0 на собственное подпространство матрицы L , отвечающее комплексным собственным значениям $\text{Re} \lambda \pm i \text{Im} \lambda$, в процессе итераций растет или убывает, как $|1 + \varepsilon \lambda|^i$. В частности, эта компонента стремится к нулю, только если $|1 + \varepsilon \lambda| < \max_k |1 + \varepsilon \lambda_k|$, что при большой величине $|\text{Im} \lambda|$ накладывает сильное ограничение на скорость сходимости. Напротив; если выбрать ε достаточно большим, итерации будут быстро сходиться к собственному подпространству, для которого величина $(1 + \varepsilon \text{Re} \lambda)^2 + (\varepsilon \text{Im} \lambda)^2$ - максимальна.

В соответствии с этим для ускорения сходимости основного итерационного процесса предварительно вычисляются несколько "неустойчивых" собственных значений γ_q матрицы T , имеющих большую мнимую часть, и определяются коэффициенты соответствующих характеристиче-

ских квадратических многочленов $p_q(x)$ (т.е. многочленов с действительными коэффициентами, для которых пара чисел v_q и \bar{v}_q является корнями). В качестве начального вектора вместо b_0 удобно выбрать тогда $\bar{b}_0 = \prod_q p_q(T)b_0$, проекции которого на "неустойчивые" собственные подпространства, отвечающие вычисленным собственным значениям v_q , равны нулю и уже непосредственно не ухудшают сходимость. (Разумеется, поскольку v_q определяются с некоторой погрешностью и поскольку в процессе итераций накапливаются ошибки округления, замену $\bar{b}_i = \prod_q p_q(T)b_i$ необходимо производить каждый раз после определенного числа итераций).

Эта процедура рекурсивно используется и при вычислении самих "неустойчивых" собственных значений v_q .

Описанная ниже группа методов ускорения сходимости применяется в предположении, что итерационный процесс продвинулся настолько, что итерируемый вектор b_i можно считать принадлежащим некоторому конечномерному пространству малой размерности.

Пусть b - аппроксимация собственного вектора матрицы T с действительным собственным значением. В качестве оценки этого собственного значения естественно принять число σ , на котором достигается минимум невязки $|Tb - \sigma b|$: $\sigma = (Tb, b) / |b|^2$, а в качестве меры погрешности "несобственности" - нормированную величину невязки при этом значении σ : $E(b) \stackrel{\text{def}}{=} |Tb - b(Tb, b) / |b|^2| / |b|$.

ii. Пусть матрица T имеет нормированные собственные вектора h и h' с действительными собственными значениями $v \neq 0$ и $v' \neq v$, итерации сходятся к собственному вектору h , и некоторая итерация может быть представлена в виде

$$b_i = (h + \kappa h' + \sigma(\kappa)) / |h + \kappa h' + \sigma(\kappa)| = h + \kappa (h' - (h, h')h) + \sigma(\kappa)$$

(κ - малый параметр). Тогда

$$b_{i+q} = \frac{v^q h + \kappa v'^q h' + \sigma(\kappa)}{|v^q h + \kappa v'^q h' + \sigma(\kappa)|} = h + \kappa \left(\frac{v'}{v}\right)^q (h' - (h, h')h) + \sigma(\kappa), \quad (4)$$

соответствующие оценки собственного значения v имеют вид

$$\sigma_{i+q} = (Tb_{i+q}, b_{i+q}) = v + \kappa \left(\frac{v'}{v}\right)^q (v' - v) (h, h') + \sigma(\kappa),$$

а меры погрешности "несобственности" -

$$E(b_{i+q}) = |Tb_{i+q} - \sigma_{i+q} b_{i+q}| = |\kappa \left(\frac{v'}{v}\right)^q (v' - v) (h' - (h, h')h) + \sigma(\kappa)|.$$

Таким образом,

$$b_{i+q} = h + \frac{h' - (h, h')h}{|h' - (h, h')h|} \frac{E(b_{i+q})}{|v' - v|} \text{sign}(\kappa \left(\frac{v'}{v}\right)^q) + \sigma(\kappa).$$

Иными словами, если $\nu'/\nu \geq 0$ (при расчетах доминирующего собственного значения это условие, как правило, выполнено в силу малости ε), или, в противном случае, если рассматривать последовательность итераций с номерами одинаковой четности, то каждая итерация имеет вид суммы искомого собственного вектора h и некоторого вектора, ортогонального h , направление которого неизменно, а длина пропорциональна мере погрешности. (Подчеркнем, что данный результат получен без предположения о симметричности матрицы T .)

На этом анализе основан следующий алгоритм ускорения сходимости для данного случая (в предположении, что оба собственных значения - доминирующее ν и субдоминирующее ν' - имеют одинаковый знак).

1. Вычисляются итерации b_{i+q} , $0 \leq q \leq Q$.
2. Восстанавливается (например, по методу наименьших квадратов) линейная зависимость $b_{i+q}(E(b_{i+q}))$ (т.е. определяются векторы ν , ν' , минимизирующие $\sum_{q=0}^Q |b_{i+q} - E(b_{i+q})\nu' - \nu|^2$).

3. Определяется $\hat{\varepsilon}$, минимизирующее $E(\nu + \varepsilon\nu')$, и в качестве нового начального вектора для дальнейших итераций пробуются $\nu + \hat{\varepsilon}\nu'$. (Этот шаг носит эвристический характер: он отражает тот факт, что все приведенные выше рассуждения сделаны с точностью $\sigma(\kappa)$.)

iii. Рассмотрим случай, когда некоторая итерация имеет вид

$$b_i = (h + \kappa h' + \sigma(\kappa)) / |h + \kappa h' + \sigma(\kappa)|,$$

где h и h' принадлежат некоторым d - и d' -мерным собственным подпространствам V и V' матрицы T , пересечение которых тривиально и которые отвечают разным наборам собственных значений (т.е. если $\nu \in V$ - собственный вектор отвечающий некоторому кратному собственному значению ν матрицы T , то нет ни одного вектора $\nu' \in V'$, отвечающего этому же собственному значению); κ - малый параметр.

Оценим по последовательности $\{T^q b_i, 0 \leq q \leq d\}$ коэффициенты характеристического многочлена $p(x)$ подпространства V ($p(x)$ - многочлен степени d такой, что $p(T)\nu = 0 \forall \nu \in V$). Например, по методу наименьших квадратов оценка для характеристического многочлена может иметь вид

$$\hat{p}(x) = x^d + \sum_{q=0}^{d-1} \hat{p}_q x^q.$$

где \hat{p}_q - величины, минимизирующие $|T^d b_i + \sum_{q=0}^{d-1} p_q T^q b_i|^2$.

Очевидно, коэффициенты характеристического многочлена $p(x)$ оцениваются с точностью $\sigma(\kappa)$, а корни $p(x)$ приближаются корнями $\hat{p}(x)$ с точностью не хуже величины порядка $\sigma(\kappa^{1/k})$, где k - максимальная

из кратностей корней $p(x)$. Определим

$$w_q \stackrel{\text{def}}{=} |\hat{p}^{k+1}(T)b_{i+q} / \hat{p}^{k+1}(T)b_{i+q}| = |\hat{p}^{k+1}(T)T^q h' + \sigma(1)| / |\hat{p}^{k+1}(T)T^q h'|.$$

В силу сделанных предположений $\hat{p}^{k+1}(T)$ является изоморфизмом V' , поэтому последовательность векторов $\{w_q, 0 \leq q \leq d'\}$ можно использовать для построения оценки $\hat{p}'(x)$ характеристического многочлена $p'(x)$ собственного подпространства V' (например, применяя повторно метод наименьших квадратов), точность которой имеет порядок $\sigma(1)$. Тогда

$$\hat{p}'(T)b_i = (\hat{p}'(T)h + \sigma(x)) / |h + xh' + \sigma(x)|.$$

т.е. вектор $\hat{p}'(T)b_i$, с одной стороны, является лучшим приближением к векторам из подпространства V , с другой, поскольку $\hat{p}'(T)$ является изоморфизмом V , в нем сохранены все компоненты разложения по базису собственных векторов ограничения T на подпространство V .

Указанный метод оптимизации итерационного процесса применялся в расчетах с $d=d'=2$ как при вычислении искомого доминирующего действительного собственного значения, так и при вычислении комплексных "неустойчивых" собственных значений (см. п.i), и с $d=1, d'=2$ при вычислении искомого доминирующего действительного собственного значения. При $d=d'=1$ он является альтернативным методом, применимым к случаю ii, однако экспериментальные расчеты показали, что в этом случае он менее эффективен (так как, по-видимому, алгоритм, приведенный в п.ii более устойчив к шуму $\sigma(x)$ вследствие одновременного использования для определения значений оцениваемых величин большего объема информации из большего числа последовательных итераций). В силу (4) к случаю ii применим также известный Δ^2 -алгоритм ускорения сходимости Эйткена [14], однако при экспериментальных расчетах он оказался еще менее эффективным, по-видимому, в силу той же причины.

Данная работа выполнена автором в период пребывания в Обсерватории Ниццы (Франция), где он был стипендиатом Министерства исследований и технологий Франции. Автор выражает благодарность У.Фришу (U.Frisch) и М.Энону (M.Hénon) за плодотворные обсуждения работы в процессе ее выполнения и коллективу лаборатории G.D.Cassini - CNRS URA 1362 Обсерватории Ниццы за оказанное гостеприимство.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Как хорошо известно [15,16], для генерации магнитного поля в режиме быстрого динамо необходимо наличие у траекторий динамичес-

кой системы, заданной полем скорости проводящей среды, положительного показателя Ляпунова, что обеспечивает экспоненциальное растяжение замороженного магнитного поля. Таким образом, поле скорости не должно иметь глобального (заданного во всей области) аналитического первого интеграла. Действительно,¹ рассматриваемое поле скоростей соленоидально ($\text{div } \mathbf{v}=0$) и, следовательно, мера Лебега (трехмерный евклидов объем) является его инвариантной мерой. Кроме того, если поле скорости имеет первый интеграл $I(\mathbf{x})$, то сужение динамической системы на двумерное многообразие $I(\mathbf{x})=\text{const}$ обладает также инвариантной мерой $ds/|\nabla I|$, поэтому по следствию из мультипликативной эргодической теоремы [17] для почти всех относительно этой меры траекторий определены показатели Ляпунова, равные нулю в силу компактности многообразия. Вследствие соленоидальности потока сумма показателей Ляпунова равна нулю, поэтому в интегрируемом случае почти у всех траекторий все три показателя Ляпунова равны нулю. (Отметим, однако, что, поскольку данным рассуждением установлено, что показатели Ляпунова равны нулю только почти у всех траекторий, мы еще не находимся в условиях теоремы [16] о невозможности быстрого динамо. Не исключено, что, например, возможна локальная быстрая генерация магнитного поля в окрестности гиперболической стационарной точки проводящей жидкости.²)

Вопрос об интегрируемости поля Бельтрами в шаре, выбранного в качестве поля скорости в настоящей работе, исследовался в [18], где было показано, что в зависимости от значений коэффициентов, определяющих систему, возникают три случая.

1. Динамическая система имеет глобальный аналитический первый интеграл, который может быть явно вычислен в квадратурах.

2. Первый интеграл явно вычислить в квадратурах не удастся: численное исследование системы дифференциальных уравнений и построение отображения Пуанкаре дает основание предположить, что траектории динамической системы лежат на гладких поверхностях.

3. При численном исследовании системы траектории динамической системы обнаруживают стохастическое поведение.

Случай 3 имеет место при наличии у динамической системы положительного показателя Ляпунова. Этому случаю отвечает выбор значений коэффициентов, определяющих поле скорости в задаче о кинематическом динамо в [1] и в настоящей работе.

¹ Вишик М.М. Частное сообщение.

² Gilbert A. Частное сообщение.

Случай 2 возникает при возмущении коэффициентов динамической системы, соответствующих интегрируемому случаю 1. Вопрос о глобальной интегрируемости системы в этом случае остается открытым. Он, по-видимому, отвечает ¹ наличию у динамической системы положительного показателя Ляпунова, малого по абсолютной величине и, соответственно, мало развитой хаотичности. На такую возможность указывает тот факт, что при численном построении отображения Пуанкаре точки пересечения плоскости отдельной траекторией динамической системы неравномерно расположены на сечениях этой плоскостью наблюдаемых "гладких инвариантных поверхностей"; последние в рассматриваемом случае необходимо имеют малую, но конечную "толщину". (В принципе, случай 2 может также отвечать интегрируемым динамическим системам.)

В настоящем приложении построено трехпараметрическое семейство коэффициентов, соответствующих случаю 1, т.е. наличию у динамической системы глобального аналитического первого интеграла.

Выделяя полоидальную и тороидальную часть, поле Бельтрами в шаре можно представить в виде [19]

$$v(x) = \text{rot rot } S(x) i_\rho + \delta \text{ rot } S(x) i_\rho,$$

где x - радиус-вектор точки со сферическими координатами (ρ, θ, φ) ;

i_ρ - единичный вектор в направлении радиус-вектора точки x ;

$S(x)/\rho$ - скалярная собственная функция оператора Лапласа, имеющая вид $S(x) = a_j(\delta\rho)Q(\cos\theta, \varphi)$ [10], где

$$Q(c, \varphi) = \sum_{j=-J}^J u^{(j)} P_j^{(j)}(c) \exp(ij\varphi), \quad (5)$$

$u^{(j)} = \text{const}$, $J > 0$ - целое. В координатном представлении уравнения траекторий, задаваемые данным полем скорости, после замены переменных $R = \delta\rho$, $c = \cos\theta$, $\frac{dt}{d\tau} = \rho^2/\delta$ принимают вид

$$\frac{dR}{d\tau} = J(J+1)a_j(R)Q,$$

$$\frac{dc}{d\tau} = \dot{a}_j(R) \frac{\partial Q}{\partial c} (1-c^2) - a_j(R) \frac{\partial Q}{\partial \varphi}, \quad (6)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \dot{a}_j(R) \frac{\partial Q}{\partial \varphi} / (1-c^2) + a_j(R) \frac{\partial Q}{\partial c}.$$

Предложение

а. функция $\xi P_J^0(x)$, $x = \cos\psi \cos\theta + \sin\psi \sin\theta \sin(\varphi - \varphi_0)$, $\psi = \text{const}$, $\varphi_0 = \text{const}$, $\xi = \text{const}$, представима в виде линейной комбинации (5).

¹ Hénon M. Частное сообщение.

б. Пусть $Q(\cos\theta, \varphi) = \xi P_J^0(\chi)$. Тогда система (6) имеет первый интеграл

$$I(R, \chi) = a_J(R) \exp \left[-J(J+1) \int \frac{P_J^0(\chi) d\chi}{(1-\chi^2) \dot{P}_J^0(\chi)} \right]. \quad (7)$$

Доказательство пункта б состоит в непосредственном дифференцировании.

Доказательство пункта а.

Рассмотрим в некоторой ("исходной") сферической системе координат $(\rho, \theta', \varphi')$ функцию $Q(\cos\theta', \varphi') = \xi P_J^0(\cos\theta')$. Она является собственной функцией угловой части оператора Лапласа:

$$\left(\frac{1}{\sin\theta'} \frac{\partial}{\partial\theta'} (\sin\theta' \frac{\partial}{\partial\theta'}) + \sin^{-2}\theta' \frac{\partial^2}{\partial\varphi'^2} \right) \xi P_J^0(\cos\theta') = -J(J+1) \xi P_J^0(\cos\theta'). \quad (8)$$

Рассмотрим ("повернутую") сферическую систему координат (ρ, θ, φ) , полученную из исходной поворотом оси $\theta' = 0, \pi$ на угол Ψ и последующим поворотом плоскости $\varphi' = 0, \pi$ относительно этой оси на угол φ_0 (при совпадении начал координат обеих систем). Угловые координаты при переходе из исходной сферической системы координат к повернутой преобразуются в соответствии с равенствами

$$\cos\theta' = \cos\Psi \cos\theta + \sin\Psi \sin\theta \sin(\varphi - \varphi_0),$$

$$\sin\theta' \cos\varphi' = \sin\theta \cos(\varphi - \varphi_0).$$

Угловая часть оператора Лапласа инвариантна относительно выбора сферической системы координат. поэтому в новой системе координат для $Q(\cos\theta, \varphi) = \xi P_J^0(\chi)$ также будет иметь место равенство (8) [10]. Однако собственное подпространство угловой части оператора Лапласа в пространстве непрерывных (включая полюса $\theta=0, \pi$) функций на сфере, отвечающее собственному значению $-J(J+1)$, состоит из линейных комбинаций вида (5) [10], поэтому представление $\xi P_J^0(\chi)$ в виде (5) возможно (с $u^{(j)}$, зависящими от Ψ и φ_0).

(Поскольку тот факт, что (7) является первым интегралом системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6) для $Q = \xi P_J^0(\cos\theta)$ проверяется тривиально, и так как координатное представление исследуемой динамической системы в виде (6) имеет место в любой сферической системе координат, можно дать независимое доказательство утверждения б) основанное, как и выше, на идее инвариантности относительно выбора сферической системы координат.)

Семейства первых интегралов, построенные в [18] для $J=1, 2$, являются частными случаями трехпараметрических семейств первых интегралов, построенных выше для произвольного J . Им можно дать сле-

дующую геометрическую интерпретацию: они являются первыми интегралами для осесимметричных полей Бельтрами (с произвольной осью симметрии, не обязательно совпадающей с осью $\theta=0, \pi$), и описывают инвариантные тороидальные поверхности с той же осью симметрии. Отметим, что по антидинамо-теореме Каулинга [20] такие поля скоростей не могут также обеспечить медленную генерацию осесимметричного отнесительно этой же оси магнитного поля.

Литература

1. Желиговский В.А. О генерации магнитного поля одним классом течений проводящей жидкости в шаре // Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука, 1989. С.92-108. (Вычисл. сейсмология; Вып. 22).
2. *Pekeris C.L., Accad Y., Shkoller B.* Kinematic dynamos and the Earth's magnetic field// *Phil. Trans. Roy. Soc.* 1973. Vol.A275. P.425-461.
3. Арнольд В.И., Коркина Е.И. Рост магнитного поля в трехмерном стационарном потоке несжимаемой жидкости // Вестн. МГУ. Сер. мат. 1983, N3, С.43-46.
4. *Galloway D.J., Frisch U.* A numerical investigation of magnetic field generation in a flow with chaotic streamlines//*Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics.* 1984. Vol.29. P.13-18.
5. *Galloway D., Frisch U.* Dynamo action in a family of flows with chaotic streamlines// *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics.* 1986. Vol.36. P.53-83.
6. Желиговский В.А. О генерации магнитного поля движением проводящей среды, имеющим внутренний масштаб // Компьютерный анализ геофизических полей. М.: Наука, 1990. С.161-181. (Вычисл. сейсмология; Вып. 23).
7. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Ч.1. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 798с.
8. *McCrahen D.D., Dorn W.S.* Numerical methods and Fortran programming with applications in engineering and science. N.-Y., Sydney, London: John Wiley & Sons. 1964. 457 p.
9. Варшавич Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.
10. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представления групп. М.: Наука, 1965. 588 с.
11. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 800 с.
12. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970. 564 с.
13. *Brezinski С.* Algorithmes d'accélération de la convergence. Étude numérique / Édition Technic, 1978. 392 p.
14. *Aitken.A.C.* On Bernouilli's numerical solution of algebraic equations // *Proc. Roy. Soc.* 1926. Vol. 46. P.289-305.
15. Арнольд В.И., Зельдович Я.Б., Рuzмайкин А.А., Соколов Л.Д. Магнитное поле в стационарном течении с растяжением в римановом пространстве // ЖЭТФ. 1982. Т.81, N6(12). С.2052-2058.

16. Вишик М.М. О возбуждении магнитного поля трехмерным стационарным потоком проводящей жидкости при больших магнитных числах Рейнольдса // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1988. №3. С.3-12.
17. Оселедец В.И. Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем//Тр. Моск. Мат. Об-ва 1968. №19. С.197-231.
18. Желиговский В.А. О стохастическом поведении траекторий одного класса течений в сфере// Численное моделирование и анализ геофизических процессов. М.: Наука, 1987. С.60-65. (Вычисл. сейсмология; Вып. 20).
19. Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980. 339с.
20. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика. М.: Изд-во иностр. лит. 1959. 132с.

УДК 550.311

Б.М.Наймарк, А.Т.Исмаил-заде

ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХСЛОЙНОЙ МОДЕЛИ ВЯЗКОЙ
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СО СЛУЧАЙНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПЛОТНОСТИ

B.M.Naimark, A.T.Ismail-zadeh

THE GRAVITATIONAL INSTABILITY OF A TWO-LAYERED MODEL FOR
VISCIOUS INCOMPRESSIBLE FLUID WITH STOCHASTIC CHANGES IN DENSITY

Fine structure of the Earth crust and upper mantle is not known in much detail. Only some average values, say, of density or wave velocity can be specified in various models. This work presents a study of the gravitational instability in a two-layer non-deterministic model with Newtonian rheology. The density in the upper layer is random, the density in the lower layer (half-space) is deterministic. It is supposed that the density depends only on depth. An inversion in the mean density is assumed. The integro-differential equation is derived for mean velocities, and the boundary conditions are usual for a Newtonian fluid. Using the Laplace transform techniques this problem was reduced to the calculation of roots of an analytic function. To compute the roots a program was constructed based on the principle of the argument. Variation of eigenvalues are computed for several sets of parameters. The existence of oscillatory instability is shown for some ranges of stochastic parameters.

Исследование геодинамических процессов, связанных с различными типами неустойчивости, чаще всего сводятся к анализу моделей, ко-