

16. Вишик М.М. О возбуждении магнитного поля трехмерным стационарным потоком проводящей жидкости при больших магнитных числах Рейнольдса // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1988. №3. С.3-12.
17. Оселедец В.И. Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем//Тр. Моск. Мат. Об-ва 1968. №19. С.197-231.
18. Желиговский В.А. О стохастическом поведении траекторий одного класса течений в сфере// Численное моделирование и анализ геофизических процессов. М.: Наука, 1987. С.60-65. (Вычисл. сейсмология; Вып. 20).
19. Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980. 339с.
20. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика. М.: Изд-во иностр. лит. 1959. 132с.

УДК 550.311

Б.М.Наймарк, А.Т.Исмаил-заде

ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХСЛОЙНОЙ МОДЕЛИ ВЯЗКОЙ
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СО СЛУЧАЙНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПЛОТНОСТИ

B.M.Naimark, A.T.Ismail-zadeh

THE GRAVITATIONAL INSTABILITY OF A TWO-LAYERED MODEL FOR
VISCIOUS INCOMPRESSIBLE FLUID WITH STOCHASTIC CHANGES IN DENSITY

Fine structure of the Earth crust and upper mantle is not known in much detail. Only some average values, say, of density or wave velocity can be specified in various models. This work presents a study of the gravitational instability in a two-layer non-deterministic model with Newtonian rheology. The density in the upper layer is random, the density in the lower layer (half-space) is deterministic. It is supposed that the density depends only on depth. An inversion in the mean density is assumed. The integro-differential equation is derived for mean velocities, and the boundary conditions are usual for a Newtonian fluid. Using the Laplace transform techniques this problem was reduced to the calculation of roots of an analytic function. To compute the roots a program was constructed based on the principle of the argument. Variation of eigenvalues are computed for several sets of parameters. The existence of oscillatory instability is shown for some ranges of stochastic parameters.

Исследование геодинамических процессов, связанных с различными типами неустойчивости, чаще всего сводятся к анализу моделей, ко-

торые характеризуются геометрией, реологическими свойствами, различными параметрами и т.п.: в конечном счете это приводит к системам уравнений математической физики. Коэффициентами этих уравнений являются различные комбинации физических параметров, характеризующих свойства изучаемых объектов. Однако имеющиеся наблюдения не дают возможности описать свойства этих объектов достаточно детально. Такие объекты формировались длительное время под воздействием разнообразных и во многом случайных механических и физико-химических процессов, и при этом чаще всего прослеживается общая тенденция на фоне случайных флуктуаций. Таким образом, для изучения геодинамических процессов естественно применять вероятностные методы [1]. Это относится и к задачам о гравитационной и тепловой неустойчивости. В самом деле, в задачах о гравитационной неустойчивости основную роль (помимо геометрии) играют плотность и вязкость, если выбрана ньютоновская реология. Скачок (инверсия) плотности в 5-10% может приводить к довольно быстрому развитию начальных возмущений. Однако нельзя считать, что плотность известна с точностью 1-2%, а потому естественно предполагать, что плотность является случайной функцией, и изучать эффекты, возникающие после осреднения по ансамблю.

Гравитационная устойчивость детерминированных систем с ньютоновской реологией изучалась в [2-4]. В настоящей работе исследуется устойчивость двухслойной среды со случайной плотностью верхнего слоя. Получены интегрированное дифференциальное уравнение и граничные условия для средних скоростей. При выводе уравнения использовался метод, предложенный в [5] и успешно примененный в [6]. Задача об устойчивости сводится к исследованию собственных значений и собственных функций такого уравнения. В свою очередь, это приводит к расчету корней аналитической функции. В работе рассчитаны зависимости собственных значений от длины волн начальных возмущений. Результаты расчетов показывают, что при разумных значениях вероятностных параметров модели наступает колебательная неустойчивость.

1. Уравнения движения среды со случайным распределением плотности. Рассмотрим движение вязкой несжимаемой жидкости, образующей в начальный момент два слоя с возмущенной границей раздела. Предположим, что задача является двумерной: все величины зависят только от двух пространственных переменных (например, x и z). Рассмотрим два слоя: $h > z > 0$, $0 > z > -\infty$, $-\infty < x < \infty$: ось z направлена вертикально вверх. Будем считать, что вязкость в каждом слое постоянна. Малые

возмущения искомым величин удовлетворяют в пределах каждого слоя системе уравнений [2]

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \delta p + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}, \quad (1a)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial z} \delta p + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - g \delta \rho, \quad (1б)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0, \quad (1в)$$

$$\sigma_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \sigma_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (2)$$

где u , w - горизонтальная и вертикальная составляющие скорости; δp и $\delta \rho$ - возмущения давления p и плотности ρ ; σ_{xx} , σ_{xz} , σ_{zz} - компоненты тензора напряжений; μ - вязкость; g - ускорение силы тяжести.

Пусть плотность ρ имеет вид $\rho(z) = \bar{\rho} + \rho'(z)$, где $\bar{\rho}$ - среднее значение и $\rho'(z)$ - флуктуирующая часть $\rho(z)$, причем $\langle \rho'(z) \rangle = 0$. Здесь и ниже скобки $\langle \cdot \rangle$ означают осреднение по ансамблю реализаций случайной функции. Тогда уравнения (1) и (2) принимают вид:

$$(\bar{\rho} + \rho') \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \delta p + \mu \Delta u,$$

$$(\bar{\rho} + \rho') \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial z} \delta p + \mu \Delta w - g \delta \rho, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \delta \rho = -w \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} + \rho').$$

Применим интегральное преобразование Лапласа-Фурье с ядром преобразования $\exp(-ikx + \tau t)$ к уравнениям (3) и, сохраняя прежние обозначения переменных, получим

$$(\bar{\rho} + \rho') \tau u = ik \delta p + \mu (D^2 - k^2) u, \quad (4a)$$

$$(\bar{\rho} + \rho') \tau w = -D \delta p + \mu (D^2 - k^2) w - g \delta \rho, \quad (4б)$$

$$-iku + Dw = 0, \quad (4в)$$

$$\tau \delta \rho = -w D \rho', \quad (4г)$$

где $D = d/dz$. Умножая (4a) на ik и учитывая (4в), а также подставляя (4г) в (4б), находим

$$(\bar{\rho} + \rho') \tau D w = -k^2 \delta p + \mu (D^2 - k^2) D w, \quad (5a)$$

$$(\bar{\rho} + \rho') \tau w = -D \delta p + \mu (D^2 - k^2) w + \frac{g}{\tau} D \rho'. \quad (5б)$$

Из уравнений (5) получаем

$$k^2 \delta p = -[(\bar{\rho} + \rho') \tau Dw - \mu(D^2 - k^2)Dw], \quad (6a)$$

$$D\delta p = -(\bar{\rho} + \rho') \tau w + \mu(D^2 - k^2)w + \frac{g}{\tau} D\rho' w. \quad (6b)$$

Подставляя (6a) в (6b), после преобразований приходим к уравнению

$$(D^2 - k^2)(D^2 - k^2 - \frac{\bar{\rho}\tau}{\mu})w = L(w), \quad (7)$$

где

$$L(w) = \frac{\tau}{\mu} \left[D(\rho' Dw) + \frac{gk^2}{\tau} D(\rho' w) - \frac{gk^2}{\tau^2} \rho' Dw - k^2 \rho' w \right]. \quad (8)$$

Решение уравнения (7) представляется в виде (см. Приложение 1)

$$w(z) = C_1 \exp(kz) + C_2 \exp(-kz) + C_3 \exp(nz) + C_4 \exp(-nz) + \int_0^z \Phi(z-\xi) L(w(\xi)) d\xi, \quad (9)$$

где $n = (k^2 + \frac{\rho\tau}{\mu})^{1/2}$,

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & -k & n & -n \\ k^2 & k^2 & n^2 & n^2 \\ \exp(k\zeta) & \exp(-k\zeta) & \exp(n\zeta) & \exp(-n\zeta) \end{vmatrix} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & -k & n & -n \\ k^2 & k^2 & n^2 & n^2 \\ k^3 & -k^3 & n^3 & -n^3 \end{vmatrix}$$

2. Уравнение для средней скорости. Усредняя уравнение (7) по скорости, находим

$$(D^2 - k^2)(D^2 - n^2)\langle w \rangle = \frac{\tau}{\mu} [D\langle \rho' Dw \rangle + \frac{gk^2}{\tau} D\langle \rho' w \rangle - \frac{gk^2}{\tau^2} \langle \rho' Dw \rangle - k^2 \langle \rho' w \rangle]. \quad (10)$$

Уравнения (7), (8) не дают возможности непосредственно рассчитать среднюю скорость $\langle w \rangle$: они содержат члены с флуктуацией плотности ρ' . После осреднения (7) в уравнении (10) появляются величины $\langle \rho' w \rangle$, $\langle \rho' Dw \rangle$, $D\langle \rho' w \rangle$ и $D\langle \rho' Dw \rangle$. Чтобы выразить эти величины через $\langle w \rangle$, принимается следующее допущение:

$$\langle \rho'(z) \rho'(\xi) w(\xi) \rangle \approx K(z-\xi) \langle w(\xi) \rangle, \quad (11)$$

где $K(z-\xi) = \langle \rho'(z) \rho'(\xi) \rangle$ - корреляционная функция. Такое приближение эквивалентно предположению о локальной независимости реализаций случайной функции и обычно встречается в литературе (например [6-8]).

После интегрирования по частям уравнения (9) и подстановки результатов в уравнение (10) (см. Приложение 2) получаем интегро-дифференциальное уравнение для средней скорости:

$$(D^2 - k^2)(D^2 - n^2)\langle w(z) \rangle + \Psi_1(z)w(0) + \Psi_2(z)Dw(0) + \int_0^z \{\Psi_3(z-\xi)\langle w(\xi) \rangle + \Psi_4(z-\xi)D\langle w(\xi) \rangle\}d\xi = 0, \quad (12)$$

где

$$\Psi_1(z) = \frac{gk^2}{\mu^2} \mathfrak{C}(z)\Phi(z), \quad \Psi_2(z) = \frac{\tau^2}{\mu^2} \mathfrak{C}(z)\Phi(z),$$

$$\Psi_3(z-\xi) = \mathfrak{C}(z-\xi) \left[\frac{gk^2}{\mu^2} D_\xi + \frac{\tau^2 k^2}{\mu^2} \right] \Phi(z-\xi),$$

$$\Psi_4(z-\xi) = \mathfrak{C}(z-\xi) \left[\frac{\tau^2}{\mu^2} D_\xi + \frac{gk^2}{\mu^2} \right] \Phi(z-\xi),$$

$$\mathfrak{C}(z) \cdot = K(z)(D^2 - k^2) \cdot + DK(z)(D + gk^2/\tau^2) \cdot, \quad D_\xi = d/d\xi.$$

3. Общее решение уравнения для средней скорости. Корреляционная функция $K(z-\xi)$, используемая в работах [6,8] и хорошо согласующаяся с экспериментальными данными, имеет вид

$$K(z-\xi) = \sigma \exp(-v|z-\xi|),$$

где $\sigma=K(0)$ обозначает дисперсию и $1/v$ является радиусом корреляции. Такую корреляционную функцию имеет процесс Уленбека-Орнштейна [9].

Чтобы решить уравнение (12), применим к нему преобразование Лапласа. Тогда получим

$$\begin{aligned} & [p^4 - (k^2 + n^2)p^2 + k^2 n^2 + \hat{\Psi}_3(p) + p\hat{\Psi}_4(p)]\hat{w}(p) - \\ & - [p^3 - (k^2 + n^2)p - \hat{\Psi}_1(p) + \hat{\Psi}_4(p)]w(0) - [p^2 - (k^2 + n^2) - \\ & - \hat{\Psi}_2(p)]Dw(0) - pD^2w(0) - D^3w(0) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

функции $\hat{\Psi}_i(p)$ ($i=1,2,3,4$) выписаны в Приложении 3. Преобразование Лапласа определяется как

$$\hat{f}(p) = \int_0^\infty f(z) \exp(-pz) dz,$$

где знак $\hat{\quad}$ означает изображение.

Решение уравнения (13) представляется в виде

$$\hat{w}(p) = \sum_{i=1}^4 \frac{W_i(p)}{D(p)} Y_i, \quad (14)$$

где $Y_1=w(0)$, $Y_2=Dw(0)$, $Y_3=D^2w(0)$, $Y_4=D^3w(0)$, $W_i(p)$ ($i=1,2,3,4$) и $D(p)$ - многочлены четвертой-восьмой степени относительно p . Вид функций $W_i(p)$ и $D(p)$ можно также найти в Приложении 3.

Применяя обратное преобразование Лапласа к уравнению (14), получаем

$$\langle w(z) \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp(pz) \sum_{i=1}^4 \frac{W_i(p)}{D(p)} Y_i dp.$$

Теперь, используя теорему о вычетах и лемму Жордана [10], можем записать

$$\langle w(z) \rangle = \sum_{i=1}^4 \left[Y_i \sum_{n=1}^8 C_i(p_n) \exp(p_n z) \right], \quad (15)$$

где

$$C_i(p_n) = \left. \frac{W_i(p)}{dD(p)/dp} \right|_{p=p_n} \quad i=1,2,3,4,$$

и p_n ($n=1,2,\dots,8$) - корни полинома $D(p)$ восьмой степени с комплексными коэффициентами.

Предположим, что

$$\begin{aligned} \langle w(0) \rangle &= Y_1, & D\langle w(0) \rangle &= Y_2, \\ D^2\langle w(0) \rangle &= Y_3, & D^4\langle w(0) \rangle &= Y_4. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $D\langle w(0) \rangle$ имеет смысл $D\langle w(z) \rangle$ при $z=0$ и т.п. Тогда из (15) с учетом (16) имеем

$$\sum_{n=1}^8 C_j(p_n) = \begin{cases} 1, & j=1 \\ 0, & j \neq 1 \end{cases}, \quad \sum_{n=1}^8 p_n^2 C_j(p_n) = \begin{cases} 1, & j=3 \\ 0, & j \neq 3 \end{cases},$$

$$\sum_{n=1}^8 p_n C_j(p_n) = \begin{cases} 1, & j=2 \\ 0, & j \neq 2 \end{cases}, \quad \sum_{n=1}^8 p_n^3 C_j(p_n) = \begin{cases} 1, & j=4 \\ 0, & j \neq 4 \end{cases}.$$

4. Сведение задачи об устойчивости к задаче на собственные значения. Рассмотрим задачу об устойчивости модели (разд. 1), сформулировав ее более детально. Два слоя $h > z > 0$, $0 > z > -\infty$, $-\infty < x < \infty$ заполнены вязкой жидкостью. Пусть ρ_i, μ_i - плотность и вязкость в i -м слое, $i=1,2$ (индексы 1 и 2 в последующем изложении соответствуют нижнему

и верхнему слою). Эти величины детерминированы, кроме ρ_2 . Предположим, что ρ_2 является случайной функцией, зависящей от параметра z , причем $\rho_2 = \bar{\rho}_2 + \rho'$, $\langle \rho' \rangle = 0$, $\bar{\rho}_2 = \text{const}$. Считается также, что для ρ' справедливо допущение (11). Рассмотрим условия на свободной границе (отсутствие касательных напряжений) при $z=h$ и условия "склейки" (непрерывность компонент скорости, касательных и нормальных напряжений) с учетом скачка плотности при $z=0$.

Выпишем граничные условия. На промежуточной границе $z=0$

$$\langle w_2(0) \rangle = w_1(0), \quad (17a)$$

$$D \langle w_2(0) \rangle = D w_1(0), \quad (17б)$$

$$\mu_2 (D^2 + k^2) \langle w_2(0) \rangle = \mu_1 (D^2 + k^2) w_1(0), \quad (17в)$$

$$\begin{aligned} \tau (\langle \sigma_{zz}^{(2)}(0) \rangle - \langle \delta p_2(0) \rangle) - \tau (\sigma_{zz}^{(1)}(0) - \delta p_1(0)) = \\ = -g [\bar{\rho}_2 \langle w_2(0) \rangle + \langle \rho'(0) w(0) \rangle - \rho_1 w_1(0)]. \end{aligned} \quad (17г)$$

Подставляя уравнения (2) и (6а) в уравнение (17г) и учитывая (П8) и (П9) из Приложения 2, получаем

$$\begin{aligned} [\tau \bar{\rho}_2 - \mu_2 (D^2 - 3k^2)] D \langle w_2(0) \rangle + \frac{gk^2}{\tau} \bar{\rho}_2 \langle w_2(0) \rangle = \\ = [\tau \rho_1 - \mu_1 (D^2 - 3k^2)] D w_1(0) + \frac{gk^2}{\tau} \rho_1 w_1(0). \end{aligned} \quad (17д)$$

На свободной верхней границе $z=h$ имеем

$$(D^2 + k^2) \langle w_2(h) \rangle = 0, \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} [\tau \bar{\rho}_2 - \mu_2 (D^2 - 3k^2)] D \langle w_2(h) \rangle + \frac{gk^2}{\tau} \bar{\rho}_2 \langle w_2(h) \rangle = \\ = - [\tau \langle \rho'(h) \rangle D w_2(h) + \frac{gk^2}{\tau} \langle \rho'(h) w_2(h) \rangle]. \end{aligned} \quad (18б)$$

Для того, чтобы получить условия на свободной границе относительно $\langle w_2(z) \rangle$, необходимо подставить в (18б) выражения (П8) и (П9) из Приложения 2 и вычислить определенные интегралы.

Итак, при фиксированном волновом числе k инкремент τ и вертикальная скорость $\langle w \rangle$ находятся как собственное значение и собственная функция из решения краевой задачи, заданной уравнением (12) при $0 < z \leq h$ и уравнением

$$(D^2 - k^2) (D^2 - \eta_1^2) w_1(z) = 0, \quad z < 0, \quad (19)$$

где $\eta_1 = (k^2 + \rho_1 \tau / \mu_1)^{1/2}$, и граничными условиями (17) и (18). Общее решение уравнения (12) имеет вид (15), а общее решение (19) представимо как

$$w_1(z) = Y_5 \exp(kz) + Y_6 \exp(\eta_1 z). \quad (20)$$

Перейдем к безразмерным переменным по формулам ($i=1,2$):

$$\begin{aligned} a_i &= \mu_i / (\mu_1 + \mu_2), \quad c_i = \bar{\rho}_i / (\rho_1 + \bar{\rho}_2), \quad \lambda = \tau t_0, \quad \tilde{k} = kh, \quad \tilde{p} = ph, \quad \tilde{\beta} = \beta h, \\ \tilde{\sigma} &= \sigma / (\rho_1 + \bar{\rho}_2)^2, \quad \tilde{z} = z/h, \quad \tilde{\eta} = \tilde{k} (1 + c_1 c \lambda / (a_1 \tilde{k}^2 G))^{1/2}, \\ C &= gh^3 (\rho_1 + \bar{\rho}_2)^2 / (\mu_1 + \mu_2)^2, \quad G = g(\rho_1 + \bar{\rho}_2) h t_0 / (\mu_1 + \mu_2). \end{aligned} \quad (21)$$

Теперь подставляя уравнения (15) и (20) в граничные условия (17) и (18) и учитывая (21), получаем 6 однородных линейных уравнений с 6 неизвестными Y_i ($i=1,2,\dots,6$):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 [Y_i \sum_{n=1}^8 (\tilde{p}_n^2 + \tilde{k}^2) \tilde{C}_i(\tilde{p}_n) \exp(\tilde{p}_n)] &= 0, \\ \sum_{i=1}^4 [Y_i \sum_{n=1}^8 \tilde{C}_i(\tilde{p}_n) (\tilde{A}(\tilde{p}_n) \exp(\tilde{p}_n) + \tilde{B}(\tilde{p}_n))] &+ [Y_1 \frac{G^2 \tilde{k}^2}{C \lambda^2} + Y_2] \tilde{E} = 0, \end{aligned}$$

$$Y_5 + Y_6 - Y_1 = 0,$$

$$\tilde{k} Y_5 + \tilde{\eta}_1 Y_6 - Y_2 = 0,$$

$$a_1 [2\tilde{k}^2 Y_5 + (\tilde{\eta}_1^2 + \tilde{k}^2) Y_6] = a_2 [\tilde{k}^2 Y_1 + Y_3],$$

$$\begin{aligned} [C c_1 \tilde{k} \lambda / G + G c_1 \tilde{k}^2 / \lambda + 2a_1 \tilde{k}^3] Y_5 + [C c_1 \tilde{\eta}_1 \lambda / G - a_1 \tilde{\eta}_1 (\tilde{\eta}_1^2 - 3\tilde{k}^2) + \\ + G c_1 \tilde{k}^2 / \lambda] Y_6 = (G c_2 \tilde{k}^2 / \lambda) Y_1 + (C c_2 \lambda / G + 3a_2 \tilde{k}^2) Y_2 - a_2 Y_4, \end{aligned}$$

где функции $\tilde{A}(\tilde{p}_n)$, $\tilde{B}(\tilde{p}_n)$, $\tilde{C}_i(\tilde{p}_n)$ ($i=1,\dots,4$; $n=1,\dots,8$), \tilde{E} представлены в Приложении 4. Далее знак \sim , обозначающий безразмерные величины, будет опущен. Приравнивая определитель Δ_0 этой системы к нулю, после алгебраических преобразований находим трансцендентное уравнение, связывающее λ , k , β , σ :

$$\Omega(\lambda, k, \beta, \sigma) = 0. \quad (22)$$

Здесь определитель Δ_0 и функция Ω не выписаны в силу своей громоздкости. Численно решая уравнение (22), можно найти зависимость $\lambda = \lambda(k, \beta, \sigma)$. При расчетах был использован алгоритм поиска комплексных корней аналитической функции [11].

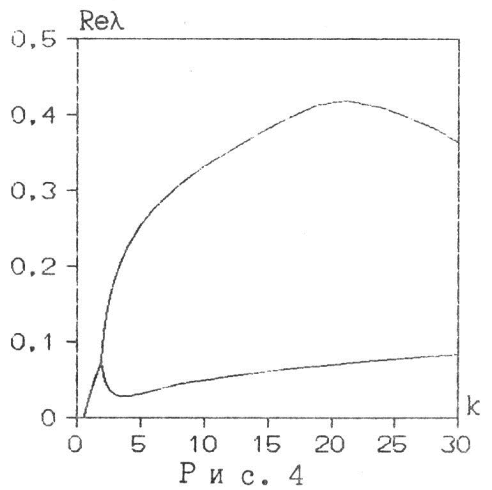
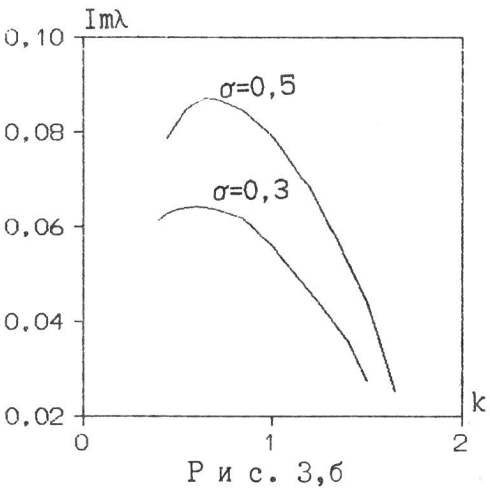
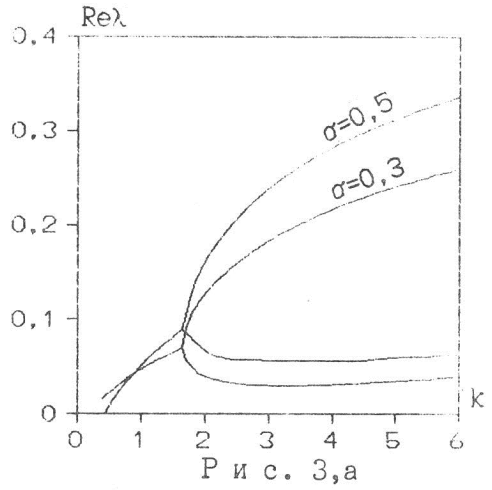
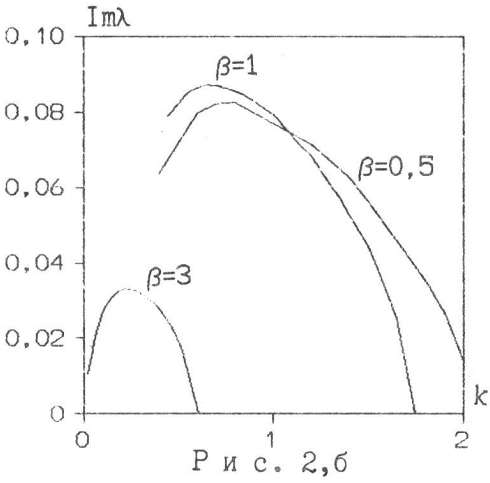
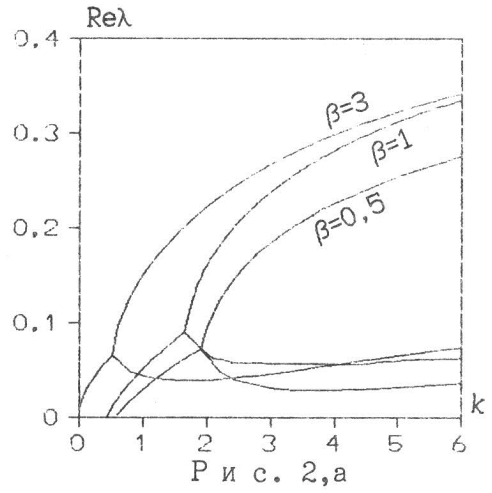
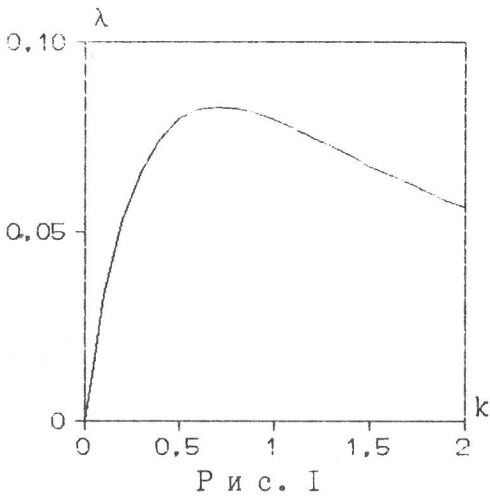
Таким образом, задача об устойчивости системы слоев сведена к анализу собственных значений λ . В силу очевидных свойств преобразования Лапласа система будет устойчива, если все собственные значения располагаются в левой полуплоскости комплексного переменного, т.е. $\text{Re}\lambda < 0$. Система слоев теряет устойчивость, если существует собственное значение, у которого $\text{Re}\lambda > 0$. При $\text{Im}\lambda = 0$ неустойчивость является монотонной, при $\text{Im}\lambda \neq 0$ имеет место колебательная неустойчивость.

5. Результаты численных расчетов и их обсуждение. При расчетах были приняты следующие значения параметров: $\mu_1 = \mu_2 = 10^{21}$ Па·с, $\rho_1 = 3,5 \cdot 10^3$ кг/м³, $\bar{\rho}_2 = 4,5 \cdot 10^3$ кг/м³, $t_0 = 10^{11}$ с, $h = 2 \cdot 10^5$ м.

Если $\beta = 0$, $\sigma = 0$, задача (12), (17)–(19) вырождается в классическую задачу Рэлея–Тейлора [2, 3]. При $\beta = 0$, $\sigma = 0$ зависимость положительного собственного значения от волнового числа графически представлена на рис.1. При $\beta \neq 0$, $\sigma \neq 0$ переход из состояния устойчивости в неустойчивое положение происходит через колебательную неустойчивость. Численные расчеты показали, что при малых значениях безразмерного волнового числа $k < k_1$ положение системы еще устойчивое. При $k_1 < k < k_2$ появляется пара комплексно-сопряженных собственных значений с положительной действительной частью. При значении пространственной частоты $k > k_2$ эта пара переходит в два положительных действительных собственных значения. Значения волновых чисел k_1 и k_2 зависят от β и σ . На рис.2 и 3 представлены зависимости действительной (а) и мнимой (б) частей собственных значений λ от k при трех значениях радиуса корреляции для $\sigma = 0,5$ и двух значениях дисперсии плотности для $\beta = 1,0$ соответственно.

Таким образом, имеются два значения безразмерного волнового числа, соответствующие трем случаям: 1) $0 < k < k_1$ ($\text{Re}\lambda < 0$); 2) $k_1 < k < k_2$ ($\text{Re}\lambda > 0$, $\text{Im}\lambda \neq 0$); 3) $k_2 < k$ ($\text{Re}\lambda > 0$, $\text{Im}\lambda = 0$). При этом везде $c_1 = 0,45$, $c_2 = 0,55$. В первом случае имеет место устойчивость; во втором случае осуществляется колебательная неустойчивость; в третьем случае колебательная неустойчивость сменяется монотонной.

Физически это означает различия в поведении среды в зависимости от стохастических характеристик плотности верхнего слоя. Суперпозиция различных мод монотонной неустойчивости, имеющих место в результате случайного распределения плотности, ведет, по-видимому, к появлению моды колебательной неустойчивости. Такой колебательный режим характеризуется фазовыми скоростями $v = (\text{Im}\lambda/k)(h/t_0)$. Были определены эти скорости для двух значений скачка плотности и не-



скольких значений радиуса корреляции и дисперсии плотности. Так, скорости волн изменяются от 1 до 10 м/год для скачка плотности $\Delta\rho=10^3$ кг/м³ и в пределах нескольких см в год для $\Delta\rho=10$ кг/м³.

На рис. 4 представлены зависимости действительных частей инкремента λ от k при $\sigma=0.5$ и $\beta=0.5$. Сравнивая рис. 1 и 4, находим, что изображенные на них зависимости имеют максимум при некотором значении k_{\max} (для каждой кривой свое значение k_{\max}). Когда плотность верхнего слоя - случайная функция, соответствующее максимальной моде начальное возмущение с длиной волны $L=2\pi h/k_{\max} \approx 60$ км возрастает в e раз за время $t=t_0/\lambda_{\max} \approx 5 \cdot 10^3$ лет. В детерминированной системе же соответствующее максимальной моде начальное возмущение с длиной волны ≈ 1700 км возрастает в e раз за $t \approx 2 \cdot 10^4$ лет. Это показывает, что случайное распределение плотности также влияет на скорость роста начальных возмущений и на пространственные частоты максимальных мод.

В заключение отметим, что данная задача является модельной, и в дальнейшем представляет интерес изучение неустойчивости слоев с горизонтальными неоднородностями.

Авторы выражают благодарность М.Я.Кельберту за ряд ценных советов и внимание, проявленное к работе.

П Р И Л О Ж Е Н И Е 1

Общее решение однородного уравнения

$$(D^2 - k^2)(D^2 - n^2)w_0(z) = 0 \quad (\text{П1})$$

представимо в виде

$$w_0(z) = C_1 \exp(kz) + C_2 \exp(-kz) + C_3 \exp(nz) + C_4 \exp(-nz). \quad (\text{П2})$$

Найдем решение уравнения (7) методом вариации C_i . Тогда придем к следующей системе уравнений, записанной в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \exp(kz) & \exp(-kz) & \exp(nz) & \exp(-nz) \\ k \exp(kz) & -k \exp(-kz) & n \exp(nz) & -n \exp(-nz) \\ k^2 \exp(kz) & -k^2 \exp(-kz) & n^2 \exp(nz) & -n^2 \exp(-nz) \\ k^3 \exp(kz) & -k^3 \exp(-kz) & n^3 \exp(nz) & -n^3 \exp(-nz) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C'_1(z) \\ C'_2(z) \\ C'_3(z) \\ C'_4(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Lw \end{bmatrix}. \quad (\text{П3})$$

Решая систему уравнений (П3) относительно $C'_i(z)$, получим

$$C'_i(z) = f_i(z)Lw(z), \quad (\text{П4})$$

где

$$\begin{aligned} f_1(z) &= -\exp(-kz)\theta_1/\Delta, & f_2(z) &= \exp(kz)\theta_2/\Delta, \\ f_3(z) &= -\exp(-nz)\theta_3/\Delta, & f_4(z) &= \exp(nz)\theta_4/\Delta, \end{aligned}$$

$$\theta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -k & n & -n \\ k^2 & n^2 & n^2 \end{vmatrix}, \quad \theta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & n & -n \\ k^2 & n^2 & n^2 \end{vmatrix},$$

$$\theta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & -k & -n \\ k^2 & k^2 & n^2 \end{vmatrix}, \quad \theta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & -k & n \\ k^2 & k^2 & n^2 \end{vmatrix}.$$

Из (П4) находим, что

$$C_i(z) = \int_0^z f_i(\xi) Lw(\xi) d\xi + C_i(0). \quad (\text{П5})$$

Подставляя (П5) в (П2), после простых преобразований получаем (9).

П Р И Л О Ж Е Н И Е 2

Для того, чтобы получить выражения $\langle \rho'w \rangle$, $\langle \rho'Dw \rangle$, которые появляются в уравнении (10), мы используем следующие выражения, вытекающие из (9):

$$w(z) = C_1 \exp(kz) + C_2 \exp(-kz) + C_3 \exp(nz) + C_4 \exp(-nz) -$$

$$- \Phi(z) \rho'(0) (\tau/\mu) [Dw(0) + (gk^2/\tau^2)w(0)] -$$

$$- (\tau/\mu) \int_0^z \{ [(gk^2/\tau^2)\Phi(z-\xi) + D_\xi \Phi(z-\xi)] \rho'(\xi) D_\xi w(\xi) +$$

$$+ [k^2\Phi(z-\xi) + (gk^2/\tau^2)D_\xi \Phi(z-\xi)] \rho'(\xi) w(\xi) \} d\xi, \quad (\text{П6})$$

$$Dw(z) = kC_1 \exp(kz) - kC_2 \exp(-kz) + nC_3 \exp(nz) - nC_4 \exp(-nz) -$$

$$- D\Phi(z) \rho'(0) (\tau/\mu) [Dw(0) + (gk^2/\tau^2)w(0)] -$$

$$- (\tau/\mu) \int_0^z \{ [(gk^2/\tau^2)D\Phi(z-\xi) + DD_\xi \Phi(z-\xi)] \rho'(\xi) D_\xi w(\xi) +$$

$$+ [k^2D\Phi(z-\xi) + (gk^2/\tau^2)DD_\xi \Phi(z-\xi)] \rho'(\xi) w(\xi) \} d\xi. \quad (\text{П7})$$

Теперь, учитывая (П6) и (П7), можем выписать сами выражения $\langle \rho'w \rangle$, $\langle \rho'Dw \rangle$, а также $D\langle \rho'w \rangle$, $D\langle \rho'Dw \rangle$:

$$\langle \rho'(z)w(z) \rangle = -(\tau/\mu)K(z)\Phi(z) [Dw(0) + (gk^2/\tau^2)w(0)] -$$

$$- (\tau/\mu) \int_0^z \{ [(gk^2/\tau^2)\Phi(z-\xi) + D_\xi \Phi(z-\xi)] K(z-\xi) \langle w(\xi) \rangle +$$

$$+ [k^2\Phi(z-\xi) + (gk^2/\tau^2)D_\xi \Phi(z-\xi)] K(z-\xi) \langle w(\xi) \rangle \} d\xi, \quad (\text{П8})$$

$$\begin{aligned}
\langle \rho'(z) Dw(z) \rangle &= -(\tau/\mu) K(z) D\Phi(z) [Dw(0) + (gk^2/\tau^2)w(0)] - \\
&- (\tau/\mu) \int_0^z \{ [(gk^2/\tau^2)D\Phi(z-\xi) + DD_\xi \Phi(z-\xi)] K(z-\xi) D\langle w(\xi) \rangle + \\
&+ [k^2 D\Phi(z-\xi) + (gk^2/\tau^2)DD_\xi \Phi(z-\xi)] K(z-\xi) \langle w(\xi) \rangle\} d\xi, \quad (P9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D\langle \rho'(z) w(z) \rangle &= -(\tau/\mu) [K(z) D\Phi(z) + \Phi(z) DK(z)] [Dw(0) + (gk^2/\tau^2)w(0)] - \\
&- (\tau/\mu) \int_0^z \{ [(gk^2/\tau^2)D\Phi(z-\xi) + DD_\xi \Phi(z-\xi)] K(z-\xi) D\langle w(\xi) \rangle + \\
&+ [(gk^2/\tau^2)\Phi(z-\xi) + D_\xi \Phi(z-\xi)] DK(z-\xi) D\langle w(\xi) \rangle + [k^2 D\Phi(z-\xi) + \\
&+ (gk^2/\tau^2)DD_\xi \Phi(z-\xi)] K(z-\xi) \langle w(\xi) \rangle + [k^2 \Phi(z-\xi) + \\
&+ (gk^2/\tau^2)D_\xi \Phi(z-\xi)] DK(z-\xi) \langle w(\xi) \rangle\} d\xi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D\langle \rho'(z) Dw(z) \rangle &= -(\tau/\mu) [K(z) D^2\Phi(z) + D\Phi(z) DK(z)] [Dw(0) + \\
&+ (gk^2/\tau^2)w(0)] - (\tau/\mu) \int_0^z \{ [(gk^2/\tau^2)D^2\Phi(z-\xi) + \\
&+ D^2D_\xi \Phi(z-\xi)] K(z-\xi) D\langle w(\xi) \rangle + [(gk^2/\tau^2)D\Phi(z-\xi) + \\
&+ DD_\xi \Phi(z-\xi)] DK(z-\xi) D\langle w(\xi) \rangle + [k^2 D^2\Phi(z-\xi) + \\
&+ (gk^2/\tau^2)D^2D_\xi \Phi(z-\xi)] K(z-\xi) \langle w(\xi) \rangle + [k^2 D\Phi(z-\xi) + \\
&+ (gk^2/\tau^2)DD_\xi \Phi(z-\xi)] DK(z-\xi) \langle w(\xi) \rangle\} d\xi,
\end{aligned}$$

П Р И Л О Ж Е Н И Е 3

ФУНКЦИИ $\hat{\Psi}_i(p)$ ($i=1,2,3,4$) в уравнении (13) имеют вид:

$$\hat{\Psi}_1(p) = (gk^2/\mu^2)\Psi_{01}(p), \quad \hat{\Psi}_2(p) = (\tau^2/\mu^2)\Psi_{01}(p),$$

$$\hat{\Psi}_3(p) = (\tau^2k^2/\mu^2)\Psi_{01}(p) + (gk^2/\mu^2)\Psi_{02}(p),$$

$$\hat{\Psi}_4(p) = (gk^2/\mu^2)\Psi_{01}(p) + (\tau^2/\mu^2)\Psi_{02}(p),$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{01}(p) &= \sigma [(\varphi_0 - \beta\varphi_3)/(p + \beta - n) - (\varphi_0 + \beta\varphi_4)/(p + \beta + n) - \\
&- \beta\varphi_1/(p + \beta - k) - \beta\varphi_2/(p + \beta + k)]/\Delta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{02}(p) &= \sigma [\eta(\varphi_0 - \beta\varphi_3)/(p + \beta - n) + \eta(\varphi_0 + \beta\varphi_4)/(p + \beta + n) - \\
&- k\beta\varphi_1/(p + \beta - k) + k\beta\varphi_2/(p + \beta + k)]/\Delta,
\end{aligned}$$

$$\varphi_0 = 2k(\eta^2 - k^2)^2, \quad \varphi_1 = -(k + gk^2/\tau^2)\theta_1, \quad \varphi_2 = (-k + gk^2/\tau^2)\theta_2,$$

$$\varphi_3 = -(\eta + gk^2/\tau^2)\theta_3, \quad \varphi_4 = (-\eta + gk^2/\tau^2)\theta_4.$$

Нетрудно заметить, что Ψ_{01} и Ψ_{02} можно представить в виде

$$\Psi_{01}(p) = \sigma\Psi_{03}(p)/(\Psi_{00}(p)\Delta), \quad \Psi_{02}(p) = \sigma\Psi_{04}(p)/(\Psi_{00}(p)\Delta),$$

где

$$\Psi_{00} = [(p+\beta)^2 - k^2][(p+\beta)^2 - \eta^2],$$

$$\begin{aligned} \Psi_{03} = & \beta(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)p^3 + [-2\eta\varphi_0 + (3\beta+k)\beta\varphi_1 + (3\beta-k)\beta\varphi_2 + (3\beta+\eta)\beta\varphi_3 + \\ & + (3\beta-\eta)\beta\varphi_4]p^2 + \beta-4\eta\varphi_0 + (3\beta^2+2k\beta-\eta^2)\varphi_1 + (3\beta^2-2k\beta-\eta^2)\varphi_2 + \\ & + (3\beta^2+2\eta\beta-k^2)\varphi_3 + (3\beta^2-2\eta\beta-k^2)\varphi_4]p - 2\eta(\beta^2-k^2)\varphi_0 + \\ & + \beta[(\beta^3+k\beta^2-\eta^2(\beta+k))\varphi_1 + (\beta^3-k\beta^2-\eta^2(\beta-k))\varphi_2 + \\ & + (\beta^3+\eta\beta^2-k^2(\beta+\eta))\varphi_3 + (\beta^3-\eta\beta^2-k^2(\beta-\eta))\varphi_4], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{04} = & [2\eta\varphi_0 - \beta(k\varphi_1 - k\varphi_2 + \eta\varphi_3 - \eta\varphi_4)]p^3 + \beta[6\eta\varphi_0 - (3\beta+k)k\varphi_1 + (3\beta-k)k\varphi_2 - \\ & - (3\beta+\eta)\eta\varphi_3 + (3\beta-\eta)\eta\varphi_4]p^2 + [2(3\beta^2-k^2)\eta\varphi_0 - (3\beta^2+2k\beta-\eta^2)k\beta\varphi_1 + \\ & + (3\beta^2-2k\beta-\eta^2)k\beta\varphi_2 - (3\beta^2+2\eta\beta-k^2)\eta\beta\varphi_3 + (3\beta^2-2\eta\beta-k^2)\eta\beta\varphi_4]p - \\ & - \beta[2\eta(\beta^2-k^2)\varphi_0 - (\beta^3+k\beta^2-\eta^2(\beta+k))k\varphi_1 + (\beta^3-k\beta^2-\eta^2(\beta-k))k\varphi_2 - \\ & - (\beta^3+\eta\beta^2-k^2(\beta+\eta))\eta\varphi_3 + (\beta^3-\eta\beta^2-k^2(\beta-\eta))\eta\varphi_4]. \end{aligned}$$

Функции $W_i(p)$ ($i=1,2,3,4$) и $D(p)$ в уравнении (22) имеют вид:

$$W_1(p) = p(p^2 - k^2 - \eta^2)\Psi_{00}(p) + \frac{\sigma\tau^2}{\mu^2\Delta}\Psi_{04}(p), \quad W_3(p) = p\Psi_{00}(p),$$

$$W_2(p) = (p^2 - k^2 - \eta^2)\Psi_{00}(p) + \frac{\sigma\tau^2}{\mu^2\Delta}\Psi_{03}(p), \quad W_4(p) = \Psi_{00}(p),$$

$$\begin{aligned} D(p) = & (p^2 - k^2)(p^2 - \eta^2)\Psi_{00}(p) + \frac{\sigma\tau^2}{\mu^2\Delta}[-k^2(g\beta/\tau^2+1)\Psi_{03}(p) + \\ & + (p+gk^2/\tau^2)\Psi_{04}(p)]. \end{aligned}$$

П Р И Л О Ж Е Н И Е 4

Знак \sim , обозначающий безразмерные величины, здесь опущен. Функции $A(p_n), B(p_n), C_i(p_n)$ ($i=1,2,3,4$), E имеют вид

$$A(p_n) = (\eta_n^2 + 2k^2 - p_n^2)p_n + Gc_2k^2/(a_2\lambda),$$

$$\begin{aligned}
B(p_n) = & \frac{\sigma \exp(-\beta)}{4n_2 k c_2^2} \left\{ k^2 \left(\frac{G^4 k^2}{C^2 \lambda^4} - 1 \right) \theta_1(k-p_n) (\exp(p_n + \beta) - \exp(k)) / (p_n + \beta - k) + \right. \\
& + k^2 \left(\frac{G^4 k^2}{C^2 \lambda^4} - 1 \right) \theta_2(k+p_n) (\exp(p_n + \beta) - \exp(-k)) / (p_n + \beta + k) + \\
& + \left(\frac{G^2 k^2}{C \lambda^2} + n_2 \right) \theta_3 \left[k^2 \left(\frac{G^2 n_2}{C \lambda^2} - 1 \right) - \left(\frac{G^2 k^2}{C \lambda^2} - n_2 \right) p_n \right] \times \\
& \times (\exp(p_n + \beta) - \exp(\eta_2)) / (p_n + \beta - \eta_2) + \left(\frac{G^2 k^2}{C \lambda^2} - n_2 \right) \theta_4 \left[k^2 \left(\frac{G^2 n_2}{C \lambda^2} + 1 \right) + \right. \\
& \left. + \left(\frac{G^2 k^2}{C \lambda^2} + n_2 \right) p_n \right] (\exp(p_n + \beta) - \exp(-\eta_2)) / (p_n + \beta + \eta_2) \left. \right\},
\end{aligned}$$

$$C_i(p_n) = \frac{W_i(p_n)}{dD(p_n)/dp},$$

$$\begin{aligned}
E = - & \frac{\sigma \exp(-\beta)}{4n_2 k c_2^2} \left\{ \left(\frac{G^2 k^2}{C \lambda^2} + k \right) \theta_1 \exp(k) - \left(\frac{G^2 k^2}{C \lambda^2} - k \right) \theta_2 \exp(-k) + \right. \\
& \left. + \left(\frac{G^2 k^2}{C \lambda^2} + n_2 \right) \theta_3 \exp(\eta_2) - \left(\frac{G^2 k^2}{C \lambda^2} - n_2 \right) \theta_4 \exp(-\eta_2) \right\}.
\end{aligned}$$

Функции $W_i(p_n)$ и $D(p_n)$ представлены в Приложении 3.

Литература

1. Крамбейн У., Кауфман М., Мак-Кеммон Р. Модели геологических процессов. М.: Мир. 1973. 149 с.
2. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1968. 652 p.
3. Наймарк Б.М. Гравитационная устойчивость вертикально-неоднородной вязкой несжимаемой жидкости // Распознавание и спектральный анализ в сейсмологии. М.: Наука. 1977. С.71-82. (Вычисл. сейсмология: Вып.10).
4. Исмаил-заде А.Т., Наймарк Б.М. Влияние сжимаемости на гравитационную неустойчивость вязкой жидкости // Компьютерный анализ геофизических полей. М.: Наука. 1990. С.147-153. (Вычисл. сейсмология: Вып.23)
5. Karal F.C., Keller J.B. Elastic, electromagnetic and other waves in a random medium // J. Math. Phys. 1964. Vol.5, N4. P.537-547.
6. Hryniewicz Z., Hermans A.J. Free-field response from inclined body waves in a viscoelastic random medium // Earthquake engineering and structural dynamics. 1989. Vol.18. P.1025-1040.
7. Bourret R.C. Fiction theory of dynamic systems with noisy parameters // Canad. J. Phys. 1965. Vol.43. P.619-639.
8. Frisch U. Wave propagation in random media // Probabilistic Methods in Applied Mathematics. Vol.1. N.-Y.: Academic Press, 1968. P.75-198.

9. Uhlenbeck G.E., Ornstein L.S. On the theory of Brownian motion // Phys. Rev. 1930. Vol.36. P.823-841.
10. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука. 1969. 576 с.
11. Наймарк Б.М., Исмаил-заде А.Т. Гравитационная устойчивость вертикально-неоднородной среды с максвелловской реологией // Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука. 1989. С.71-80. (Вычисл. сейсмология: Вып.22)

УДК 550.31

Б.И.Биргер, А.Т.Исмаил-заде, Б.М.Наймарк

КОНВЕКТИВНЫЕ МОДЫ В ДВУХСЛОЙНОЙ МАНТИИ ЗЕМЛИ

B.I.Birger, A.T.Ismail-zadeh, B.M.Naimark

CONVECTIVE MODES IN A TWO-LAYER APPROXIMATION OF THE EARTH'S MANTLE

This work presents the numerical analysis of thermoconvective cell layering for the case where the thickness of the upper mantle is three times less than that of the lower mantle. This is more adequate for the Earth than the case of the same thickness assumed in the analysis of Richter and Johnson (1974). They state that the system of two chemically distinct layers of the same thickness results in a two-layered cell structure if the density of the lower layer is slightly (even less than 1%) greater than the density of the upper layer. The present study produces a stability diagram on (Ra, R_ρ) plane where Ra is the Rayleigh number and R_ρ is the nondimensional density contrast. The diagram shows that in the considered case a four-layer cell structure is more preferable with one cell in the upper layer and three cells in the lower one.

После появления работ [1,2], в которых на основе детального изучения данных о послеледниковых движениях земной коры доказывалось, что вязкость мантии почти однородна по всей ее глубине, популярными стали два глобальных проекта тепловой конвекции в Земле: одноярусная конвекция, охватывающая всю мантию до границы с ядром, и двухъярусная, при которой под конвективными ячейками в верхней мантии расположены конвективные ячейки в нижней мантии. Сторонники одноярусной конвекции предполагают, что мантия однородна по химическому составу, и рассматривают имеющиеся в мантии внутренние границы, отмеченные скачкообразным изменением плотности, как фазовые. Наличие фазовой границы между верхней и нижней мантией не мо-