

9. Uhlenbeck G.E., Ornstein L.S. On the theory of Brownian motion // Phys. Rev. 1930. Vol.36. P.823-841.
10. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука. 1969. 576 с.
11. Наймарк Б.М., Исмаил-заде А.Т. Гравитационная устойчивость вертикально-неоднородной среды с максвелловской реологией // Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука. 1989. С.71-80. (Вычисл. сейсмология: Вып.22)

УДК 550.31

*Б.И.Биргер, А.Т.Исмаил-заде, Б.М.Наймарк*

**КОНВЕКТИВНЫЕ МОДЫ В ДВУХСЛОЙНОЙ МАНТИИ ЗЕМЛИ**

*B.I.Birger, A.T.Ismail-zadeh, B.M.Naimark*

**CONVECTIVE MODES IN A TWO-LAYER APPROXIMATION OF THE EARTH'S MANTLE**

This work presents the numerical analysis of thermoconvective cell layering for the case where the thickness of the upper mantle is three times less than that of the lower mantle. This is more adequate for the Earth than the case of the same thickness assumed in the analysis of Richter and Johnson (1974). They state that the system of two chemically distinct layers of the same thickness results in a two-layered cell structure if the density of the lower layer is slightly (even less than 1%) greater than the density of the upper layer. The present study produces a stability diagram on  $(Ra, R_\rho)$  plane where  $Ra$  is the Rayleigh number and  $R_\rho$  is the nondimensional density contrast. The diagram shows that in the considered case a four-layer cell structure is more preferable with one cell in the upper layer and three cells in the lower one.

После появления работ [1,2], в которых на основе детального изучения данных о послеледниковых движениях земной коры доказывалось, что вязкость мантии почти однородна по всей ее глубине, популярными стали два глобальных проекта тепловой конвекции в Земле: одноярусная конвекция, охватывающая всю мантию до границы с ядром, и двухъярусная, при которой под конвективными ячейками в верхней мантии расположены конвективные ячейки в нижней мантии. Сторонники одноярусной конвекции предполагают, что мантия однородна по химическому составу, и рассматривают имеющиеся в мантии внутренние границы, отмеченные скачкообразным изменением плотности, как фазовые. Наличие фазовой границы между верхней и нижней мантией не мо-

жет привести к двухъярусной конвекции при существующих оценках параметров фазового перехода на этой границе [3,4]. Сторонники двухъярусной конвекции считают, что скачок плотности на границе между верхней и нижней мантией обусловлен не фазовым переходом, а изменением химического состава. Границу такого типа в механике называют контактной. Изменение положения контактной границы со временем определяется смещениями материальных частиц среды, которые примыкают к этой границе, а скорости деформации контактной границы на различных ее участках равны скоростям примыкающих к ней материальных частиц. Для фазовой границы данные условия не выполняются.

Общепринятое в геофизике мнение о том, что наличие контактной (химической) границы между верхней и нижней мантией приводит к двухъярусной конвекции, основано на результатах работы [5]. В ней проведен анализ термоконвективной устойчивости системы, состоящей из двух равных по толщине слоев, и показано, что, когда плотность нижнего слоя превышает плотность верхнего хотя бы на малые доли процента, вторая конвективная мода (две ячейки по глубине системы) является более неустойчивой, чем первая (одна ячейка по глубине). Однако в Земле толщина нижней мантии превышает толщину верхней примерно в три раза. При таком соотношении толщин слоев скорее можно ожидать возникновение четырехъярусной конвекции (одна ячейка в верхней мантии и три - в нижней). Проведенный в работе [6] анализ устойчивости показывает, что при малых скачках плотности на контактной границе критические числа Рэлея, характеризующие появление трех первых мод неустойчивости, возрастают с увеличением скачка плотности быстрее, чем критическое число Рэлея, при котором возникает четвертая (четыре ячейки по глубине) мода неустойчивости. Четвертая мода становится более неустойчивой, чем три первых, когда скачок плотности достигает определенного значения. Но данное значение не удовлетворяет тому ограничению сверху на величину скачка, которое накладывает метод теории возмущений, используемый в [6]. Это обстоятельство и вынуждает еще раз обратиться к решению задачи, поставленной в работе [6].

Итак, рассмотрим систему, состоящую из двух бесконечных горизонтальных однородных слоев, разделенных контактной границей, которая в состоянии гидростатического равновесия является плоской, но при возмущении системы деформируется. Слои отличаются только плотностью, причем плотность  $\rho_1$  нижнего слоя выше, чем плотность  $\rho_2$  - верхнего. Внешние границы системы предполагаются фиксированными, свободными от касательных напряжений и изотермическими. Темпе-

ратура  $T_1$  на нижней границе выше, чем температура  $T_2$  на верхней. На деформированной контактной границе между слоями накладываются условия непрерывности компонент скорости, касательных и нормальных напряжений, температуры и теплового потока. Начало координат расположено на нижней границе системы, а ось  $z$  направлена вертикально вверх. Линеаризованные уравнения для малых возмущений исходного равновесного состояния, не зависящих от координаты  $y$ , в безынерционном приближении Буссинеска выписываются в виде

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v &= 0, & -\frac{\partial p}{\partial z} + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w + Ra\theta &= 0, \\
 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, & -\frac{\partial \theta}{\partial t} + w + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \theta &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где  $v$ ,  $w$ ,  $\theta$ ,  $p$  - безразмерные возмущения скорости, температуры и давления соответственно. Суммарная толщина слоев  $d$  принята здесь в качестве масштаба длины:  $x/d$  - масштаб скорости, где  $\kappa$  - теплопроводность;  $d^2/\kappa$  - масштаб времени;  $\rho_2 \nu \kappa / d^2$  - масштаб давления, где  $\nu$  - кинематическая вязкость;  $Ad$  - масштаб температуры, где  $A = T_1 - T_2$  - вертикальный градиент температуры в равновесном состоянии. Число Рэлея определено как  $Ra = \alpha g d^3 / (\nu \kappa)$ , где  $\alpha$  - коэффициент теплового расширения,  $g$  - ускорение силы тяжести.

Внешние границы системы предполагаются фиксированными, свободными от касательных напряжений и изотермическими:

$$z=0, \quad z=1, \quad w = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = \theta = 0.
 \tag{2}$$

На контактной границе между слоями требуем непрерывности компонент вектора скорости, касательных и нормальных напряжений, температуры и теплового потока. Эти условия поставлены на деформированной границе  $z=\beta+u(x,t)$ , где  $\beta$  - безразмерная толщина нижнего слоя, характеризующая равновесное положение контактной границы, а смещение  $u$  связано со скоростью соотношением  $w=du/dt$ . На недеформированной границе граничные условия принимают вид (здесь  $f|_1^2 = f(\beta+0) - f(\beta-0)$ ):

$$\begin{aligned}
 z=\beta: \quad v|_1^2 &= 0, & w|_1^2 &= 0, & \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \Big|_1^2 &= 0, \\
 \left( -p + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \Big|_1^2 &= R_\rho u, & \theta|_1^2 &= 0, & \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_1^2 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

где  $R_\rho = (\rho_1 - \rho_2) g d^3 / (\rho_2 \nu \kappa)$  - безразмерный параметр, характеризующий скачок плотности (индекс 1 относится к нижнему слою, 2 - к верхнему). Появление смещения границы  $u$  в одном из уравнений (3) обус-

ловлено тем, что в равновесном состоянии производная от давления по вертикальной координате терпит разрыв.

Решение задачи (1)-(3) ищется в виде

$$v = V(z)E, \quad w = W(z)E, \quad \theta = \Theta(z)E, \quad p = P(z)E, \quad (4)$$

$$u = UE, \quad E = \exp(\lambda t + ikx),$$

где  $\lambda$  - безразмерный комплексный инкремент:  $k$  - волновое число, характеризующее горизонтальный размер  $L$  конвективной ячейки ( $L = \pi d/k$ ). Подставляя (4) в (1), находим

$$v = \frac{i}{k} DW, \quad P = \left( \frac{D^3}{k^2} - D \right) W, \quad \Theta = \frac{1}{Ra k^2} (D^2 - k^2)^2 W, \quad U = W/\lambda,$$

где введен дифференциальный оператор  $D = d/dz$ .

При фиксированном  $k$  инкремент  $\lambda$  и распределение вертикальной скорости  $W(z)$  находятся как собственное значение и собственная функция из решения краевой задачи (1)-(3), заданной обыкновенным дифференциальным уравнением, справедливым для обоих слоев,

$$[\lambda(D^2 - k^2)^2 - (D^2 - k^2)^3 - Rak^2]W_{1,2}(z) = 0 \quad (5)$$

и граничными условиями

$$z=0: \quad W_1 = D^2 W_1 = D^4 W_1 = 0; \quad (6)$$

$$z=1: \quad W_2 = D^2 W_2 = D^4 W_2 = 0; \quad (7)$$

$$z=\beta: \quad W_1 = W_2, \quad DW_1 = DW_2, \quad D^2 W_1 = D^2 W_2,$$

$$\left[ D^3 - \frac{R_\rho k^2}{\lambda} \right] W_1 = D^3 W_2, \quad D^4 W_1 = D^4 W_2, \quad (8)$$

$$(D^5 - 2k^2 D^3)W_1 = (D^5 - 2k^2 D^3)W_2.$$

Как следует из (8), когда  $R_\rho = 0$ , условия на контактной границе сводятся к требованию непрерывности  $W(z)$  и ее первых пяти производных.

Общее решение уравнения (5) представимо в виде

$$W_1(z) = \sum_{j=1}^3 \left( A_1^{(j)} \operatorname{sh} q_j z + B_1^{(j)} \operatorname{ch} q_j z \right), \quad 0 \leq z \leq \beta. \quad (9)$$

$$W_2(z) = \sum_{j=1}^3 \left( A_2^{(j)} \operatorname{sh} q_j z + B_2^{(j)} \operatorname{ch} q_j z \right), \quad \beta \leq z \leq 1.$$



где  $q_j$  - три неравных между собой по модулю корня алгебраического уравнения

$$\lambda (q^2 - k^2)^2 - (q^2 - k^2)^3 - Ra k^2 = 0. \quad (10)$$

Подставляя (9) в граничные условия (6)-(8), получаем 12 однородных линейных уравнений с 12 неизвестными:  $A_{1,2}^{(j)}$ ,  $B_{1,2}^{(j)}$ . Приравнивая определитель этой системы к нулю, находим

$$\begin{vmatrix} \text{sh} q_j & & \\ q_j^2 \text{sh} q_j - \frac{R_\rho k^2}{\lambda q_j} \text{sh} q_j \text{sh} q_j (1-\beta) & & \\ (q_j^4 - 2k^2 q_j^2) \text{sh} q_j & & \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Выписанный обобщенный столбец определителя соответствует трем обычным столбцам, когда индекс  $j$  принимает значения 1, 2, 3. Уравнение (11) позволяет найти спектр инкрементов  $\lambda$  (собственных значений) для любых фиксированных  $\beta$ ,  $k$ ,  $Ra$ ,  $R_\rho$ .

Уравнение, решаемое численно в работе [5], получается из (11) как частный случай для  $\beta=1/2$ . В работе [6] были найдены аналитические решения уравнения (11) при любых  $\beta$ , но эти решения справедливы только при достаточно малых скачках плотности ( $R_\rho \leq 100$ ). В настоящей работе, используя численный метод, предложенный в работе [7] и позволяющий быстро находить комплексные корни  $\lambda$  уравнения (8), мы ищем решения в широком диапазоне значений  $R_\rho$ , но при фиксированном  $\beta=3/4$ . Данное значение  $\beta$  лучше соответствует реальной ситуации: толщина нижней мантии в три раза больше, чем верхней.

Если  $R_\rho=0$ , задача (5)-(11) вырождается в классическую задачу Рэлея-Бенара [8], поставленную без учета инерционных сил (число Прандтля бесконечно велико). При  $R_\rho=0$  собственные функции имеют вид простых гармоник

$$W(n, z) = \sin n\pi z, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (12)$$

где число  $n$  определяет количество конвективных ячеек по глубине, а собственные значения даются формулой

$$\lambda_n = \frac{Ra k^2}{(k^2 + n^2 \pi^2)^2} - k^2 - n^2 \pi^2. \quad (13)$$

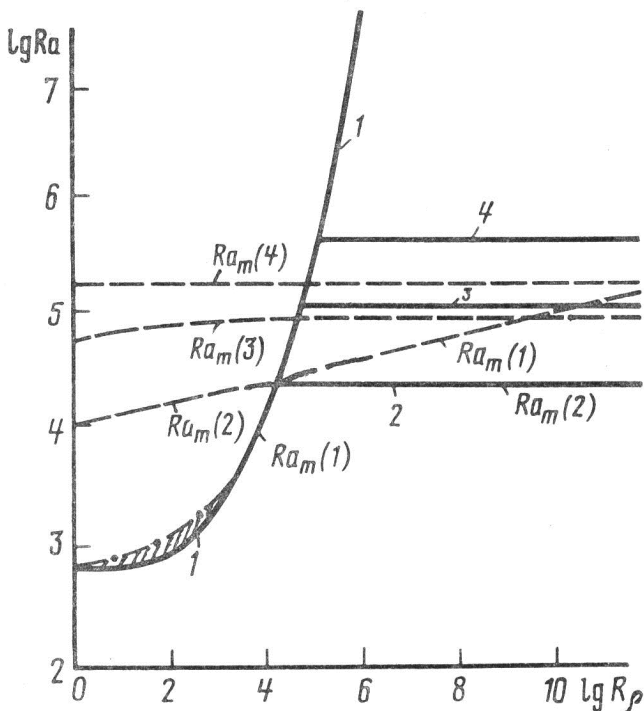
Как следует из (13), с ростом  $n$  инкремент  $\lambda_n$  уменьшается и наиболее неустойчивой при любых фиксированных  $k$  и  $Ra$  является первая

конвективная мода ( $n=1$ ). Когда  $R_\rho \neq 0$  и формулы (12), (13) несправедливы, мы будем нумеровать моды неустойчивости следующим образом: пусть найдено собственное значение  $\lambda$  и соответствующая ему собственная функция  $W(z)$ , тогда мы приписываем им номер  $n$ , на единицу больший, чем число нулей функции  $W(z)$  при  $0 < z < 1$ . И в этом случае номер  $n$  равен количеству ячеек по глубине конвективной системы, но в отличие от случая, когда  $R_\rho = 0$ , вертикальные размеры ячеек, вообще говоря, не равны друг другу. Важно, что наиболее неустойчивой может оказаться конвективная мода, для которой  $n \neq 1$ .

В процессе численного решения были найдены значения  $\lambda_n$  для различных фиксированных  $k$ ,  $Ra$  и  $R_\rho$ . Далее, поскольку представляют интерес только наиболее неустойчивые конвективные моды, мы находили максимальные по всем значениям  $n$  и  $k$  инкременты  $\Lambda$  для фиксированных  $Ra$  и  $R_\rho$

$$\Lambda(Ra, R_\rho) = \max_{k, n} \lambda_n(k, Ra, R_\rho)$$

и те значения  $n$  и  $k$ , при которых эти максимумы достигаются. Не приводя здесь найденную зависимость  $\Lambda$  от  $Ra$  и  $R_\rho$ , ограничимся только построением диаграммы устойчивости (см. рисунок), т.е. укажем те области значений  $Ra$  и  $R_\rho$ , для которых предпочтительна одноярусная конвекция (значениям  $\Lambda$  соответствует  $n=1$ ), двухъярусная конвекция ( $n=2$ ) и т.д. Сплошные линии на рисунке представляют собой



границы этих областей на плоскости  $Ra, R_\rho$ . При достаточно низких значениях  $Ra$  в области, ограниченной сверху линиями 1 и 2, имеет место устойчивость ( $\text{Re}\lambda < 0$ ). Область, ограниченная снизу линией 1, соответствует одноярусной конвекции. Заштрихованная часть является областью колебательной неустойчивости. Для  $Ra$  и  $R_\rho$ , лежащих в этой области, инкременты  $\lambda$  имеют положительные действительные части и отличные от нуля мнимые части, причем с увеличением  $Ra$  при фиксированном  $R_\rho$  значение  $\text{Re}\lambda$  возрастает, а  $\text{Im}\lambda$  убывает, достигая нуля при значении  $Ra$ , лежащем на штрих-пунктирной линии. Область, расположенная между линиями 1, 2 и 3, соответствует двухъярусной конвекции, между линиями 1, 3 и 4 - трехъярусной, а область, ограниченная линиями 1 и 4 - четырехъярусной конвекции. В этих трех областях, как и в той части области одноярусной конвекции, которая расположена выше штрих-пунктирной линии, доминирующая мода неустойчивости имеет монотонный характер ( $\text{Im}\lambda = 0$ ).

В теории конвективной устойчивости используются критические числа Рэлея  $Ra_{cr}(k, n)$ , определяемые следующим образом: когда  $Ra = Ra_{cr}(k, n)$  возникает неустойчивость ( $\text{Re}\lambda = 0$ ) по отношению к возмущениям с данными  $k$  и  $n$ . Минимальное критическое число Рэлея  $Ra_m(n) = \min_k Ra_{cr}(k, n)$ , характеризующее возникновение моды неустойчивости с номером  $n$ , достигается при определенном значении  $k = k_m(n)$ . Для задачи Рэлея-Бенара ( $R_\rho = 0$ )

$$Ra_m(n) = 27\pi^4 n^4 / 4, \quad k_m(n) = \sqrt{2}\pi n / 2. \quad (14)$$

Данные значения  $Ra_m$  и  $k_m$  легко найти из (13), если положить  $\lambda_n = 0$ . На рисунке численно найденные зависимости  $Ra_m(n)$  от  $R_\rho$  показаны пунктирными линиями в тех случаях, когда они не совпадают со сплошными линиями диаграммы устойчивости. Анализ уравнения (11) показывает, что при рассматриваемом значении  $\beta$ , равном  $3/4$ , возникновение четвертой моды неустойчивости не зависит от  $R_\rho$ : критическое число  $Ra_m(4)$  для любых  $R_\rho$  определяется формулой (14), а соответствующая собственная функция - формулой (12) для  $n=4$ .

Как следует из уравнений (5)-(8), в случае, когда скорость  $W(z)$  обращается в нуль на контактной границе, т.е. когда  $W(\beta) = 0$ , параметр  $R_\rho$  выпадает из исходных уравнений задачи и не влияет на устойчивость системы. Так происходит для четвертой моды неустойчивости:  $\sin 4\pi z = 0$  при  $z = \beta = 3/4$ . Критическое число  $Ra_m(1)$ , напротив, монотонно возрастает с увеличением  $R_\rho$ , поскольку соответствующие собственные функции  $W(1, z, R_\rho)$  не могут по определению обращаться в нуль при  $0 < z < 1$  и, следовательно,  $W(1, \beta, R_\rho) \neq 0$ . Для второй и третьей

моды ситуация сложнее: при достаточно малых значениях  $R_\rho$  числа  $Ra_m(2)$  и  $Ra_m(3)$  увеличиваются с ростом  $R_\rho$  (этот эффект рассматривался в [6] и послужил основой для предположения о предпочтительности четырехъярусной конвекции, высказанного в этой работе), но при больших  $R_\rho$  числа  $Ra_m(2)$  и  $Ra_m(3)$  перестают зависеть от  $R_\rho$  и соответствующие пунктирные линии становятся горизонтальными прямыми. Дело в том, что с ростом  $R_\rho$  нуль собственной функции  $W(2, z, R_\rho)$  и один из двух нулей функции  $W(3, z, R_\rho)$  приближаются к значению  $z=\beta$ , при достижении которого наличие  $R_\rho \neq 0$  перестает влиять на устойчивость этих мод.

Подчеркнем отличие пунктирных и сплошных линий, показанных на рисунке. Для этого рассмотрим ситуацию, когда  $R_\rho$  фиксировано, а  $Ra$  возрастает. Если  $Ra$  поднимается над пунктирной линией, появляется новая мода неустойчивости (действительная часть ее инкремента становится положительной). Если же  $Ra$  поднимается над сплошной линией, данная мода становится наиболее неустойчивой среди всех остальных мод. Поэтому пунктирные линии расположены не выше, чем соответствующие им сплошные линии. Когда сплошная линия ограничивает область устойчивости, она совпадает с пунктирной линией: в этом случае конвективная мода, только возникнув, является уже наиболее неустойчивой.

При обычных оценках параметров однородной мантии, а именно:

$$\begin{aligned} \nu &\approx 10^{22} \text{ см}^2/\text{с}, & \kappa &\approx 10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}, & g &\approx 10^3 \text{ см}/\text{с}^2, \\ \alpha &\approx 10^{-5} \text{ К}^{-1}, & T_1 - T_2 &\approx 3 \cdot 10^3 \text{ К}, & d &\approx 3 \cdot 10^8 \text{ см} \end{aligned}$$

число Рэлея для мантии Земли оценивается как  $Ra \approx 10^7$ , а  $R_\rho \approx 3 \cdot 10^8 \Delta\rho$  ( $\Delta\rho = (\rho_1 - \rho_2)/\rho_2$ ). Тогда, как следует из результатов, приведенных на рисунке, если скачок плотности  $\Delta\rho$  превышает приблизительно  $10^{-3}$  (т.е.  $R_\rho > 3 \cdot 10^5$ ), наиболее неустойчивой в мантии является четырехъярусная конвективная мода, а при  $\Delta\rho < 10^{-3}$  предпочтительна одноярусная конвекция. Когда  $\beta=1/2$  (наши расчеты для этого случая полностью совпали с результатами работы [5]), линии 1 и 2 расположены примерно так же, как показано на рисунке, соответствующем  $\beta=3/4$ , но линий 3 и 4, отмечающих предпочтительность трех- и четырехъярусной конвекции, вообще нет: конкурируют только двух- и одноярусная конвекция.

Таким образом, учет реального соотношения между толщиной верхней и нижней мантией ( $\beta=3/4$ ) качественно меняет диаграмму устойчивости.

## Литература

1. *Cathles L.M.* The viscosity of the Earth's mantle. New Jersey: Princeton Univ. Press, 1975. 370 p.
2. *Peltier W.R., Andrews J.T.* Glacial isostatic adjustment. I. The forward problem // *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.* 1976. Vol.46, N 3. P.605-646.
3. *Schubert G., Turcotte D.L.* Phase changes and mantle convection // *J. Geophys. Res.* 1971. Vol.76, N 5. P.1424-1432.
4. *Davies C.F.* Whole-mantle convection and plate tectonics // *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.* 1977. Vol.49, N 2. P.459-486.
5. *Richter F.M., Johnson C.E.* Stability of chemically layered mantle // *J. Geophys. Res.* 1974. Vol.79, N 11. P.1635-1639.
6. *Биргер Б.И.* Влияние скачка плотности на конвективную устойчивость мантии Земли // *ДАН СССР.* 1988. Т.302, N 3. С.570-575.
7. *Наймарк Б.М., Исмаил-заде А.Т.* Гравитационная устойчивость вертикально-неоднородной среды с максвелловской реологией // *Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных.* М.: Наука, 1989. С.71-80. (Вычисл. сейсмология; Вып. 22).
8. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемых жидкостей. М.: Наука, 1972. 392 с.

УДК 550.348

*М.И.Рабинович, Н.Ф.Рулков*

### МЕХАНИЗМ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПОДВИЖЕК В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ

*M.I.Rabinovich, N.F.Rul'kov*

### THE MECHANISM OF VERTICAL DISPLACEMENTS IN A DYNAMIC EARTHQUAKE MODEL

We propose a mechanical model for earthquakes which, unlike the well-known Burridge-Knopoff model, takes into account the transversal vibrations against the background of displacements along a fault. It is shown that the energy of the moving fault can generate vertical displacements of the ground, as well as horizontal ones. The mechanism of parametric instability resulting in stochastic transversal vibrations is responsible for this energy transfer. Numerical experiments show that the amplitudes of transversal and longitudinal vibrations have the same order of magnitude.

Интерес к нелинейным динамическим моделям землетрясений усилился после работ [1.2], в которых использована модель Барриджа-Кно-