

Литература

1. *Cathles L.M.* The viscosity of the Earth's mantle. New Jersey: Princeton Univ. Press, 1975. 370 p.
2. *Peltier W.R., Andrews J.T.* Glacial isostatic adjustment. I. The forward problem // *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.* 1976. Vol.46, N 3. P.605-646.
3. *Schubert G., Turcotte D.L.* Phase changes and mantle convection // *J. Geophys. Res.* 1971. Vol.76, N 5. P.1424-1432.
4. *Davies C.F.* Whole-mantle convection and plate tectonics // *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.* 1977. Vol.49, N 2. P.459-486.
5. *Richter F.M., Johnson C.E.* Stability of chemically layered mantle // *J. Geophys. Res.* 1974. Vol.79, N 11. P.1635-1639.
6. *Биргер Б.И.* Влияние скачка плотности на конвективную устойчивость мантии Земли // *ДАН СССР.* 1988. Т.302, N 3. С.570-575.
7. *Наймарк Б.М., Исмаил-заде А.Т.* Гравитационная устойчивость вертикально-неоднородной среды с максвелловской реологией // *Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных.* М.: Наука, 1989. С.71-80. (Вычисл. сейсмология; Вып. 22).
8. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемых жидкостей. М.: Наука, 1972. 392 с.

УДК 550.348

М.И.Рабинович, Н.Ф.Рулков

МЕХАНИЗМ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПОДВИЖЕК В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ

M.I.Rabinovich, N.F.Rul'kov

THE MECHANISM OF VERTICAL DISPLACEMENTS IN A DYNAMIC EARTHQUAKE MODEL

We propose a mechanical model for earthquakes which, unlike the well-known Burridge-Knopoff model, takes into account the transversal vibrations against the background of displacements along a fault. It is shown that the energy of the moving fault can generate vertical displacements of the ground, as well as horizontal ones. The mechanism of parametric instability resulting in stochastic transversal vibrations is responsible for this energy transfer. Numerical experiments show that the amplitudes of transversal and longitudinal vibrations have the same order of magnitude.

Интерес к нелинейным динамическим моделям землетрясений усилился после работ [1.2], в которых использована модель Барриджа-Кно-

пова [3] для описания калифорнийского землетрясения. В этих работах рассмотрен механизм появления и свойства продольных пульсаций, возникающих за счет энергии продольных же перемещений литосферных плит. В большинстве реальных ситуаций, однако, продольные пульсации сопровождаются вертикальными (поперечными) вибрациями плит. Механизм подобных вертикальных вибраций в рамках нелинейных динамических моделей, насколько нам известно, ранее не обсуждался. Модель, в рамках которой удастся объяснить подобные вертикальные подвижки, предлагается в данной работе.

Модель

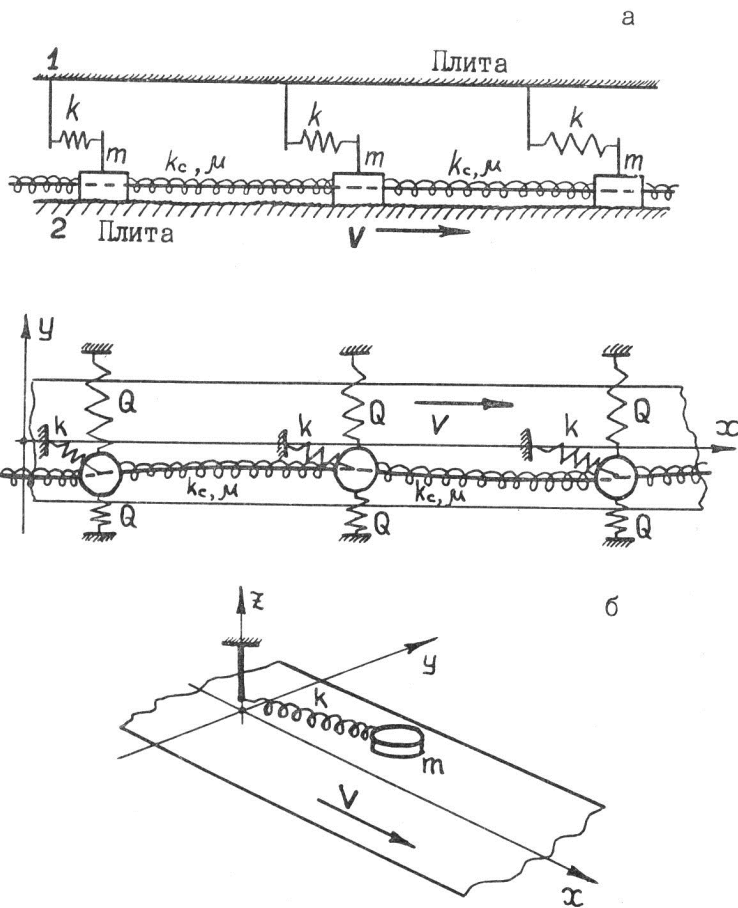
Следуя [1-3], рассмотрим динамику цепочки блоков, упруго закрепленных на одной из плит и зацепляющихся с продольно движущейся второй плитой за счет сил сухого трения. Однако в отличие от моделей [1-3] разрешим каждому блоку двигаться не только в продольном, но и в поперечном (вертикальном) направлении. Схема такой модели, представленная на рис.1.а, описывается системой уравнений в виде

$$m\ddot{\vec{r}}_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_v. \quad (1)$$

Здесь \vec{r}_n - вектор положения n-го блока; \vec{F}_1 - сила упругости, действующая на него со стороны пружин жесткостью k и Q; \vec{F}_2 - сила упругой связи с соседними блоками, стремящаяся восстановить начальное расстояние между ними; \vec{F}_3 - сила упругости поперечного сдвига, определяющая существование поперечных сдвиговых волн; $\vec{F}_v = -F(v)\frac{\vec{v}}{v}$ (где $v = |\vec{v}|$) - сила трения, зависящая от скорости \vec{v} блока относительно шероховатой поверхности. Нелинейность $F(v)$ записывается в виде:

$$F(v) = \begin{cases} \frac{F_0 v}{(1+\alpha v) v_0}, & v \leq v_0, \\ \frac{F_0}{1+\alpha v}, & v > v_0. \end{cases} \quad (2)$$

Обратим внимание на одно упрощающее обстоятельство. Свойства пружины Q, моделирующей жесткие упругие свойства нижнего слоя плиты, как показывают численные эксперименты, влияют, в первую очередь, на количественную сторону процессов. Поэтому в широкой области параметров влияние этой пружины можно учесть, если увеличить коэффициенты μ , k, F_0 . Ниже рассматривается соответствующая упрощенная модель.



Р и с. 1. Схемы модели Барриджа-Кнопова с учетом поперечных колебаний (а) и механического аналога уравнений (7) (б)

После введения переменных (u_n, y_n) , характеризующих смещение n -го блока относительно точки равновесия в продольных и поперечных направлениях, (1) можно записать в виде

$$\ddot{u}_n + F(v_n) \frac{\dot{u}_n - v}{v_n} + K(R_n - L) \frac{u_n + L'}{R_n} + K_c \left\{ \Delta l_{n-1, n} \frac{u_n - u_{n-1} - a}{l_{n-1, n}} + \Delta l_{n, n+1} \frac{u_n - u_{n+1} + a}{l_{n, n+1}} \right\} = 0,$$

$$\ddot{y}_n + F(v_n) \frac{\dot{y}_n}{v_n} + K(R_n - L) \frac{y_n}{R_n} + M[y_{n-2} - 4y_{n-1} + 6y_n - 4y_{n+1} + y_{n+2}] +$$

$$+ K_c \left\{ \Delta l_{n-1, n} \frac{y_n - y_{n-1}}{l_{n-1, n}} + \Delta l_{n, n+1} \frac{y_n - y_{n+1}}{l_{n, n+1}} \right\} = 0, \quad (3)$$

Где v - скорость относительного движения плиты. $v \gg v_0$;

$$v_n = \sqrt{(\dot{u}_n - v)^2 + \dot{y}_n^2}; \quad R_n = \sqrt{(u_n + L')^2 + y_n^2}; \quad L' = L + F(v)/K;$$

$$l_{n,n+1} = \sqrt{(u_{n+1} - u_n + a)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2}; \quad \Delta l_{n,n+1} = l_{n,n+1} - a;$$

$$K = k/m; \quad K_c = k_c/m; \quad M = \mu/m; \quad f_0 = F_0/m,$$

где μ определяет упругость края плиты к поперечным сдвиговым деформациям (см. рис 1.а).

Сила упругости поперечного сдвига в уравнениях (3) учтена лишь в линейном приближении, поскольку подобное существенное упрощение модели не отражается на особенностях возбуждения поперечных колебаний.

Континуальным аналогом (3) служит система

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F(v) \left(\frac{\partial u}{\partial t} - v \right) / v + K \frac{\sqrt{(u+L')^2 + y^2} - L}{\sqrt{(u-L')^2 + y^2}} (u+L') - \\ - K_c a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} - 1}{\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - 1 \right) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + F(v) \frac{\partial y}{\partial t} / v + K \frac{\sqrt{(u+L')^2 + y^2} - L}{\sqrt{(u-L')^2 + y^2}} y + M \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \\ - K_c a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} - 1}{\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} \frac{\partial y}{\partial x} \right\} = 0, \end{aligned}$$

$$\text{где } v = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial t} - v\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}.$$

Неустойчивость режима равномерного скольжения

Система (4) имеет однородное стационарное решение

$$\begin{aligned} u(x, t) = 0, \\ y(x, t) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

отвечающее однородному скольжению. Для малых возмущений на фоне этого скольжения $\xi(x, t) = u(x, t)$, $\eta(x, t) = y(x, t)$ из (4) имеем независимые уравнения для ξ и η :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \xi}{\partial t} + K\xi - K_c a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \eta}{\partial t} + M \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} = 0, \quad (6.2)$$

где $g = -\frac{dF(v)}{dv} \Big|_{v=v} > 0$, $\sigma = F(v) \Big|_{v=v} > 0$.

Легко убедиться, что продольные колебания нарастают с инкрементом не ниже $g/2$. Причем для $g > \sqrt{4K}$ длинноволновые возмущения (с длиной волны $\lambda > \lambda_0 = 4\pi a \sqrt{K_c / (g^2 - 4K)}$) имеют более высокие инкременты $\lambda = g/2 + \sqrt{g^2/4 - K - a^2 K_c} (2\pi/\lambda)^2$.

Нелинейную динамику пульсаций проще всего исследовать в предельном случае $\lambda \rightarrow \infty$ (однородные колебания). Полагая $u(x,t) = u(t)$, $y(x,t) = y(t)$ из (4) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} + F(v) \left(\frac{du}{dt} - v \right) / v + K \frac{\sqrt{(u+L')^2 + y^2} - L}{\sqrt{(u+L')^2 + y^2}} (u+L') &= 0, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + F(v) \frac{dy}{dt} / v + K \frac{\sqrt{(u+L')^2 + y^2} - L}{\sqrt{(u+L')^2 + y^2}} y &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Эти уравнения описывают также динамику одного упруго закрепленного блока, лежащего на шероховатой, движущейся с постоянной скоростью поверхности (см. рис.1.б).

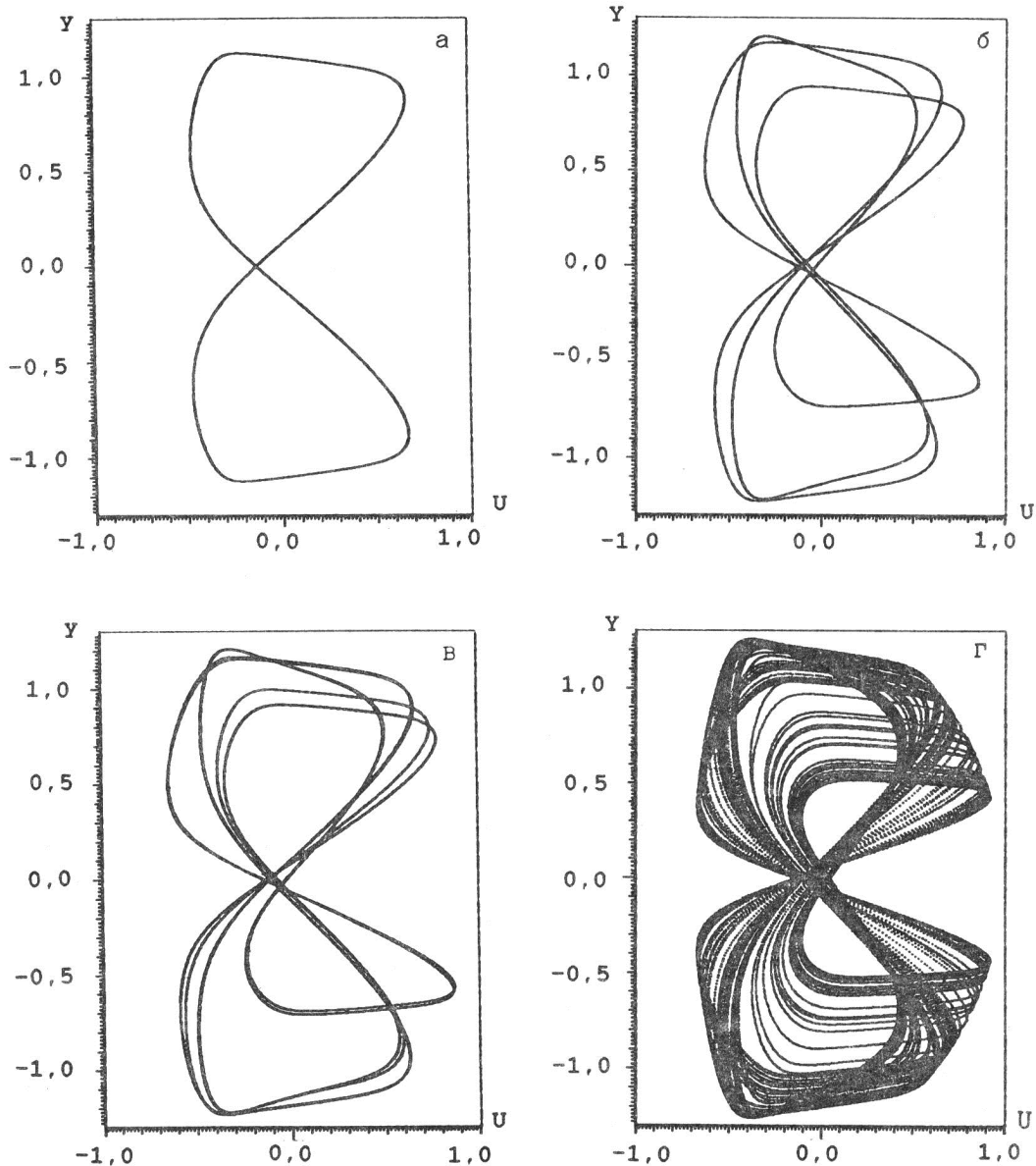
Хаотическая динамика одного элемента

В четырехмерном фазовом пространстве (u, \dot{u}, y, \dot{y}) системы (7) для значений параметров $F(v) > KL$ существует единственное состояние равновесия $O_0(0, 0, 0, 0)$. Если значение скорости v выбрано на падающем участке функции $F(v)$, то это состояние равновесия будет неустойчивым фокусом или узлом. В области параметров $F(v) \leq KL$ совместно с O_0 имеется также состояние равновесия седлового типа $O_1(-2L, 0, 0, 0)$.

Простейший тип движения блока соответствует устойчивому предельному циклу, целиком лежащему на интегральной поверхности $\dot{u}=0$, $\dot{y}=0$. Это чисто продольные автоколебания. При превышении скорости v некоторого критического значения такой предельный цикл теряет устойчивость и в фазовом пространстве появляется предельный цикл T , отвечающий как продольным, так и поперечным колебаниям блока. Из уравнений (7) нетрудно видеть, что появление поперечной неустойчивости определяется параметрическим возбуждением за счет периодических изменений длины пружины k , вызванных продольными автоколебаниями. Заметим, что периодическое изменение лишь диссипативно-

го слагаемого, связанного с вариациями силы трения, к поперечной неустойчивости не приводит.

На рис.2 приведены основные типы автоколебаний, наблюдаемые в



Р и с. 2. Проекция аттракторов системы (7) на плоскость переменных (u, y) , для значений параметров $K=1, L=1, f_0=1, v_0=0,1, \alpha=5$

а - $\nu=0,48$; б - $\nu=0,4993$; в - $\nu=0,5$; г - $\nu=0,505$

системе (7) при варьировании параметра v . Переход к хаотическим автоколебаниям блока в этом случае сопровождается следующими бифуркациями. При увеличении скорости v предельный цикл T (см. рис.2.а) теряет устойчивость и в фазовом пространстве рождается пара трехтактных предельных циклов $3T$. Один из этих циклов изображен на рис.2.б. Затем каждый из этих циклов испытывает бифуркацию удвоения периода (см. рис.2.в). Серия бифуркаций удвоения периода приводит к рождению двух взаимно симметричных странных аттракторов, которые в дальнейшем в результате кризиса сливаются в один симметричный странный аттрактор (см. рис.2.г).

Приведенный выше сценарий указывает на возможность появления сложного хаотического поведения даже в случае уединенного упруго закрепленного блока, скользящего по шероховатой поверхности. Такое поведение обеспечивается за счет возбуждения поперечных колебаний. С точки зрения цепочки блоков появление стохастических колебаний в системе (7) указывает на существование (для достаточно широкой области параметров) нерегулярных пространственно однородных решений. Однако такие решения, как следует из численного моделирования, являются неустойчивыми.

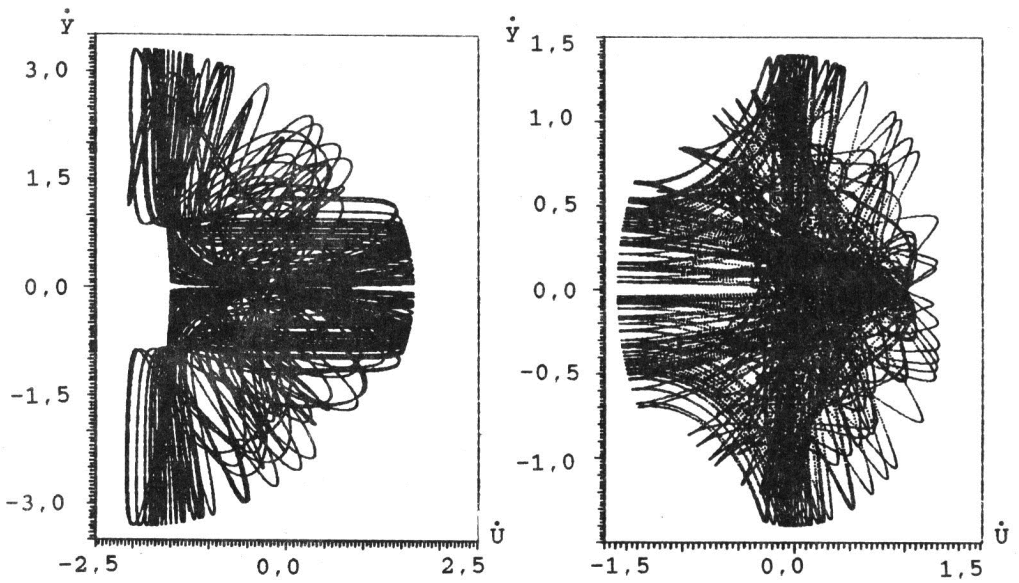
Возбуждение поперечных пульсаций вдоль цепочки блоков

Для исследования основных причин возбуждения поперечных колебаний рассмотрим континуальную модель (4). Линеаризуя второе уравнение системы (4) вдоль продольных движений (т.е. предполагая $y(x,t)$ и $\dot{y}(x,t)$ малыми) получим линейное неавтономное уравнение

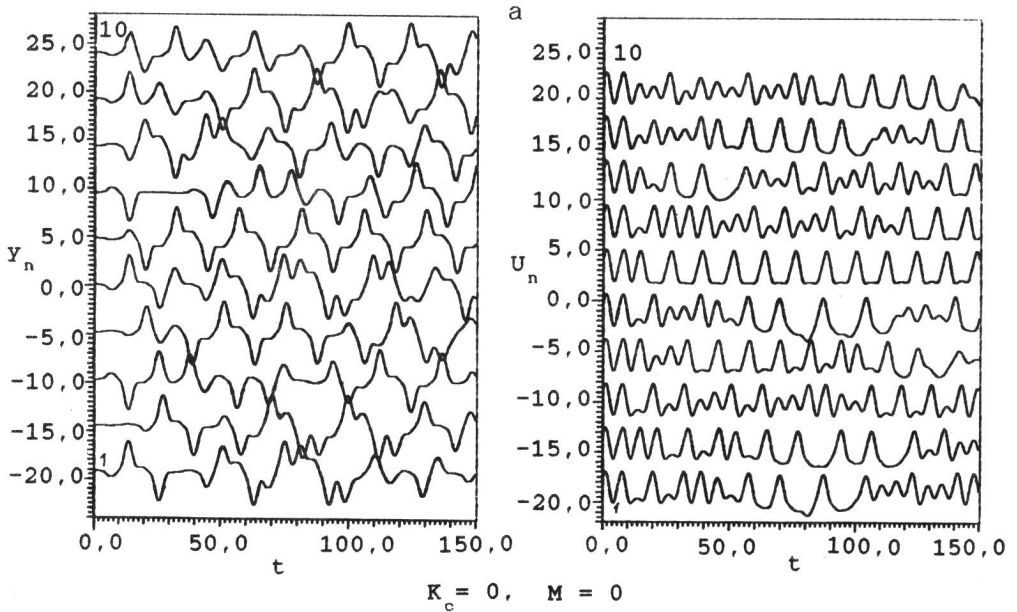
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + F(v) \frac{\partial y}{\partial t} / v + K \frac{u(x,t)}{u(x,t)+L} y + M \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + K_c a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} / \left(1 + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) \right\} = 0. \quad (8)$$

Из этого уравнения следует, что неустойчивость к поперечным возмущениям возможна лишь за счет параметрического возбуждения, обусловленного третьим и пятым слагаемыми уравнения. Причем благодаря третьему слагаемому параметрическое воздействие оказывают как пространственно однородные, так и пространственно неоднородные продольные колебания.

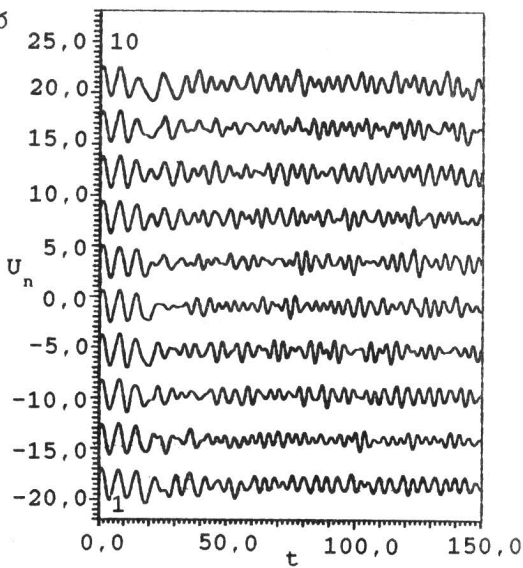
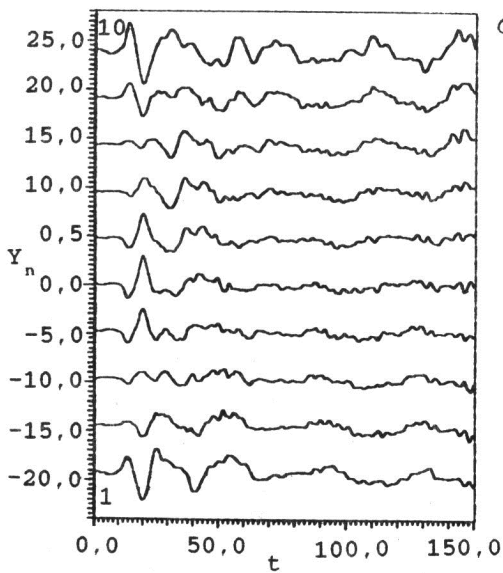
Исследования чисто продольных колебаний в цепочке блоков, проводимые в работах [1,2], указывают на то, что пространственно однородные продольные колебания являются неустойчивыми. Это, в свою очередь, может приводить к увеличению эффективности параметрического возбуждения за счет пятого слагаемого уравнения (8).



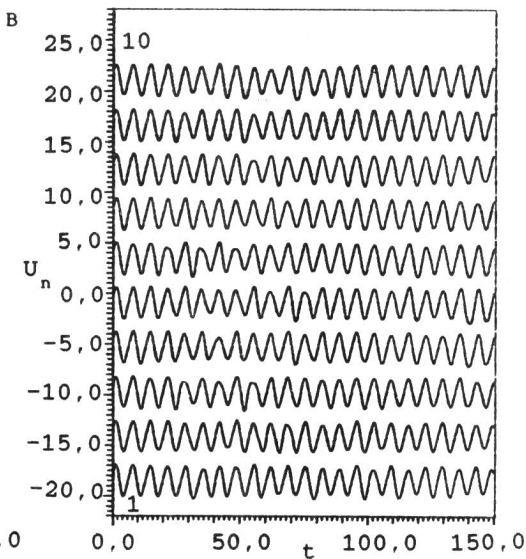
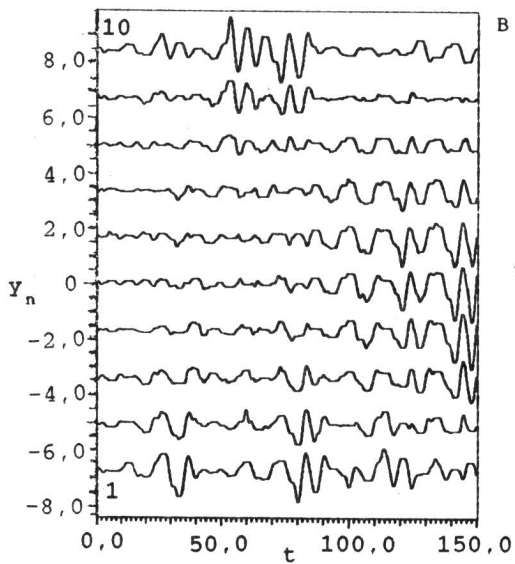
Р и с. 3. Проекция установившегося движения единственного блока (рис.1,б) на плоскости переменных (u, y) и (u, \dot{y})



Р и с. 4. Осциллограммы поперечных и продольных пульсаций блоков в цепочке при $N=10$



$K_c = 1, \quad M = 1, \quad L_c = 3,$



$K_c = 1, \quad L_c = 4, \quad M = 1, \quad q/m = 1$

Р и с. 4. (Окончание)

Приведем результаты численного моделирования развития поперечной неустойчивости с помощью модели (3). Будем рассматривать случай, когда цепочка состоит из 10 блоков и параметры каждого блока равны $f_0=1$, $K=1$, $L=2$, $v=1$, $v_0=0,01$, $\alpha=5$. Заметим, что при данных значениях параметра единичный блок демонстрирует стохастические автоколебания, которым соответствует странный аттрактор, изображенный на рис.3. Осциллограммы поперечных и продольных колебаний для не взаимодействующих между собой блоков приведены на рис.4,а. На рис.4,б изображены аналогичные осциллограммы для случая связанных блоков с начальными условиями: $u_n(0) = 0,1\sin(0,75n)$; $y_n(0) = 0,1\sin(1,5n)$; $\dot{u}_n(0)=v$; $\dot{y}_n(0)=0$; $n=1+10$. На рис.4,в показаны колебания блока при дополнительном учете поддерживающих пружин с параметрами $Q/m=1$.

Как видно из рис.4,б, вначале поперечные колебания незначительны, а продольные имеют малые отклонения от пространственно однородных. По мере нарастания поперечных колебаний движения блоков становятся более нерегулярными. При этом амплитуда поперечных пульсаций становится того же порядка, что и амплитуда продольных движений.

Принципиально, что стохастические колебания цепочки блоков по поперечным и продольным направлениям реализуются в широкой области параметров. Это указывает на возможность реализации подобного механизма появления вертикальных подвижек для реальных параметров разлома.

Примечательно, что стохастическое поведение характерно и для небольшого числа блоков. В частности, хаотические движения реализуются для системы, содержащей лишь один блок. Здесь хаос возможен благодаря возбуждению поперечных колебаний, обусловленному параметрической накачкой со стороны продольных проскальзываний блока.

Литература

1. *Burridge R., Knopoff L. Model and theoretical seismicity//Bull. Seismol. Soc. Amer. 1967. Vol.57. P.341-360.*
2. *Carlson J.M., Lander J.S. Properties of earthquakes generated by fault dynamics//Phys. Rev. Lett. 1989. Vol.62, N 22. P.2632-2648.*
3. *Carlson J.M., Lander J.S. Mechanical model of an earthquake fault//Phys. Rev. 1989. Vol.40, ser.A. N 11. P.6470-6481.*