

М.Я. Кельберт, И.А. Сазонов

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ОРРА-ЗОММЕРФЕЛЬДА

M.Ya. Kelbert, I.A. Sazonov

ASYMPTOTICS FOR PARTICULAR SOLUTIONS OF ORR-SOMMERFELD'S EQUATION

The paper presents the study of evolution of hydrodynamic perturbation with initial vorticity being harmonic along the flow and initially localized in a thin layer. We suppose that there are two small parameters: the velocity profile curvature and viscosity. The solution of the Cauchy problem may be treated as the evolution of a continuous spectrum wave in the viscous flow. It is useful to introduce the "viscous time" $t_v \sim \nu^{-1/3} (kU')^{-2/3}$, where ν is viscosity, k is wave number, U' is z -gradient of the flow. The solutions to problems with viscous and ideal fluids are shown to be very close to each other up to the viscous time outside of neighborhoods of the critical layer. That neighbourhood is growing in time as $(\nu t)^{1/2}$. In the case of a viscous fluid our approach is based on the detailed asymptotics for minors of the fundamental matrix for Orr-Sommerfeld's equation. In some cases the leading terms of asymptotics for two-order minors depend on the higher terms of asymptotics for particular solutions.

При исследовании динамики жидкого ядра возникает ряд проблем, относящихся к теории гидродинамической устойчивости [1,2]. В их числе - эволюция возмущений в потоках со сдвигом скорости. Проблема исследования возмущений в таких потоках имеет долгую историю, оно было начато еще Рэлеем [3] в связи с проблемой "поющих пламен". Далее с этими задачами связаны имена Зоммерфельда [4], Гейзенберга [5], Ландау [6], Линя [7]. Тем не менее даже при изучении простейших потоков сравнительно недавно были обнаружены новые эффекты, как, например, волны непрерывного спектра [8,9], называемые иногда волнами Ван Кампена-Кейза [10] и играющие важную роль в динамике сдвиговых потоков. Особенно сложной является проблема перехода от вязкой жидкости к невязкой [7]. Действительно, спектральные задачи для вязкого и невязкого случаев существенно различны. Однако в эволюционных задачах, т.е. при рассмотрении волновых пакетов на конечных временах, переход к невязкому пределу осуществим.

Это будет продемонстрировано на примере эволюции одиночной волны Ван Кампена-Кейза. Решение задачи основано на предварительном подробном анализе асимптотического поведения решений уравнения Орра-Зоммерфельда, описывающего малые гармонические возмущения поля скоростей в плоскопараллельных потоках вязкой жидкости [4,11]:

$$[(c-U)(\partial_z^2 - k^2) + U'' - (iv/k)(\partial_z^2 - k^2)^2] w = 0. \quad (1)$$

Здесь $w(z,t)$ - возмущение вертикальной скорости; $U(z)$ - профиль скорости основного потока; k - горизонтальное волновое число (вдоль потока, множитель $\exp(ikx)$ опущен); $c=\omega/k$ - фазовая скорость возмущений; ν - кинематическая вязкость. Сходные уравнения возникают в потоках более сложного вида, а также в магнитной гидродинамике при изучении альфвеновских и ленгмюровских колебаний в неоднородной и неравновесной плазме [2,12,13].

Отметим два важных частных случая этого уравнения: 1) $\nu=0$ - отсутствие вязкости, 2) $U''=0$ - линейный профиль скорости. В первом случае получаем уравнение Рэлея [3,7]. Хотя уравнение Рэлея и более низкого порядка, оно сингулярно, поэтому его решения обладают необычными свойствами: непрерывный спектр [8,9], квазисобственные функции [14] и т.д. Во втором случае уравнение может быть факторизовано и его решения выписываются явно (см. ниже). Частные решения естественно распадаются на два класса - вязкие и невязкие. Учет сколь угодно малой кривизны профиля скорости запутывает картину, и разбиение решений на вязкие и невязкие становится нетривиальным.

Таким образом, физически интересным является асимптотическое исследование решений уравнения Орра-Зоммерфельда при наличии двух малых параметров - ν и U'' .

Такое исследование начато в работах [7,15], а наиболее полно проведено в [12,13]. Специфика задач, рассматриваемых в этих работах такова, что достаточно было ограничиться главным членом асимптотики (см., например, задачу о прохождении волны через резонансную точку [12,13]). Однако в ряде задач требуется провести более тонкий анализ (см., например, разобранную ниже задачу об эволюции возмущения, начальная завихренность которого сосредоточена в узком слое), поскольку асимптотика спектра решения в некоторых областях ω определяется последующими членами асимптотических разложений, а главные члены взаимно сокращаются.

Для исследования асимптотик частных решений уравнения Орра - Зоммерфельда удобно перейти к безразмерным координатам $\zeta=kz$ и

$$\tau = U'(0) t$$

$$(\omega - \beta) \mathcal{D} w + \beta'' w - i R^{-1} \mathcal{D}^2 w = 0, \quad (2)$$

где $\mathcal{D} = \partial_{\zeta}^2 - 1$; $R = U'(0)/k^2 \nu$ - число Рейнольдса;

$\beta(\zeta) = kU(z(\zeta))/U'(0)$ - безразмерная скорость потока;

$\beta'' = \partial_{\zeta}^2 \beta$ - безразмерная кривизна профиля скорости. В безразмерном виде малыми параметрами являются R^{-1} и $\sigma = \beta''(0)$.

1. Исследование решений модельного уравнения

Поскольку непосредственный анализ (2) затруднителен, при малых R^{-1} и σ в качестве модельного рассматривают уравнение [12,13]

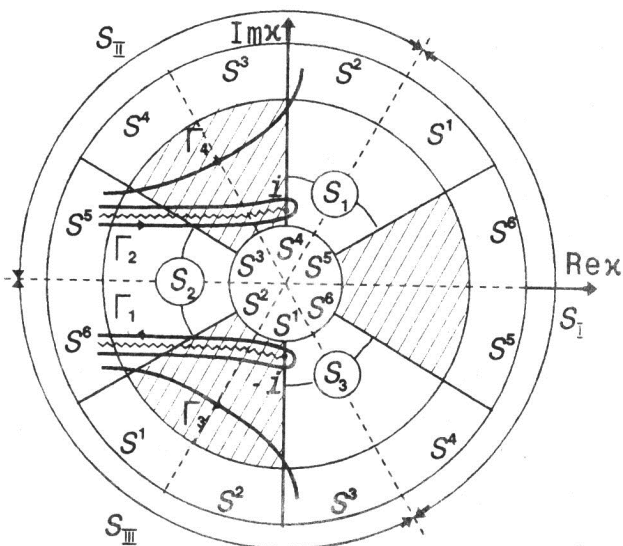
$$(\omega - \zeta) \mathcal{D} w + \sigma w - i R^{-1} \mathcal{D}^2 w = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) получается, если в первом слагаемом (2) оставить первый член разложения в по ζ , а во втором - нулевой член разложения β'' по ζ . В п.2 будет показано, что такое упрощение правомерно и сделаны необходимые уточнения. Изучим решения уравнения (3).

Методом преобразования Фурье по координате ζ , частные решения могут быть найдены в виде [12,13]

$$w_{1,2,3,4} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{1,2,3,4}} \exp[-i\delta\kappa + R^{-1}\kappa^3/3] \left(\frac{\kappa - i}{\kappa + i} \right)^{\sigma/2} \frac{d\kappa}{1 + \kappa^2}, \quad (4)$$

$\delta = \omega - \zeta + iR^{-1}$; $\Gamma_{1,2,3,4}$ - топологически различные контуры, которые мы определим ниже. Обозначим через S_1, S_2, S_3 сектора на плоскости κ , в которых подынтегральное выражение в (4) убывает при $|\kappa| \rightarrow \infty$ (рис.1). На нем показаны контуры Γ_1 и Γ_2 , обходящие разрезы, кото-



Р и с. 1. Контуры интегрирования на плоскости κ , соответствующие линейно независимым частным решениям уравнения Орра-Зоммерфельда

рые начинаются в точках ветвления $x_1 = -i$, $x_2 = i$ и уходят в сектор S_2 . Интегралы по этим контурам w_1 и w_2 будем называть невязкими решениями. На этом же рисунке изображены контуры Γ_3 и Γ_4 , проходящие из сектора S_2 в S_3 и соответственно из сектора S_2 в S_1 вдали от начала координат. Интегралы по этим контурам w_3 и w_4 будем называть вязкими решениями.

Названия решений $w_{1,2,3,4}$ поясняются при рассмотрении линейного профиля ($\beta = \zeta, \sigma = 0$), когда (2) и (3) совпадают и могут быть записаны в факторизованном виде

$$(\partial_\zeta + iR\delta)\mathcal{D}w = 0, \quad \delta = \omega - \zeta + iR^{-1}. \quad (5)$$

Два частных решения этого уравнения, удовлетворяющие уравнению Рэлея для линейного профиля $\mathcal{D}w = 0$, имеют вид

$$w_{1,2} = B_{1,2} \exp(\pm \zeta). \quad (6)$$

Вычисляя интегралы (4) по контурам Γ_1 и Γ_2 (при $\sigma = 0$ точки $x_{1,2} = \mp i$ перестают быть точками ветвления, но остаются полюсами первого порядка), получаем, что решения (4), (5) совпадают, если

$$B_{1,2} = \mp (1/2) \exp[\mp (\omega + 2iR^{-1}/3)]. \quad (7)$$

Вторая пара частных решений (5) быстро осциллирует и сильно зависит от R . Эти решения можно выразить с помощью квадратур

$$w_{3,4} = \mathcal{D}^{-1} n_{3,4} = e^\zeta \int_{\mp \infty}^{\zeta} e^{-2u} \int_{\mp \infty}^u e^v n_{3,4}(v) dv du, \quad (8)$$

где

$$n_{3,4}(\zeta) = B_{3,4} \text{Ai}[\xi(\zeta) e^{\mp 2i/3}] - \quad (9)$$

частные решения уравнения $(\partial_\zeta^2 + iR\delta)n = 0$, сводящегося к уравнению Эйри при переходе от ζ к переменной $\xi = iR^{1/3}\delta$, имеющей смысл фазы вязкой волны.

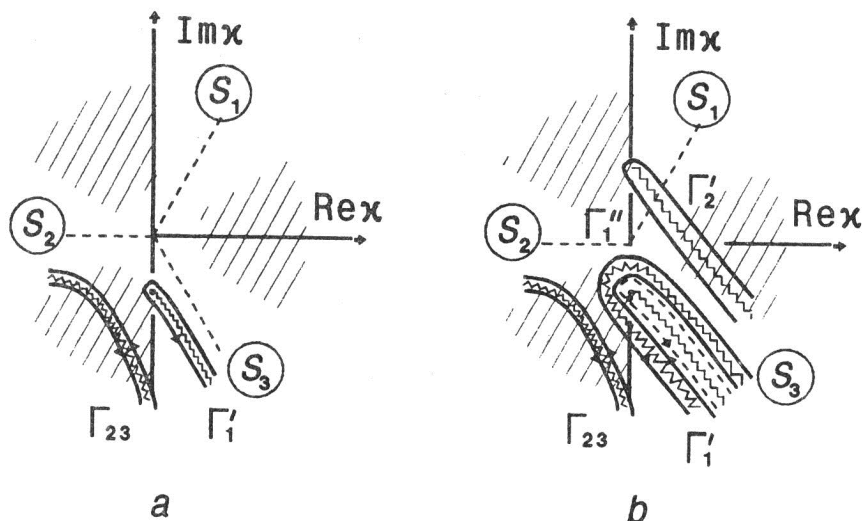
Из сопоставления асимптотик $w_{1,2}$ при $|\delta| \rightarrow \infty$, $\text{Im} \delta > 0$, найденных из формул (8), (9) и из интеграла (4) по контурам Γ_3 и Γ_4 , заключаем, что эти решения совпадают при

$$B_{3,4} = R^{1/3} e^{-5\pi/6}.$$

Асимптотика интегралов (4) находится методом перевала (см. ниже), а в формулах (8), (9) следует использовать асимптотику функции Эйри.

Таким образом, определенные выше частные решения уравнения (3) при $\sigma \rightarrow 0$ переходят соответственно в невязкие $w_{1,2}$ и вязкие $w_{3,4}$ решения (5).

Исследуем асимптотику вязких решений (4) при $|\delta| \gg R^{-1/3}$ и всех аргументах δ методом перевала. Удобно выделить сектора $S^1, \dots, S^6$ плоскости δ (рис.2), в каждом из которых решения w_3 и w_4 имеют свое характерное поведение. Фазовая функция $\Psi(x) = -i\delta x + R^{-1}x^3$ имеет две точки перевала x_p и $-x_p$, где $x_p = (i\delta R)^{1/2}$; ветвь корня выберем так, чтобы при $\arg \delta \neq -\pi/2$ точка x_p лежала в верхней полуплоскости, а $-x_p$ - в нижней. На рис.2 показаны сектора плоскости



Р и с. 2. Сектора роста вязких частных решений уравнения Орра-Зоммерфельда (заштрихованы), аналитическое продолжение интегралов I_{ij}

x , в которые попадают точки перевала $\pm x_p$, когда δ принадлежит секторам $S^1, \dots, S^6$. Выделим на плоскости x еще три сектора S_I, S_{II}, S_{III} (см. рис.1). Если $x_p \in S_{II}$, то существует перевальный контур Γ_{23} из S_2 в S_3 ; если $-x_p \in S_{III}$, то существует перевальный контур Γ_{21} из S_2 в S_1 ; наконец, если $x_p \in S_I$ либо $-x_p \in S_I$, то существует перевальный контур Γ_{13} из S_1 в S_3 . Интегралы по упомянутым перевальным контурам обозначим через I_{23}, I_{21}, I_{13} соответственно; каждый из этих интегралов определен не при всех $\arg \delta$. Например, I_{23} определен при $\delta \in S^{1,2,3,6}$; I_{21} - при $\delta \in S^{2,3,4,5}$, I_{31} - при $\delta \in S^{1,4,5,6}$. Если δ переходит из S^5 в S^6 , то I_{21} аналитически продолжается в I_{23} ; если δ переходит из S^2 в S^1 , то $I_{23} \rightarrow I_{13}$; наконец, если δ переходит из S^3 в S^4 , то $I_{21} \rightarrow I_{31} = -I_{13}$.

Метод перевала дает для интегралов I_{21}, I_{13}, I_{23} следующие асимптотические ряды:

$$I_{23} = I_{13} \Big|_{\delta \in S^{4,5}} = E_{23} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (-i\kappa_p \delta)^{-k} \right),$$

$$I_{21} = I_{31} \Big|_{\delta \in S^{1,6}} = E_{21} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (i\kappa_p \delta)^{-k} \right),$$
(10)

где

$$E_{23} = \frac{R^{1/4} \exp[-\frac{2}{3} i \kappa_p \delta]}{(\kappa_p^2 + 1) 2\pi^{1/2} \delta^{1/4}} e^{-\pi i/8 \left[\frac{-\kappa_p - i}{-\kappa_p + i} \right]^{\sigma/2}}, \quad |\arg \delta + \frac{\pi}{2}| < \pi,$$

$$E_{21} = \frac{R^{1/4} \exp[+\frac{2}{3} i \kappa_p \delta]}{(\kappa_p^2 + 1) 2\pi^{1/2} \delta^{1/4}} e^{3\pi i/8 \left[\frac{\kappa_p - i}{\kappa_p + i} \right]^{\sigma/2}}, \quad |\arg \delta + \frac{\pi}{2}| < \pi,$$
(11)

где $\alpha_1 = (101/48) + O(\sigma), \dots$. Ветвь корня здесь и далее - положительная при положительных значениях аргумента.

Из рис.1 видно, что при $\delta \in S^{2,3}$ точка перевала κ_p лежит в S_{II} , а $-\kappa_p$ - в S_{III} , в этом случае $w_3 = I_{21}$, $w_4 = I_{23}$. Если δ лежит в других секторах, то связь решений w_3 , w_4 с интегралами I_{ij} более сложная. Прежде чем ее исследовать определим интегралы I_1 и I_2 по контурам Γ'_1 , Γ'_2 , обходящим точки ветвления по пути наискорейшего спуска фазовой функции $\Psi(\kappa)$ от точки ветвления. При $|\kappa| \ll (R|\delta|)^{1/2}$ направление этих путей определяется $\arg \delta$, а при $|\kappa| \gg (R|\delta|)^{1/2}$ они попадают в один из секторов S_1 , S_2 , S_3 : при $\delta \in S^{2,3}$ - в S_2 , при $\delta \in S^{4,5}$ - в S_1 , при $\delta \in S^{1,6}$ - в S_3 . Сектора вблизи начала координат на рис.1 показывают направление пути наискорейшего спуска, когда δ находится в соответствующем секторе $S^1, \dots, S^6$.

Интегралы I_1 , I_2 можно вычислить точно лишь при $\sigma=0$ (с помощью вычетов) либо при $R^{-1}=0$, в этом случае они выражаются через функцию Уиттекера [16] или близкую к ней вырожденную (конфлуэнтную) гипергеометрическую функцию второго рода (см. ниже). При $\sigma \neq 0$ и $R^{-1} \neq 0$ для I_1 , I_2 строится асимптотический ряд по R^{-1} . Покажем это на примере функции I_1 . Выполним в интеграле (4) по контуру Γ'_1 замену $\kappa = -2iu - i$:

$$I_1 = - \frac{e^{1/3R}}{4\pi i} \int_{\Gamma_u} u^{-1-\sigma/2} (u+1)^{-1+\sigma/2} \exp[-2\delta_0 u + \frac{8iu^3}{3R} + \frac{4iu^2}{R}] du, \quad (12)$$

где $\delta_0 = \omega - \zeta = \delta - iR^{-1}$, контур Γ_u обходит точки ветвления $u=0$ вдоль пути наискорейшего спуска. Далее в (12) произведем еще одну замену $u \rightarrow t$, такую что

$$t = u - 4iu^3/3R\delta_0 - 2iu^2/3R\delta_0.$$

Заметим, что основной вклад в (12) дают малые u : $|u| \ll |R\delta_0|^{1/2}$, а вкладом участков, для которых $|u| \gg |R\delta_0|^{1/2}$ можно пренебречь. При $|u| \ll |R\delta_0|^{1/2}$ выразим u через t методом последовательных приближений

$$u = t + 4it^3/3R\delta_0 + 2it^2/3R\delta_0 + O(|R\delta|^{-2}).$$

Теперь разложим внеэкспоненциальную функцию в ряд по $(R\delta_0)^{-1}$. Интегрируя почленно, получим формальный асимптотический ряд

$$\begin{aligned} I_1 = & -(1/2)e^{-\delta + i/3R} \{ Y(-1-\sigma/2, -1+\sigma/2; 2\delta_0) + \\ & + 2i(R\delta_0)^{-1}(1-\sigma/2) [(2/3)(2-\sigma/2)(1-\sigma/2)^{-1}Y(1-\sigma/2, -1+\sigma/2; 2\delta_0) - \\ & - (2/3)Y(2-\sigma/2, -2+\sigma/2; 2\delta_0) + Y(-\sigma/2, -1+\sigma/2; 2\delta_0) - \\ & - Y(1-\sigma/2, -2+\sigma/2; 2\delta_0)] + O(|R\delta_0|^2) \}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Y(m-\sigma/2, n+\sigma/2; x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_t} t^{m-\sigma/2} (t+1)^{n+\sigma/2} e^{-xt} dt = \\ &= \frac{e^{(m-\sigma/2)\pi i}}{\Gamma(-m+\sigma/2)} \Psi(m+1-\sigma/2, 2+m+n; x). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь Ψ - вырожденная гипергеометрическая функция второго рода [16]. Используя малость параметра σ , (13) можно записать в более простом виде: разлагая подынтегральную функцию в ряд по σ и интегрируя почленно, получаем

$$\begin{aligned} Y(-1-\sigma/2, -1+\sigma/2; 2\delta) &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{-2\delta t}}{t(t+1)} dt - \frac{\sigma}{2} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\ln t}{t(t+1)} e^{-2\delta t} dt + \\ &+ O(\sigma^2) = 1 - \frac{\sigma}{2} [e^{2\delta} \text{Ei}(-2\delta) - \ln(2\delta)] + O(\sigma^2). \end{aligned}$$

Аналогичные асимптотические формулы выписываются и для функций Y других аргументов.

В результате получаем для интегралов $I_{1,2}$ следующее разложение по σ и $(R\delta_0)^{-1}$:

$$\begin{aligned} I_{1,2} = & \mp \frac{1}{2} \exp[\mp(\delta + i/3R)] \{ 1 \mp \frac{\sigma}{2} [\exp(\pm 2\delta_0) \text{Ei}(\mp 2\delta_0) - \ln(\pm 2\delta_0)] + \\ & + \frac{\sigma}{3R\delta_0} [\text{Ei}(\mp 2\delta_0) \mp \delta_0^{-1} + \delta_0^{-2}] + O(\sigma^2) + O(\sigma(R\delta_0)^{-2}) \}. \end{aligned} \quad (14)$$

Теперь рассмотрим асимптотику решений $w_1, \dots, w_4$ при $|\delta| \gg R^{-1/3}$ во всех секторах плоскости δ ; начнем с w_3 . Если $\delta \in S^{1,2,3,6}$, то точка перевала лежит в S_{III} и контур Γ_3 непосредственно деформируется в перевальный, в этом случае $w_3 = I_{23}$. Если $\delta \in S^{4,5}$, то для применения метода перевала необходимо деформировать Γ_3 в четыре контура: два перевальных и два - обходящих точки ветвления, в этом случае $w_3 = I_{21} + I_{13} + I_1 + I_2$. Аналогичные рассуждения можно провести и для w_4 . В итоге получаем следующие соотношения:

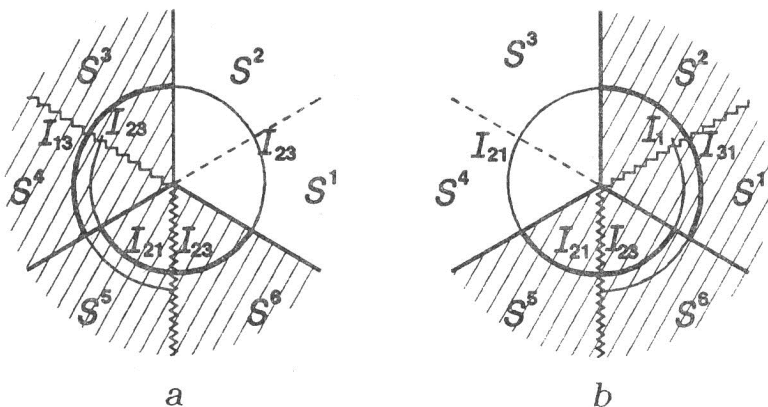
$$w_3 = \begin{cases} I_{23}, & -\frac{\pi}{2} < \arg \delta < \frac{5\pi}{6} \quad (\delta \in S^{1,2,3,6}), \\ I_{21} + I_{13} + I_1 + I_2, & \frac{5\pi}{6} < \arg \delta < \frac{3\pi}{2} \quad (\delta \in S^{4,5}), \end{cases} \quad (15)$$

$$w_4 = \begin{cases} I_{21}, & \frac{\pi}{6} < \arg \delta < \frac{3\pi}{2} \quad (\delta \in S^{2,3,4,5}), \\ I_{23} + I_{31} - I_1 - I_2, & -\frac{\pi}{2} < \arg \delta < \frac{\pi}{6} \quad (\delta \in S^{1,6}). \end{cases}$$

На рис.2 заштрихованы сектора, в которых асимптотика вязких решений растет пропорционально $\exp(|\delta|^{3/2})$, в остальных секторах она спадает по тому же закону. Наискорейший спад - вдоль пунктирных линий. Вдоль направлений, показанных сплошной линией - затухание степенное ($\sim |\delta|^{-5/4}$). Наискорейший рост - вдоль направлений, обозначенных извилистыми линиями, они же являются линиями Стокса, на которых рвется асимптотика. Линиями 1,2 символически отмечено аналитическое продолжение функций I_{23} и I_{21} , черточками отмечены сектора, где эти функции растут. Видно, что в секторах S^4 и S^5 (см. рис.2,а) рост асимптотики w_3 обусловлен лишь одной из функций I_{13} (при $\delta \in S^4$) или I_{12} (при $\delta \in S^5$), а остальные слагаемые асимптотически затухают при $|\delta| \rightarrow \infty$. Отметим, что в секторах S^5 и S^6 главные члены асимптотик w_3 и w_4 линейно зависимы, поэтому поведение минов определяется последующими членами разложения (см.п.3).

Аналогичным образом исследуется асимптотика невязких решений. Если $\delta \in S^{2,3}$, то контура Γ'_1 и Γ'_2 уходят в сектор S_2 , т.е. топологически эквивалентны Γ_1 и Γ_2 , поэтому $w_{1,2} = I_{1,2}$. Если $\delta \in S^{1,6}$, то при деформации Γ_1 в контур, обходящий разрез, проведенный по пути наискорейшего спуска, нужно добавить контур по берегам разреза, проведенного по перевальному пути Γ_{23} (см.рис.3,а). Интегрирование по этому контуру дает

$$I_{23}(1 - e^{\pi i \sigma}) \approx -\pi i \sigma I_{23} + O(\sigma^2).$$



Р и с. 3. Контурь интегрирования, для невязких частных решений w_1 (a) и w_2 (b) при $\delta \in S^{1,6}$

Сложнее обстоит дело с I_2 , для него кроме разреза по перевальному контуру Γ_{23} необходимо еще добавить контур Γ_1'' по берегам разреза, обходящего Γ_1' (см.рис.3,б). Интеграл по этому контуру равен

$$-I_1(1-e^{-\pi i \sigma}) \approx -\pi i \sigma I_1 + O(\sigma^2).$$

Если $\delta \in S^{4,5}$, то наоборот контур Γ_2 следует деформировать в два: Γ_2' и по берегам разреза вдоль Γ_{21} , а контур Γ_1 - в три: Γ_1' , по берегам разреза вдоль Γ_{21} и Γ_1'' (вдоль берегов разреза, обходящего Γ_2'). В итоге запишем выражения для невязких решений:

$$w_1 = \begin{cases} I_1, & \frac{\pi}{6} < \arg \delta < \frac{5\pi}{6} \quad (\delta \in S^{2,3}), \\ I_1 - \pi i I_{23}, & -\frac{\pi}{2} < \arg \delta < \frac{\pi}{6} \quad (\delta \in S^{1,6}), \\ I_1 - \pi i I_2 - \pi i I_{21}, & \frac{5\pi}{6} < \arg \delta < \frac{3\pi}{2} \quad (\delta \in S^{4,5}) \end{cases} \quad (16)$$

$$w_2 = \begin{cases} I_2, & \frac{\pi}{6} < \arg \delta < \frac{5\pi}{6} \quad (\delta \in S^{2,3}), \\ I_2 - \pi i I_{21}, & \frac{5\pi}{6} < \arg \delta < \frac{3\pi}{2} \quad (\delta \in S^{4,5}), \\ I_2 - \pi i I_1 - \pi i I_{23}, & -\frac{\pi}{2} < \arg \delta < \frac{\pi}{6} \quad (\delta \in S^{1,6}) \end{cases}$$

Важная особенность этих решений: при $\sigma \neq 0$ в секторах $S^{5,6}$ главным членом асимптотики является $\pi i I_{21}$ (в S^5) или $\pi i I_{23}$ (в S^6) - быстро осциллирующие и растущие как $\exp(R^{1/2}|\delta|^{3/2})$ функции, которые существенно зависят от вязкости (см., например, [7]). В остальных

секторах вязкость не вносит существенных особенностей в поведение невязких решений: I_{23} в S^1 и I_{21} в S^4 убывают пропорционально $\exp(-R^{1/2}|\delta|^{3/2})$. Итак, в невязких решениях в секторах $S^{5,6}$ нельзя пренебрегать вязкостью.

2. Уточнение решений модельного уравнения

Поскольку решения (2) нельзя найти с помощью преобразования Фурье по ζ , используем другие методы для нахождения асимптотики этих решений, сопоставляя их с решениями модельного уравнения (3).

Пусть $v(\zeta)$ – монотонная функция без точек перегиба, для которой справедливо разложение

$$v(\zeta) = \zeta [1 + \sigma\zeta/2 + v_2(\sigma\zeta)^2 + v_3(\sigma\zeta)^3 + \dots].$$

Выпишем в области $|\sigma\zeta| \ll 1$ невязкие решения методом последовательных приближений по σ , в области $|\zeta| \gg 1$ – ВКБ-методом и "сошьем" их при $1 \ll |\zeta| \ll |\sigma|^{-1}$:

$$w_{1,2} = B_{1,2} e^{\pm\zeta} + \sigma \Delta w_{1,2}(\zeta, \omega, R) + O(\sigma^2), \quad |\zeta| \ll |\sigma|^{-1}, \quad (17)$$

$$w_{1,2} = C_{1,2} \exp[\pm \int \sqrt{1 + v''/(\beta - \omega)} d\zeta], \quad |\zeta| \gg 1. \quad (18)$$

Здесь $\Delta w_{1,2}(\zeta, \omega, R)$ – поправка на кривизну, для которой из (2) получается уравнение

$$((iR)^{-1} \partial_{\zeta}^2 + \delta) \mathfrak{D} \Delta w_{1,2} = \pm (i/2) \exp[\mp(\delta - i/3R)]. \quad (19)$$

Откуда

$$\begin{aligned} \Delta w_{1,2} &= \mathfrak{D}^{-1} \Delta \eta_{1,2} = e^{\zeta} \int e^{-2u} \int e^{-v} \Delta \eta_{1,2}(v) dv du, \\ \Delta \eta_{1,2} &= \mathfrak{D} \Delta w_{1,2} = -\sigma \pi R^{1/3} \exp(\pm iR/3 - 5\pi i/3) \times \\ &\times \{ \text{Ai}(\xi^{2\pi i/3} e) \int_{\xi}^{\infty} \text{Ai}(ue^{-2\pi i/3}) \exp(\pm iuR^{-1/3}) du - \\ &- \text{Ai}(\xi^{-2\pi i/3} e) \int_{\xi}^{\infty} \text{Ai}(ue^{2\pi i/3}) \exp(\pm iuR^{-1/3}) du \}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\xi = iR^{1/3}\delta$ – фаза вязкой волны. Поправкой (20) нельзя пользоваться в секторах S^5 и S^6 , так как в них обе функции $\text{Ai}(\xi e^{\pm 2\pi i/3})$ одновременно растут, и метод последовательных приближений не применим.

Формула (20) позволяет оценить вязкие поправки в области $|\xi| \approx 1$ (т.е., при $|\delta| \approx R^{-1/3}$, $\delta \in S^{1,2,3,4}$):

$$\Delta w_{1,2} \sim \sigma R^{-1/3}.$$

При $|\delta| \gg R^{-1/3}$, вне секторов $S^{5,6}$ эти формулы можно существенно упростить, разлагая поправку в ряд по R^{-1} :

$$\Delta w_{1,2} = \Delta w_{1,2}^{(0)} + R^{-1} \Delta w_{1,2}^{(1)} + O(R^{-2}). \quad (21)$$

Подставляя (21) в (19), получаем для $\Delta w_{1,2}^{(0)}$ и $\Delta w_{1,2}^{(1)}$:

$$\mathcal{D} \Delta w_{1,2}^{(0)} = \mp (2\delta)^{-1} \exp[\mp(\delta - i/3R)],$$

$$\mathcal{D} w_{1,2}^{(1)} = i \partial_{\zeta}^2 \mathcal{D} \Delta w = \mp \partial_{\zeta}^2 (2\delta)^{-1} \exp[\mp(\delta - i/3R)],$$

откуда находим

$$\Delta w_{1,2}^{(0)} = i e^{\mp(\delta - i/3R)} [e^{\pm 2\delta} \text{Ei}(\mp 2\delta) - \ln(\pm 2\delta)],$$

$$\Delta w_{1,2}^{(1)} = (i/6) e^{\mp(\delta - i/3R)} [2e^{\pm 2\delta} \text{Ei}(\mp 2\delta) \mp \delta^{-1} + \delta^{-2}].$$

В области $1 \ll |\zeta| \ll \sigma^{-1}$, упрощая формулу (18) и используя асимптотику $\text{Ei}(\pm 2\delta)$, получаем

$$w_{1,2} = C_{1,2} \exp \left[\pm \zeta \pm \frac{\sigma}{2} \int_{d_{1,2}}^{\zeta} \frac{du}{\delta_0} \right],$$

где $C_{1,2} = \omega^{\pm \sigma/2}$, $d_{1,2} = \text{sign} \zeta / 2$. Итак, вне секторов $S^{5,6}$ существенные поправки к невязким решениям модельного уравнения, полученным в п.1, необходимы только при больших ζ : $|\zeta| \gg \sigma^{-1}$, они могут быть получены методом ВКБ.

Аналогичным образом исследуем теперь вязкие решения. При $|\xi| \approx 1$ ($|\delta| \approx R^{-1/3}$) представим $w_{3,4}$ в виде ряда по степеням σ :

$$w_{3,4} = w_{3,4}^{(0)} + \sigma w_{3,4}^{(1)} + O(\sigma^2), \quad (22)$$

где $w_{3,4}^{(0)}$ — вязкие решения для линейного профиля, описываемые (8) и (9). Подставляя (22) в (2), получим уравнение для поправок, записанное через ξ :

$$(\mathcal{D}_{\xi} - \xi) \mathcal{D}_{\xi} w_{3,4}^{(1)} = i R^{-1/3} (-1 + (\xi^2/2) \mathcal{D}_{\xi}) w_{3,4}^{(0)} \quad (23)$$

($\mathcal{D}_{\xi} = \partial_{\xi}^2 + R^{-2/3} = -R^{-2/3} \mathcal{D}$) решения которого можно выписать в квадратурах

$$w_{3,4}^{(1)} = \mathcal{D}_{\xi}^{-1} \eta_{3,4}^{(1)} = \exp(i R^{-1/3} \xi) \int_{-\infty}^{\xi} \exp(-i R^{-1/3} u) \int_{-\infty}^u \exp(i R^{-1/3} v) \eta_{3,4}^{(1)}(v) dv du.$$

Здесь

$$\begin{aligned} n_{3,4}^{(1)}(\xi) = & \{ \text{Ai}(\xi e^{-2\pi i/3}) \int \text{Ai}(\xi e^{2\pi i/3}) F d\xi - \\ & - \text{Ai}(\xi^{2\pi i/3} e) \int \text{Ai}(\xi e^{-2\pi i/3}) F d\xi \}, \\ F = & (-1 + (\xi^2/2) \mathfrak{D}) w_{3,4}^{(0)}. \end{aligned}$$

При $|\xi| \approx 1$ поправка

$$\sigma w_{3,4}^{(1)} \sim \sigma R^{-1/3}, \quad (24)$$

т.е. с ростом R уменьшается влияние кривизны профиля на вязкие решения в окрестности резонансной точки ($|\delta| \ll R^{-1/3}$). Физическое объяснение этого состоит в том, что влияние кривизны должно быть пропорционально отношению длины вязкой волны к радиусу кривизны σ^{-1} . Длину вязкой волны λ_v оценим из условия: на длине λ_v фаза ξ меняется на величину порядка единицы. Отсюда получаем: $\lambda_v \approx R^{-1/3}$ при $|\xi| \approx 1$ (отметим, что при $|\xi| \gg 1$ эта длина порядка $R^{-1/2}$). Отсюда и следует оценка (24).

В области $|\xi| \gg 1$ дифференцирование по ξ сводится к умножению на $\xi^{1/2}$ в главных членах асимптотики. Отсюда легко оценить

$$\sigma w_{3,4}^{(1)} \sim \sigma w_{3,4}^{(0)} R^{-1/3} \xi \sim w_{3,4}^{(0)} i \sigma R^{1/2} \delta^{1/2},$$

что совпадает с формулами (10), если в них разложить

$$\left(\frac{x - i}{x_p + i} \right)^{\sigma/2} \approx 1 \mp \sigma x_p = 1 - \sigma R^{1/2} \delta^{1/2}.$$

Так как правая часть в (18) растет при $|\xi| \gg 1$, то при $\xi^2 R^{-1/2} \approx \sigma^{-1}$ метод последовательных приближений перестает работать (поправка становится того же порядка, что и нулевое приближение). Отсюда получаем оценку, при которой справедливы формулы для вязких решений $w_{3,4}$, полученные в п.1:

$$\delta \ll \delta_{\sigma v} \sim \sigma^{-1/2} R^{-1/12},$$

$\delta_{\sigma v}$ определяется произведением малого $R^{-1/12}$ и большого $\sigma^{-1/2}$ параметров. Видно, что погрешность в сильно осциллирующих вязких решениях с ростом ζ накапливается быстрее, чем в невязких. Для точного вычисления поля вязких волн следует уточнить решения, полученные в п.1, для чего уместно использовать метод ВКБ.

Решения уравнения $[\partial_\zeta^2 + iR\delta(\zeta)]\eta = 0$ относительно $\eta = \mathfrak{D}w$, где $\delta(\zeta) = \omega - \beta(\zeta) + i/R$, ищем в виде

$$\eta \sim (-iR\delta)^{-1/4} \exp[\int (-iR\delta)^{1/2} d\zeta].$$

Аналогично в полном уравнении (2) будем искать решения в виде

$$w \sim A(\zeta) \exp[\int (-iR\delta)^{1/2} d\zeta],$$

откуда получим

$$A(\zeta) \approx (-iR\delta)^{-5/4} (1 + O(R^{-1/2})).$$

Таким образом, в вязких решениях модельного уравнения (3) при $\delta \geq \delta_{\text{св}}$ следует подправить фазу быстро осциллирующей функции, т.е. записать (11) в виде

$$E_{23,31} = \frac{\exp[\pm iR^{1/2} \int \delta^{1/2} d\zeta]}{(\kappa_p + 1) 2\pi^{1/2} R^{1/2} \delta^{1/4}} e^{\pi i / 8 \mp \pi i / 4}, \quad |\arg \delta + \frac{\pi}{2}| < \pi.$$

3. Асимптотики вронскиана и миноров

При решении краевых задач для уравнения Орра-Зоммерфельда нужно знать вронскиан $W(w_1, w_2, w_3, w_4)$ построенных частных решений и миноры $\Delta_{mn}^{12}, \Delta_{mn}^{34}$ ($m, n=0, 1, 2, 3$), через которые он выражается (см. п.4),

$$W = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ w'_1 & w'_2 & w'_3 & w'_4 \\ w''_1 & w''_2 & w''_3 & w''_4 \\ w'''_1 & w'''_2 & w'''_3 & w'''_4 \end{vmatrix} = \Delta_{01}^{12} \Delta_{23}^{34} - \Delta_{02}^{12} \Delta_{13}^{34} + \Delta_{03}^{12} \Delta_{12}^{34} + \Delta_{12}^{12} \Delta_{03}^{34} - \\ - \Delta_{13}^{12} \Delta_{02}^{34} + \Delta_{23}^{12} \Delta_{01}^{34}. \quad (25)$$

Здесь $\Delta_{mn}^{ij} = \partial_{\zeta}^m w_i \partial_{\zeta}^n w_j - \partial_{\zeta}^n w_i \partial_{\zeta}^m w_j$.

Асимптотика производных $\partial_{\zeta}^n w_i$ при $|\delta| \gg R^{-1/3}$ выражается через асимптотики $I_1^{(n)}, I_2^{(n)}, I_{12}^{(n)}, I_{32}^{(n)}, I_{13}^{(n)}$ по формулам аналогичным (10), (14), в чем можно убедиться, дифференцируя их n раз. Асимптотические ряды для $I_{12}^{(n)}, I_{32}^{(n)}, I_{31}^{(n)}$ нетрудно получить, используя метод перевала:

$$I_{23}^{(n)} = I_{13}^{(n)} \Big|_{\delta \in S^{4,5}} = (-i\kappa_p)^n E_{23} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(n)} (-i\kappa_p \delta)^{-k} \right), \\ I_{21}^{(n)} = I_{31}^{(n)} \Big|_{\delta \in S^{1,6}} = (i\kappa_p)^n E_{21} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(n)} (i\kappa_p \delta)^{-k} \right), \quad (26)$$

где $\alpha_1^{(0)} = \alpha_1 = 101/48 + O(\sigma)$, $\alpha_1^{(1)} = 41/48 + O(\sigma)$, $\alpha_1^{(2)} = 5/48 + O(\sigma)$,
 $\alpha_1^{(3)} = -7/48 + O(\sigma), \dots$

Дифференцируя (14), получим

$$I_{1,2}^{(1)} = \mp(1/2)e^{\mp(\delta+i/3R)}[-1 + \sigma(\exp(\pm 2\delta_0) \operatorname{Ei}(\mp 2\delta_0) + \ln(\pm 2\delta_0))/2 + O(\sigma^2)],$$

$$I_{1,2}^{(1)} = I_{1,2}(1 - \sigma/\delta), \quad (27)$$

$$I_{1,2}^{(2)} = I_{1,2}^{(1)}(1 - \sigma/\delta) - (\sigma/\delta^2)I_{1,2}.$$

Теперь, используя (27), вычислим миноры Δ_{mn}^{12} при $\delta \in S^{1,2,3,4}$
 $(-\pi/6 < \arg \delta < 7\pi/6)$:

$$\Delta_{01}^{12} = (1/2)(1 - \sigma \pi i/2) + O(\sigma(R\delta_0)^{-1}) + O(\sigma^2),$$

$$\Delta_{02}^{12} = O(\sigma(R\delta_0)^{-1}) + O(\sigma^2),$$

$$\Delta_{03}^{12} = -\Delta_{12}^{12} = \Delta_{01}^{12}(1 - \sigma/\delta), \quad (28)$$

$$\Delta_{13}^{12} = -\sigma\delta^{-2}\Delta_{01}^{12},$$

$$\Delta_{23}^{12} = \Delta_{01}^{12}(1 - \sigma/\delta)^2 = \Delta_{01}^{12}(1 - 2\sigma/\delta + O(\sigma^2)).$$

Если $\sigma \neq 0$, то в секторах $S^{5,6}$ $(-5\pi/6 < \arg \delta < -\pi/6)$ к этим значениям
 следует добавить величину

$$\Delta_{mn}^{12} \Big|_{\delta \in S^{5,6}} = \Delta_{mn}^{12} \Big|_{\delta \in S^{1,2,3,4}} + \sigma \pi i [\partial_{\zeta}^m \operatorname{ch}(\delta + i/3R) \partial_{\zeta}^n I_{21(23)} -$$

$$- \partial_{\zeta}^n \operatorname{ch}(\delta + i/3R) \partial_{\zeta}^m I_{21(23)}]. \quad (29)$$

В секторе S^5 нужно брать I_{21} , в секторе S^6 — его аналитическое про-
 должение — I_{23} , растущее как $\exp[|\delta|^{2/3}]$.

Для главных членов асимптотик миноров Δ_{mn}^{34} расчет дает следующие
 выражения ($\delta \in S^{1,2,3,4}$):

$$\Delta_{mn}^{34} = \begin{cases} \bar{E}(ix_p)^{m+n}(-1)^n, & \text{если } |m-n|=2k+1, \\ \bar{E}(ix_p)^{m+n-1}(-1)^n(\alpha_1^{(m)} - \alpha_1^{(n)}), & \text{если } |m-n|=2k, \end{cases} \quad (30)$$

где $\bar{E} = 2E_{21}E_{23} = [2\pi(x_p^2 + 1)^2 R\delta^{1/2}]^{-1} e^{\pi i/4}$. В секторах $S^{5,6}$ к зна-
 чению минора Δ_{mn}^{34} следует добавить точно такую же величину как и
 к Δ_{mn}^{12} но без множителя $-\sigma \pi i$:

$$\Delta_{mn}^{34} \Big|_{\delta \in S^{5,6}} = \Delta_{mn}^{34} \Big|_{\delta \in S^{1,2,3,4}} - \partial_{\zeta}^{\text{ch}(\delta+i/3R)} \partial_{\zeta}^n I_{21(23)} + \\ + \partial_{\zeta}^n \text{ch}(\delta+i/3R) \partial_{\zeta}^m I_{21(23)}]. \quad (31)$$

Наконец вычислим вронскиан (25), используя полученные асимптотики для миноров. В секторах $S^{2,3}$ получаем следующее выражение

$$W = (1 + O(\sigma^2)) R / 4\pi i. \quad (32)$$

Отметим, что вронскиан W не зависит от ζ - в уравнении Орра-Зоммерфельда отсутствует третья производная. Поэтому в отличие от формул (20) для миноров, представляющих собой их асимптотику при $R^{1/3}\delta \gg 1$ формула (32) является точной.

4. Эволюция возмущения с первоначально сосредоточенной в узком слое завихренностью

Решим так называемое нестационарное уравнение Орра-Зоммерфельда

$$[(-ik^{-1}\delta_t - U)(\partial_z^2 - k^2) + U'' - (iv/k)(\partial_z^2 - k^2)^2] w = 0$$

с начальным возмущением

$$w(0, x, z) = \exp[-k|z| + ikx]$$

и условиями на бесконечности (стенки канала удалены так далеко, что их влиянием можно пренебречь)

$$w \rightarrow 0, \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty.$$

Эта задача имеет важный физический смысл - она позволяет проследить эволюцию одиночной волны непрерывного спектра в потоке вязкой жидкости. Для линейного профиля скорости в [17] получено точное решение этой задачи. Здесь мы исследуем асимптотику решения при малых ν и больших t для произвольного слабо искривленного профиля скорости, т.е. удовлетворяющего соотношению

$$\sigma = U''/(U'k) \ll 1. \quad (33)$$

Описанная выше начальная задача эквивалентна задаче с δ -образным по t источником внешней силы:

$$f_z = \delta(t)\delta(z)\exp(ikx). \quad (34)$$

Перейдем к безразмерным переменным и воспользуемся преобразованием Фурье по τ , спектр $\tilde{w}(\omega, \zeta)$ удовлетворяет уравнению Орра-Зоммерфельда с правой частью

$$(\omega - \beta)(\partial^2 - 1)\tilde{w} + \beta\tilde{w} - iR^{-1}(\partial^2 - 1)^2\tilde{w} = -2i\delta(\zeta).$$

Будем его искать в виде суммы вязкого и невязкого решения:

$$\tilde{w}(\omega, \zeta) = \tilde{w}_{inv}(\omega, \zeta) + \tilde{w}_{vis}(\omega, \zeta),$$

где

$$\tilde{w}_{inv} = \begin{cases} A_1 w_1(\omega, \zeta), & \zeta < 0 \\ A_2 w_2(\omega, \zeta), & \zeta > 0, \end{cases} \quad \tilde{w}_{vis} = \begin{cases} A_3 w_3(\omega, \zeta), & \zeta < 0 \\ A_4 w_4(\omega, \zeta), & \zeta > 0. \end{cases}$$

Здесь $w_{1,2}$ - невязкие, $w_{3,4}$ - вязкие частные решения уравнения Ор-ра-Зоммерфельда. Амплитуды A_i вычисляются по формулам:

$$A_{1,2} = 2RW^{-1}[\Delta_{12}^{34} w_{2,1}(\omega, 0) - \Delta_{02}^{34} \partial_{\zeta} w_{2,1}(\omega, 0) - \Delta_{01}^{34} \partial_{\zeta}^2 w_{2,1}(\omega, 0)],$$

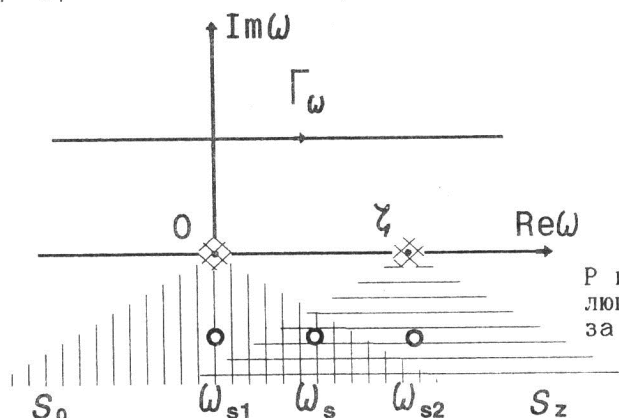
$$A_{3,4} = 2RW^{-1}[\Delta_{01}^{12} \partial_{\zeta}^2 w_{4,3}(\omega, 0) - \Delta_{02}^{12} \partial_{\zeta} w_{4,3}(\omega, 0) - \Delta_{12}^{12} w_{4,3}(\omega, 0)],$$

где $w = (R/4\pi i)(1+O(\sigma))$ - вронскиан частных решений w_1, w_2, w_3, w_4 ;

$\Delta_{mn}^{ij} = \partial_{\zeta}^m w_i \partial_{\zeta}^n w_j - \partial_{\zeta}^n w_i \partial_{\zeta}^m w_j$ (при $\zeta=0$) - миноры частных решений.

Теперь исследуем обратное преобразование Фурье от $\tilde{w}(\omega, \zeta)$. Отметим, что в вязком случае спектр $\tilde{w}$ не имеет особых точек при конечных ω , однако контур интегрирования нельзя произвольно деформировать в нижнюю полуплоскость, поскольку при $\nu > 0$ спектр $\tilde{w}$ растет как $\exp[(2/3)R^{1/2}|\omega|^{3/2}]$ при $|\omega| \rightarrow \infty$ в секторах S_0 ($|\arg \omega + \pi/2| < \pi/3$) и S_z ($|\arg(\omega + \zeta) + \pi/2| < \pi/3$).

Пусть U - область в плоскости ω вне секторов S_0 и S_z и вне окрестностей "резонансных точек" $\omega=0$ и $\omega=\zeta$ [7,12,13]: $|\omega| \gg R^{-1/3}$, $|\omega - \zeta| \ll R^{-1/3}$ (U - незаштрихованная часть плоскости ω на рис.4). В



Р и с. 4. К вычислению эволюции волны Ван Кампена-Кейза в потоке вязкой жидкости

области U невязкую часть спектра можно представить в виде асимптотических рядов по $(R\omega^3)^{-1}$ и $(R\omega)^{-1}$:

$$\tilde{w}_{inv} = \tilde{w}^0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (R\omega^3)^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (R\omega)^{-k} \right], \quad (35)$$

где $\tilde{w}^0$ - спектр аналогичной невязкой задачи. Производя обратное преобразование Фурье, из (35) получаем

$$w_{inv} = w^0(1 + O(\tau^3/R) + O(\tau/R)),$$

где w^0 - решение невязкой задачи [8,17].

В области U главный член асимптотики $\tilde{w}_{vis}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{vis} e^{-i\omega\tau} \approx [2\pi R^{1/2} \omega^{1/4} (\omega - \zeta)^{5/4}]^{-1} \exp\{(2/3)R^{1/2} \text{sign}\zeta [\omega^{3/2} e^{3\pi i/4} + \\ + (\omega - \zeta)^{3/2} e^{-\pi i/4}] - i\omega\tau\}, \end{aligned}$$

(ветви корней выбираются положительными при положительных значениях аргумента). Поскольку w_{vis} дается быстро осциллирующим интегралом с большим параметром $R^{1/2}$, то асимптотика w_{vis} вычисляется методом перевала. Находим перевальную точку

$$w_s = \zeta/2 + i(R\zeta^2/4\tau^2 - \tau^2/R), \quad (36)$$

отсюда

$$w_{vis} \approx -(\tau/R)^{1/8} [\zeta\sqrt{R/\tau} + i\tau\sqrt{\tau/R}]^{-1} \exp[-R\zeta^2/4\tau - i\zeta\tau/2 - \tau^3/12R - \tau/R].$$

При $t \gg t_v$ спектр $\tilde{w}$ будет содержать три слагаемых, растущих соответственно в секторах S_0 , S_z , $S_0 \cap S_z$:

$$\tilde{w}_1^v \sim \exp[(2/3)R^{1/2}(i\omega)^{3/2}],$$

$$\tilde{w}_2^v \sim \exp[(2/3)R^{1/2}(i(\omega - \zeta))^{3/2}],$$

$$\tilde{w}_3^v \sim \exp[(2/3)R^{1/2}(i\omega)^{3/2} - (i(\omega - \zeta))^{3/2}].$$

Первое слагаемое имеет перевальную точку $\omega_{s1} = \tau^2/iR$, а второе - $\omega_{s2} = \zeta + \tau^2/iR$, они расположены на биссектрисах секторов S_0 и S_z соответственно. Точка перевала для третьего слагаемого дается формулой (36). При $\tau \gg R^{-1/3}$, выписывая асимптотику $w_{1,2,3}^v$ методом перевала, получаем

$$w_{1,2}^v \sim \exp[-\tau^3/3R], \quad w_3^v \sim \exp[-\tau^3/12R], \quad (37)$$

т.е. качественно поведение решений в слабо искривленном профиле такое же, как и в линейном.

Литература

1. Greenspan H.P. The theory of rotating fluids. Cambridge University Press, 1968. 252p.
2. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1968. 652p.

3. Стрэтт Дж.В. (Лорд Рэлей) Теория звука. Т.1. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1944. 476с.
4. Sommerfeld A. Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegung // Proc. IV Congr. Math. Rome, 1908. P.116-124.
5. Heisenberg W. Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen // Ann. Physik. 1924. N.74. P.577-627.
6. Ландау Л.Д. Об устойчивости тангенциальных разрывов в сжимаемых жидкостях // ДАН СССР, 1944. Т.44, N.4. С.151-153.
7. Линь Цзя-Цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит. 1958. 194с.
8. Case K.M. Stability of inviscid plane Couette flow // Phys. Fluids. 1960. Vol.3, N.2. P.143-148.
9. Дикий Л.А. Устойчивость плоскопараллельных потоков в идеальной жидкости // ДАН СССР. 1960. Т.125, N.5. С.1068-1071.
10. Тимофеев А.В. Колебания неоднородных течений плазмы и жидкости // УФН. 1970. Т.102, N.2. С.185-210.
11. Orr W. McF. The stability of steady motions of a liquids // Proc. Roy. Irish Acad. 1907. A27. P.9-138.
12. Заславский Г.М., Моисеев С.С., Сагдеев Р.З. Асимптотический метод решения дифференциального уравнения четвертого порядка с двумя малыми параметрами в гидродинамической теории устойчивости // ДАН СССР. 1964. Т.158, N.6. С.1295-1298.
13. Заславский Г.М., Мейтлис В.П., Филоненко Н.Н. Взаимодействие волн в неоднородных средах. Новосибирск: Наука, 1982. 175с.
14. Миронов М.А., Сазонов И.А. К проблеме собственных мод потока без точки перегиба профиля скорости // Изв. АН СССР. Сер.ПММ. 1989. Т.53, N.6. С.939-947.
15. Wazow W. A study of solution of the differential equation $y^{(4)} + \lambda^2(xy'' + y) = 0$ for large value λ // Ann.Math. 1950. Vol.52. P.350-361.
16. Бейтмен Г., Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т.2. М.: Наука, 1966. 295с.
17. Сазонов И.А. Возбуждение волн Ван Кампена-Кейза // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ. 1987. Т.102, N.2. С.115-119.