III. ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ

УДК 512.3 + 512.64 + 550.34

М.Л.Гервер

ВОЛНОВОДЫ И УСТОЙЧИВЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ. III

M.L.Gerver

WAVEGUIDES AND STABLE POLYNOMIALS. III

This paper, being the third part of the studies, presents the proof of all the hypotheses formulated in the second part.

Статья является расширенным вариантом заметки [1]. Полнее содержание раскрывается во вводном разд.1. Он начинается с постановки задачи о матрице $F=\{1/[f_i f_j (f_i+f_j)]\}$. Эта задача возникла в [2] при разработке алгоритма быстрого поиска самого широкого волновода. Ее решение подтверждает все гипотезы, высказанные в [2].

Новым по сравнению с [1] является рассмотрение 1-аппроксимаций. Я благодарен Г.М.Молчану, обратившему мое внимание на их тесную связь с задачей о матрице F и предложившему способ их применения, использованный в этой статье в п.1.4, 5.3 и 5.4.

Так же, как в [2], знаки « » выделяют начало и конец доказательств.

1. Задача о матрице F. Обобщения. Модификации. Результаты

1.1. Постановка задачи о матрице $F=\{1/[f_i f_j (f_i+ f_j)]\}$. Пусть

$$0<f_1<\ldots<f_n. \tag{1.1}$$

Положив

$$s_j= f_j^2, \quad 1\le j\le n, \tag{1.2}$$

рассмотрим квадратные матрицы

$$F = \{f_{ij}\} = \left\{\frac{1}{f_i f_j (f_i+ f_j)}\right\} \tag{1.3}$$

и

$$G(w) = \{g_{ij}(w)\} = \left\{\frac{1}{(s_i+w)(s_j+w)}\right\}. \tag{1.4}$$

Придавая действительному параметру w в (1.4) значения $w=w_1=0$,

$$w=w_k, \quad 1<k\le m, \tag{1.5}$$

получим матрицы

$$G_k = \left\{\frac{1}{(s_i+w_k)(w_k+s_j)}\right\}, \quad i,j=1,..,n, \quad k=1,..,m. \tag{1.6}$$

З а д а ч а о м а т р и ц е F состоит в том, чтобы, *подобрав подходящие* w_k *в (1.5), представить* F *в виде линейной комбинации*

$$F = \sum_{k=1}^{m} d_k G_k \tag{1.7}$$

с наименьшим возможным числом слагаемых m.

2. Обобщение задачи. Теоремы 1,2. Легко проверить (см. разд.2), что при условии (1.1) матрица (1.3) а) невырождена, б) положительно определена. В соответствии с этим обобщим задачу: считая попрежнему, что $w_1=0$, а под $s_1,..,s_n$ в (1.6) понимая любые фиксированные попарно различные действительные числа, исследуем представление

$$A = \sum_{k=1}^{m} \frac{d_k}{(s_i+w_k)(w_k+s_j)}, \quad d_k, w_k \in \mathbb{R}, \quad w_1=0 \tag{1.8}$$

для симметрических и а) невырожденных, б) положительно определенных матриц A. Множество матриц A, представимых в виде (1.8), обозначим $\mathfrak{A}_m = \mathfrak{A}_m(s_1,..,s_n)$.

В разд. 2-4 будут доказаны две теоремы:

Т е о р е м а 1. *Для любой симметрической невырожденной матрицы* $A \in \mathfrak{A}_m$ *в сумме (1.8) не может быть меньше* n *слагаемых:* $m\ge n$. *При* $m=n$ *(для* $A\in\mathfrak{A}_n$*) значения* $w_2,...,w_n$ *и коэффициенты* $d_1,...d_n$ *в (1.8) однозначно (с точностью до нумерации пар* $w_2,d_2,..,w_n,d_n$*) определяются матрицей* A.

Т е о р е м а 2. *Для любой симметрической положительно определенной матрицы* $A\in\mathfrak{A}_n$ *все коэффициенты* $d_1,...,d_n$ *в (1.8) положительны:*

$$d_k>0, \quad 1\le k\le n. \tag{1.9}$$

З а м е ч а н и е. Неравенства (1.9) важны для геофизических приложений (см.[2]).

1.3. Основное тождество. Вернемся к исходной задаче о матрице F. По теореме 1 в (1.7) $m\ge n$.

Оказывается (это было установлено в [1] и будет по-новому доказано в разд.5), в (1.7) $m=n$: *при любых* f_j *в (1.1) для их квадратов*

s_j *существуют такие*

$$w_2,\dots,w_n \quad \text{и} \quad d_1,\dots,d_n, \tag{1.10}$$

что для матрицы (1.3) выполняется тождество

$$\frac{1}{f_i f_j (f_i + f_j)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{(s_i+w_k)(w_k+s_j)}, \quad 1 \le i,j \le n, \; w_1=0. \tag{1.11}$$

По теореме 1 числа (1.10) определяются по (1.1) однозначно (с точностью до нумерации пар $w_k . d_k$, $2 \le k \le n$). В разд.5 будут выведены явные формулы, связывающие (1.10) с (1.1). Они были угаданы в [2] и доказаны в [1]. В п.1.4 приводится их новая интерпретация, которая позволяет дать новое (более простое, чем в [1]) доказательство основного тождества (1.11).

1.4. Аппроксимация функции $1/\sqrt{s}$. Каждой дифференцируемой функции $q(s)$ можно сопоставить симметричное ядро $\mathcal{A}_q(s,t)$, равное разностному отношению $[q(s)-q(t)]/(s-t)$ при $s \ne t$ и равное производной $q'(s)$ при $s=t$. Если фиксировать n значений $s_1,\dots,s_n$, возникает симметрическая матрица $A=A(q;\, s_1,\dots,s_n)$ с элементами $a_{ij}=\mathcal{A}_q(s_i,s_j)$, $1 \le i,j \le n$.

П р и м е р 1. Для суммы простых дробей

$$\alpha(s) = -\sum_{k=1}^{n} d_k/(s+w_k) \tag{1.12}$$

матрица $A(\alpha; s_1,\dots,s_n)$ равна правой части (1.11); при этом в (1.11) $w_1=0$ для сумм $\alpha(s)$ вида

$$\alpha_0(s) = -d_1/s - \sum_{k=2}^{n} d_k/(s+w_k). \tag{1.13}$$

П р и м е р 2. Для функции $\varphi(s)=-1/\sqrt{s}$ и для $f_j=\sqrt{s_j}$, $1 \le j \le n$ матрица $A(\varphi; s_1,\dots,s_n)$ равна левой части (1.11). Той же левой части равна матрица $A(\varphi_0; s_1,\dots,s_n)$ для $\varphi_0(s)$, отличающийся от $\varphi(s)$ на произвольную константу:

$$\varphi_0(s) = d_0 - 1/\sqrt{s}, \quad d_0=\text{const}. \tag{1.14}$$

Сравнивая (1.13) и (1.14), видим, что верно

У т в е р ж д е н и е 1. *Пусть для какой-нибудь константы* d_0 *функции* $\varphi_0(s)$ *и* $\alpha_0(s)$ *совпадают при* $s=s_j=f_j^2$ $(1 \le j \le n)$ *вместе с первыми производными:*

$$\varphi_0(s_j)=\alpha_0(s_j), \quad \varphi_0'(s_j)=\alpha_0'(s_j), \quad 1 \le j \le n. \tag{1.15}$$

Тогда выполняется основное тождество (1.11).

Преобразовав (1.15) к виду

$$1/\sqrt{s_j} = d_0 + d_1/s_j + \sum_{k=2}^{n} d_k/(s_j + w_k),$$

$$1/(2s_j\sqrt{s_j}) = d_1/s_j^2 + \sum_{k=2}^{n} d_k/(s_j + w_k)^2, \qquad (1.16)$$

приходим к выводу: чтобы получить (1.11), достаточно доказать

Утверждение 2. *Для любых попарно различных $s_j > 0$, $1 \le j \le n$ можно указать такие d_0, d_1 и такие w_k, d_k, $2 \le k \le n$, чтобы равенства (1.16) выполнялись при всех $j=1,\dots,n$.*

Это утверждение (о возможности аппроксимировать $1/\sqrt{s}$ вместе с первой производной суммами простых дробей) и будет доказано в разд.5 с указанием явных формул для d_j, w_j.

Аппроксимации вида (1.16) - с совпадением функций и первых производных в n заданных точках - будем называть 1-аппроксимациями.

2. Матрицы Коши. Их определители. Невырожденность и положительная определенность F. Начало доказательства теоремы 1

Ключ к доказательству первой части теоремы 1 и к доказательству теоремы 2 - в том, что при $m=n$ матрицу (1.8) можно представить в виде произведения CDC':

$$A = \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{(s_i+w_k)(w_k+s_j)} = CDC', \qquad (2.1)$$

где C и C' - матрицы Коши:

$$C = \{c_{ik}\} = \{1/(s_i+w_k)\}, \quad C' = \{c'_{kj}\} = \{c_{jk}\} = \{1/(w_k+s_j)\}, \qquad (2.2)$$

а D - диагональная матрица с диагональными элементами d_k, $1 \le k \le n$.

Выпишем формулу для определителя $|C|$ матрицы C (и равного ему определителя $|C'|$ транспонированной матрицы C'). Согласно [3.С.110 и 320,321]

$$|C| = |C'| = \prod_{1 \le i < j \le n} (s_j - s_i)(w_j - w_i) \Big/ \prod_{1 \le k, m \le n} (s_k + w_m). \qquad (2.3)$$

Отсюда определитель матрицы (2.1) равен

$$|A| = d_1 \dots d_n \prod_{1 \le i < j \le n} (s_j - s_i)^2 (w_j - w_i)^2 \Big/ \prod_{1 \le k, m \le n} (s_k + w_m)^2. \qquad (2.4)$$

Сформулируем два следствия из (2.4):

1. *Матрица (2.1) невырождена тогда и только тогда, когда в ней $s_i \ne s_j$ и $w_i \ne w_j$ при $i \ne j$ и все $d_k \ne 0$* (чтобы формулы (2.1)-(2.4) имели

смысл. предположим. кроме того. что $s_j+w_k\neq 0$ *при всех* $j, k=1, \dots, n$).

2. Невырожденную матрицу A *нельзя представить в виде суммы (1.8). содержащей* m *слагаемых. если* $m<n$. «При $m<n$ сумму (1.8) можно записать в виде (2.1). положив $w_k=d_k=0$ для $m<k\leq n$: в этом случае согласно (2.4) $|A|=|D|=0$.» Тем самым. доказана первая часть теоремы 1.

Чтобы доказать применимость ее и теоремы 2 к матрице (1.3). введем для чисел $f_1, \dots, f_n$ из (1.1) матрицу

$$\Phi = \{1/(f_i+f_j)\}. \tag{2.5}$$

$\Phi=C$. если в (2.2) положить $s_i=f_i, w_k=f_k$. Поэтому (вследствие (2.3)) главные угловые миноры Φ_r матрицы Φ вычисляются по формулам

$$\Phi_r = \prod_{1\leq i<j\leq r} (f_j-f_i)^2 / \prod_{1\leq k, m\leq r} (f_k+f_m),$$

т.е. (с учетом (1.1)) все $\Phi_r>0$, $1\leq r\leq n$. Отсюда (по теореме Сильвестра) матрица Φ положительно определена.

Диагональную матрицу с числами f_j на диагонали назовем f. Тем самым. матрицы (1.3) и (2.5) связаны формулами $\Phi=fFf$, $F=f^{-1}\Phi f^{-1}$. Значит. *при условии (1.1)* F *невырождена и положительно определена.*

Перейдем теперь к теореме 2 (вторая часть теоремы 1 будет доказана в разд.4).

3. Доказательство теоремы 2. Критерий положительной определенности матрицы $A \in \mathfrak{A}_n$

Симметрическая положительно определенная матрица A имеет ортогональный базис из n собственных векторов u_j с собственными значениями $\mu_j>0$, $1\leq j\leq n$; длины u_j можно считать равными 1:

$$Au_j = \mu_j u_j, \quad \mu_j>0, \quad (u_i, u_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases} \tag{3.1}$$

Введем обозначения: $M=\{\mu_j\}$ - диагональная матрица с числами μ_j на диагонали. U - матрица из векторов-столбцов u_j. $U'=U^{-1}$ - транспонированная матрица из векторов-строк u_j. $1\leq j\leq n$.

Согласно (3.1) $AU=UM$, $A=UMU'$, $A^{-1}=UM^{-1}U'$.

Для $A\in\mathfrak{A}_n$ согласно (2.1) $A=CDC'$. Отсюда $D=C^{-1}A(C')^{-1}$, так что

$$D^{-1} = C'A^{-1}C = C'UM^{-1}U'C = (C'U\Lambda)(\Lambda U'C), \tag{3.2}$$

где Λ - диагональная матрица с числами $\lambda_j=1/\sqrt{\mu_j}$ на диагонали.

Таким образом. согласно (3.2) диагональная матрица D^{-1} является произведением некоторой матрицы $Q=C'U\Lambda$ на транспонированную матрицу $Q'=\Lambda U'C$: $D^{-1}=QQ'$. Отсюда с очевидностью следует, что все $d_j>0$.

Критерий положительной определенности. Сопоставляя доказанную теорему с критерием невырожденности матрицы $A\in\mathfrak{A}_n$ (см. следствие 1 из (2.4)), получаем *необходимые* условия ее положительной определенности:

$$s_j\neq s_k,\ \ w_j\neq w_k \quad \text{при } j\neq k;\quad s_j+w_k\neq 0,\ 1\le j,k\le n;\quad d_k>0,\ k=1,\dots,n. \tag{3.3}$$

Легко проверить, что условия (3.3) также и *достаточны* для положительной определенности $A\in\mathfrak{A}_n$. « Если

$$A=\{a_{ij}\}=\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{(s_i+w_k)(w_k+s_j)},\qquad 1\le i,j\le n;\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},$$

то

$$(Ax,x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{k=1}^{n}d_k\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{x_ix_j}{(s_i+w_k)(w_k+s_j)}\right)=\sum_{k=1}^{n}d_k\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{w_k+s_j}\right)^2\ge 0,$$

причем (вследствие (2.3) и (3.3)) $(Ax,x)=0$ только при $x=0$.»

Итак, *(3.3) – критерий положительной определенности* $A\in\mathfrak{A}_n$.

4. Доказательство второй части теоремы 1

Первая часть теоремы 1 доказана в разд.2 (следствие 2 из (2.4)). Переходя к доказательству второй части, напомним относящиеся к ней обозначения из п.1.2, 1.4 и введем новые.

4.1. Обозначения. $s_1,\dots,s_n$ – произвольно фиксированные попарно различные действительные числа:

$$(s_1,\dots,s_n)\in\mathbb{R}^n,\ s_i\neq s_j \text{ при } i\neq j. \tag{4.1}$$

$\mathfrak{A}_n=\mathfrak{A}_n(s_1,\dots,s_n)$ – множество матриц вида

$$A=\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{(s_i+w_k)(w_k+s_j)},\qquad i,j=1,\dots,n,\qquad d_k,w_k\in\mathbb{R},\quad w_1=0. \tag{4.2}$$

$\mathfrak{A}_n^0$ – подмножество $\mathfrak{A}_n$, состоящее из невырожденных матриц:

$$\mathfrak{A}_n^0=\{A\in\mathfrak{A}_n \mid |A|\neq 0\}. \tag{4.3}$$

$\{\alpha_0\}$ – множество функций

$$\alpha_0(s)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{s+w_k},\quad d_k,w_k\in\mathbb{R},\ w_1=0;\quad s_j+w_k\neq 0,\quad 1\le j,k\le n. \tag{4.4}$$

$\{\alpha^0\}$ – подмножество $\{\alpha_0\}$, состоящее из функций, у которых все полюса $-w_k$ различны, а все вычеты d_k отличны от нуля:

$$w_i \neq w_j \text{ при } i\neq j;\ d_1\ldots d_n \neq 0. \tag{4.5}$$

Отображение $\delta:\{\alpha_0\} \to \mathfrak{U}_n$ сопоставляет каждой функции α_0 из (4.4) матрицу A вида (4.2):

$$A = A(\alpha_0;\ s_1,\ldots,s_n), \tag{4.6}$$

элементы a_{ij} матрицы (4.6) равны разностным отношениям $[\alpha_0(s_i)-\alpha_0(s_j)]/(s_i-s_j)$ при $i\neq j$ и производным $\alpha_0'(s_j)$ при $i=j$. По следствию 1 из (2.4) множество (4.3) содержит образ $\{\alpha^0\}$ при отображении δ (поскольку условия (4.5) в сочетании с (4.1) и (4.4) обеспечивают невырожденность A): $\delta(\{\alpha^0\}) \subseteq \mathfrak{U}_n^0$.

Смысл второй части теоремы 1 - в том, что отображение $\delta:\{\alpha^0\}\to\mathfrak{U}_n^0$ инъективно: если матрица A в (4.6) равна $A(\alpha_0^*;\ s_1,\ldots,s_n)$ и $|A|\neq 0$, то α_0 и α_0^* совпадают.

4.2. Подготовительная лемма. Сопоставим каждой точке

$$(b,c) = (b_1,\ldots,b_n,c_1,\ldots c_n) \in \mathbb{R}^{2n},\quad \sum_{k=1}^{n} |b_k| \neq 0 \tag{4.7}$$

пару полиномов

$$\beta(z;b,c) = b_1 z^{n-1}+\ldots+b_n,\quad \gamma(z;b,c) = z^n+c_1 z^{n-1}+\ldots+c_n \tag{4.8}$$

и рациональную функцию

$$\alpha = \alpha(z;b,c) = \beta(z;b,c)/\gamma(z;b,c). \tag{4.9}$$

Условие

$$\gamma(s_j;b,c)/\beta(s_j;b,c)\neq 0,\ 1\leq j\leq n \tag{4.10}$$

(которое означает, что числа (4.1) не являются полюсами α) выделяет подмножество $\{b,c\}$ из (4.7) и (соответственно) подмножество $\{\alpha\}$ из (4.9): для каждой функции $\alpha(z;b,c)\in\{\alpha\}$ положим

$$\alpha_j=\alpha(s_j;b,c),\ \pi_j=\alpha'(s_j;b,c),\quad 1\leq j\leq n. \tag{4.11}$$

Тем самым, построено отображение

$$\chi:\ (b,c)\in\{b,c\} \to (\alpha,\pi) = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\ \pi_1,\ldots,\pi_n). \tag{4.12}$$

Образ $\{b,c\}$ при отображении χ назовем $\{\alpha,\pi\}$:

$$\{\alpha,\pi\} = \chi(\{b,c\}). \tag{4.13}$$

Л е м м а. *При* $(\alpha,\pi)\in\{\alpha,\pi\}$ *значения* α_j,π_j *в (4.11) однозначно определяют функцию* $\alpha(z;b,c)\in\{\alpha\}$. Иными словами, *при отображении (4.12) образы различных точек множества* $\{b,c\}$ *различны:*

$$(b^*,c^*) \neq (b,c) \Rightarrow (\alpha^*,\pi^*) \neq (\alpha,\pi). \tag{4.14}$$

«Сопоставим (b^*,c^*) пару полиномов β^*,γ^* по формулам, аналогичным (4.7), (4.8). При нарушении (4.14) полином $\beta\gamma^*-\beta^*\gamma$ степени не выше $2n-1$ имел бы n двукратных корней $s_1,\ldots,s_n$.»

Таким образом, *отображение* χ *обратимо:*

$$\chi^{-1}:\ \{\alpha,\pi\}\to\{b,c\}. \tag{4.15}$$

З а м е ч а н и е. Неравенства $s_j+w_k\neq 0$ в (4.4) означают, что для функций $\alpha_0(s)\in\{\alpha_0\}$ выполнено условие (4.10), т.е. $\{\alpha_0\}\subset\{\alpha\}$. Подмножества $\{b,c\}$, соответствующие $\{\alpha_0\}$ и $\{\alpha^0\}$, обозначим $\{b,c\}_0$ и $\{b,c\}^0$. Так как в (4.4) $w_1=0$, то $\{b,c\}_0$ и $\{b,c\}^0$ принадлежат гиперплоскости $c_n=0$ (поскольку $c_n=w_1\ldots w_n$).

4.3. Параметры (π,ρ). При $\alpha\in\{\alpha\}$ для α_j,π_j из (4.11) положим $\rho_2=\alpha_2-\alpha_1,\ldots,\rho_n=\alpha_n-\alpha_1$ и рассмотрим $2n-1$ параметров

$$(\pi,\rho)=(\pi_1,\ldots,\pi_n,\rho_2,\ldots\rho_n), \tag{4.16}$$

т.е. производные $\alpha'(s_1),\ldots,\alpha'(s_n)$ и разности $\alpha(s_j)-\alpha(s_1)$, $2\le j<n$.

В о п р о с. *Верно ли, что при* $\alpha\in\{\alpha^0\}$ *параметры* (π,ρ) *однозначно характеризуют функцию* α*?*

Положительный ответ равносилен (согласно заключительному предложению в п.4.1) второй части теоремы 1. «Задание параметров (π,ρ) в (4.16) эквивалентно заданию всех элементов a_{ij} матрицы $A(\alpha,s_1,\ldots,s_n)$ в (4.6): $a_{jj}=\pi_j$, $1\le j\le n$; $a_{1j}=a_{j1}=\rho_j/(s_j-s_1)$, $2\le j\le n$; $a_{ij}=a_{ji}=(\rho_j-\rho_i)/(s_j-s_i)$, $2\le i<j\le n$.»

4.4. Траектории $(b(t),\ c(t))$. Возьмем произвольную точку $(b^\circ,c^\circ)\in\{b,c\}^0$. Для соответствующей функции $\alpha=\alpha(s;b^\circ,c^\circ)\in\{\alpha^0\}$ вычислим значения α_j,π_j в (4.11) и параметры (π,ρ). Для любого $t\in\mathbb{R}$ положим

$$(\alpha+t,\pi)=(\alpha_1+t,\ldots,\alpha_n+t,\ \pi_1,\ldots,\pi_n). \tag{4.17}$$

В соответствии с (4.13) при $t=0$ точка (4.17) принадлежит $\{\alpha,\pi\}$, в п.4.5 будет доказано, что то же верно при любом $t\in\mathbb{R}$:

$$(\alpha+t,\pi)\in\{\alpha,\pi\}. \tag{4.18}$$

Применяя к (4.18) отображение χ^{-1} (см.(4.15)) получаем траекторию

$$\tau=(b(t),c(t))=(b_1(t),\ldots,b_n(t),c_1(t),\ldots,c_n(t))\subset\{b,c\}. \tag{4.19}$$

Из (4.17) с очевидностью следует: 1) вдоль τ параметры (π,ρ) не меняются, 2) вне τ нет точек, принадлежащих $\{b,c\}$, с теми же (π,ρ). Поэтому для проверки теоремы 1 остается установить, что τ пересекает $\{b,c\}^0$ в единственной точке (b°,c°).

Для этого докажем, что $c_n(t)$ в (4.19) – линейная функция, причем ее производная $\dot{c}_n \neq 0$.

4.5. Три леммы об определителях. Для ясности и во избежание громоздких формул рассмотрим сначала случай $n=2$, а затем сравним с ним общую ситуацию.

Вместо подробных обозначений (4.8) используем сжатые: $\beta(z)$ и $\gamma(z)$. Равенства $\alpha_j=\beta(s_j)/\gamma(s_j)$, $\pi_j=[\beta'(s_j)-\alpha_j\gamma'(s_j)]/\gamma(s_j)$, $j=1,2$ запишем в виде системы четырех уравнений, линейных относительно b_1, b_2, c_1 и c_2:

$$b_1 s_j + b_2 - \alpha_j(s_j^2 + c_1 s_j + c_2) = 0,$$

$$b_1 - \alpha_j(2s_j + c_1) - \pi_j(s_j^2 + c_1 s_j + c_2) = 0, \quad j=1,2.$$

Эквивалентная запись: $MX=Y$, где

$$M=\begin{pmatrix} s_1 & 1 & -\alpha_1 s_1 & -\alpha_1 \\ s_2 & 1 & -\alpha_2 s_2 & -\alpha_2 \\ 1 & 0 & -(\alpha_1+\pi_1 s_1) & -\pi_1 \\ 1 & 0 & -(\alpha_2+\pi_2 s_2) & -\pi_2 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} \alpha_1 s_1^2 \\ \alpha_2 s_2^2 \\ \pi_1 s_1^2 + 2\alpha_1 s_1 \\ \pi_2 s_2^2 + 2\alpha_2 s_2 \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Заменяя α_j в (4.20) на α_j+t, $j=1,2$, получим матрицу $M(t)$ и векторы $X(t)$, $Y(t)$. Столбцы матрицы $M(t)$ (слева направо) обозначим V_2, V_1, $-V_4(t)$ и $-V_3(t)$; последние два столбца M обозначим $-V_4$ и $-V_3$; производную $Y(t)$ по t назовем $\dot{Y}$. Таким образом,

$$V_3(t)=V_3+tV_1, \quad V_4(t)=V_4+tV_2, \quad \dot{Y} = \begin{pmatrix} s_1^2 \\ s_2^2 \\ 2s_1 \\ 2s_2 \end{pmatrix}, \quad Y(t)=Y+t\dot{Y}. \qquad (4.21)$$

Матрицы, которые получаются из $M(t)$ заменой последнего столбца на $Y(t)$ и на $\dot{Y}$, назовем $L(t)$ и $N(t)$; матрицу $N(0)$ назовем N. Из (4.20) и (4.21) сразу следует

Л е м м а 1. *Определители $M(t)$ и $N(t)$ не зависят от t, определитель $L(t)$ – линейная функция:*

$$|M(t)| = |M|, \quad |N(t)| = |N|, \quad |L(t)| = t|N|. \qquad (4.22)$$

«Пояснения – напоминания требует лишь последняя формула. При $t=0$ точка (4.17) соответствует функции $\alpha(s;b^\circ,c^\circ)$, где $(b^\circ,c^\circ)\in\{b,c\}^0$. Значит (по замечанию в конце п.4.2), (b°,c°) принадлежит гиперплоскости $c_2=0$. Поэтому $|L(0)|=0$.»

При $t=0$ система $MX=Y$ *совместна* (по построению в п.4.4) и *одно-*

значно разрешима (по лемме в п.4.2). Поэтому верна

Лемма 2. *Определитель матрицы* M *не равен нулю:*

$$|M| \neq 0. \tag{4.23}$$

Следствие 1. *Векторы* V_j, $j=1,\dots 4$ *линейно независимы.*

Следствие 2. *Функция* $c_2(t)$ *линейна, причем* $\dot{c}_2=|N|/|M|$.

Из (4.22) и (4.23) следует также (4.18). «Так как $|M(t)|=|M|\neq 0$, система $M(t)X=Y$ однозначно разрешима для любого $t\in\mathbb{R}$, при этом согласно (4.17) функция $\alpha(z;b,c)$ принимает для $(b,c)\in\tau$ конечные значения при $z=s_j$, что равносильно выполнению условия (4.10).»

Чтобы завершить доказательство теоремы 1 при n=2, остается проверить (с учетом следствия 2), что $|N|\neq 0$.

Лемма 3. $|N|\neq 0$.

«По следствию 1 векторы V_1, V_2, V_4 линейно независимы, пусть T – трехмерное пространство, являющееся их линейной оболочкой. Так как $|L(0)|=0$, то V_1, V_2, Y, V_4 линейно зависимы, т.е. $Y\in T$. Если предположить, что и $|N|=0$, то V_1, V_2, $\dot{Y}$, V_4 тоже линейно зависимы, т.е. и $\dot{Y}\in T$.

Таким образом, в случае $|N|=0$ векторы V_2, $\dot{Y}$, V_4 и Y линейно зависимы (поскольку все они принадлежат T), так что

$$D = \begin{vmatrix} s_1 & s_1^2 & \alpha_1 s_1 & \alpha_1 s_1^2 \\ s_2 & s_2^2 & \alpha_2 s_2 & \alpha_2 s_2^2 \\ 1 & 2s_1 & \alpha_1+\pi_1 s_1 & 2\alpha_1 s_1+\pi_1 s_1^2 \\ 1 & 2s_2 & \alpha_2+\pi_2 s_2 & 2\alpha_2 s_2+\pi_2 s_2^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.24}$$

Преобразуем определитель (4.24): из первой строки вынесем множитель s_1, из второй строки – множитель s_2, новую первую строку вычтем из третьей, новую вторую – из четвертой. Получим:

$$D=s_1 s_2 \begin{vmatrix} 1 & s_1 & \alpha_1 & \alpha_1 s_1 \\ 1 & s_2 & \alpha_2 & \alpha_2 s_2 \\ 0 & s_1 & \pi_1 s_1 & \alpha_1 s_1+\pi_1 s_1^2 \\ 0 & s_2 & \pi_2 s_2 & \alpha_2 s_2+\pi_2 s_2^2 \end{vmatrix} = s_1^2 s_2^2 \begin{vmatrix} 1 & s_1 & \alpha_1 & \alpha_1 s_1 \\ 1 & s_2 & \alpha_2 & \alpha_2 s_2 \\ 0 & 1 & \pi_1 & \alpha_1+\pi_1 s_1 \\ 0 & 1 & \pi_2 & \alpha_2+\pi_2 s_2 \end{vmatrix} \tag{4.25}$$

(последнее равенство получено после вынесения s_1 из новой третьей строки и s_2 – из новой четвертой строки). Столбцы последнего определителя в (4.25) – это векторы V_1, V_2, V_3, V_4, и равенство D=0 противоречит их линейной независимости (см. следствие 1).

Итак, $|N|\neq 0$, что и требовалось доказать.»

При $n>2$ доказательство повторяется почти дословно. В частности, последний шаг (аналог (4.24), (4.25)) - такой:

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_1^2 \dots s_1^n & \alpha_1 s_1 & \alpha_1 s_1^2 & \dots & \alpha_1 s_1^n \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_n & s_n^2 \dots s_n^n & \alpha_n s_n & \alpha_n s_n^2 & \dots & \alpha_n s_n^n \\ 1 & 2s_1 \dots ns_1^{n-1} & \alpha_1+\pi_1 s_1 & 2\alpha_1 s_1+\pi_1 s_1^2 & \dots & n\alpha_1 s_1^{n-1}+\pi_1 s_1^n \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2s_n \dots ns_n^{n-1} & \alpha_n+\pi_n s_n & 2\alpha_n s_n+\pi_n s_n^2 & \dots & n\alpha_n s_n^{n-1}+\pi_n s_n^n \end{vmatrix} =$$

$$= (s_1 \dots s_n)^2 \begin{vmatrix} 1 & s_1 \dots s_1^{n-1} & \alpha_1 & \alpha_1 s_1 & \dots & \alpha_1 s_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & s_n \dots s_n^{n-1} & \alpha_n & \alpha_n s_n & \dots & \alpha_n s_n^{n-1} \\ 0 & 1 \dots (n-1)s_1^{n-1} & \pi_1 & \alpha_1+\pi_1 s_1 & \dots & (n-1)\alpha_1 s_1^{n-2}+\pi_1 s_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 \dots (n-1)s_n^{n-2} & \pi_n & \alpha_n+\pi_n s_n & \dots & (n-1)\alpha_n s_n^{n-2}+\pi_n s_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Теорема 1 доказана.

5. Аппроксимации $1/\sqrt{s}$. Явные формулы для w_k и d_k

Объясним, как определяются по числам (1.1) и их квадратам (1.2) значения параметра $w_2,\dots,w_n$ и коэффициенты $d_0,d_1,\dots,d_n$, дающие 1-аппроксимацию (1.16) и (следовательно) приводящие к основному тождеству (1.11).

5.1. Формулы для w_k. В согласии с предположением, высказанным в [2], искомые w_k следующим образом связаны с числами (1.1). Рассмотрим такие симметрические функции $v_j=v_j(f_1,\dots,f_n)$, что

$$p(z) = (z+f_1)\dots(z+f_n) = z^n+v_1z^{n-1}+\dots+v_jz^{n-j}+\dots+v_n. \qquad (5.1)$$

Тогда w_k, $2\le k\le n$, - это корни многочлена $Q(-z)$, где

$$Q(z)=\begin{cases}(v_1z^{q-1}+v_3z^{q-2}+\dots+v_{2q-1})(z^q+v_2z^{q-1}+\dots+v_{2q}) & \text{при } n=2q, \\ (z^q+v_2z^{q-1}+\dots+v_{2q})(v_1z^q+v_3z^{q-1}+\dots+v_{2q+1}) & \text{при } n=2q+1.\end{cases} \qquad (5.2)$$

5.2. Нумерация w_k. Запишем (5.2) в виде $Q(z)=\lambda(z)\mu(z)$, обозначив в обеих формулах первый сомножитель через $\lambda(z)$, второй сомножитель через $\mu(z)$. Корни $\mu(-z)$ назовем $w_2,w_4,\dots$, корни $\lambda(-z)$ обозначим $w_3,w_5\dots$. По теореме Эрмита-Билера об устойчивых многочленах 1) при любых $f_j>0$, $1\le j\le n$, все w_k положительны, 2) корни $z\lambda(-z)$ и $\mu(-z)$ чередуются:

$$w_1=0 < w_2 <\ldots< w_n. \tag{5.3}$$

5.3. Две 0-аппроксимации $1/\sqrt{s}$. Согласно (5.1)

$$p(z) = z\lambda(z^2)+\mu(z^2). \tag{5.4}$$

Пусть для определенности $n=2q+1$ (случай $n=2q$ рассматривается совершенно аналогично). Тогда

$$\lambda(s) = (s+w_3)\ldots(s+w_n), \qquad \mu(s) = v_1(s+w_2)\ldots(s+w_{n-1}). \tag{5.5}$$

Вследствие (5.5)

$$\frac{\lambda(s)}{\mu(s)} = \varkappa_0 + \frac{\varkappa_2}{s+w_2} + \ldots + \frac{\varkappa_{n-1}}{s+w_{n-1}}, \tag{5.6}$$

$$\frac{\mu(s)}{s\lambda(s)} = \frac{\varkappa_1}{s} + \frac{\varkappa_3}{s+w_3} + \ldots + \frac{\varkappa_n}{s+w_n}, \tag{5.7}$$

причем (по теореме Эрмита-Билера) все $\varkappa_k>0$.

Так как согласно (5.1) $p(-f_j)=0$, $1\le j\le n$, то из (5.4) следует, что

$$f_j\lambda(s_j) = \mu(s_j), \; j=1,\ldots,n. \tag{5.8}$$

Отсюда и из (5.6) получаем

$$\frac{1}{\sqrt{s_j}} = \frac{1}{f_j} = \varkappa_0 + \frac{\varkappa_2}{s_j+w_2} + \ldots + \frac{\varkappa_{n-1}}{s_j+w_{n-1}}, \qquad 1\le j\le n, \tag{5.9}$$

аналогично из (5.7) и (5.8) следует, что

$$\frac{1}{\sqrt{s_j}} = \frac{1}{f_j} = \frac{\varkappa_1}{s_j} + \frac{\varkappa_3}{s_j+w_3} + \ldots + \frac{\varkappa_n}{s_j+w_n}, \qquad 1\le j\le n. \tag{5.10}$$

Равенства (5.9) и (5.10) означают, что (5.6) и (5.7) – это две 0-аппроксимации $1/\sqrt{s}$: суммы простых дробей в правых частях совпадают с $1/\sqrt{s}$ в заданных n точках $s_1,\ldots,s_n$.

5.4. 1-аппроксимация $1/\sqrt{s}$. Формулы для d_k. Разделим (5.4) поочередно на $z\lambda(z^2)$ и $z\mu(z^2)$:

$$\frac{p(z)}{z\lambda(z^2)} = 1 + \frac{\mu(z^2)}{z\lambda(z^2)}, \qquad \frac{p(z)}{z\mu(z^2)} = \frac{\lambda(z^2)}{\mu(z^2)} + \frac{1}{z}. \tag{5.11}$$

Перемножая равенства (5.11), получаем (с учетом (5.6) и (5.7)):

$$\frac{p^2(z)}{z^2\lambda(z^2)\mu(z^2)} = \frac{2}{z} + \frac{\lambda(z^2)}{\mu(z^2)} + \frac{\mu(z^2)}{z^2\lambda(z^2)} = \frac{2}{z} + \varkappa_0 + \frac{\varkappa_1}{z^2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{\varkappa_k}{z^2+w_k}. \quad (5.12)$$

Левая часть (5.12) обращается в нуль при $z=-f_j$ вместе с первой производной. Полагая

$$d_j = \varkappa_j/2, \quad 0 \le j \le n. \quad (5.13)$$

приходим поэтому к 1-аппроксимации (1.16): рациональная функция

$$r(s) = d_0 + \frac{d_1}{s} + \sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{s+w_k},$$

равная согласно (5.13) полусумме (5.6) и (5.7), приближает $1/\sqrt{s}$ вместе с первой производной - с точным совпадением функций и первых производных в заданных n точках $s_1,\dots,s_n$:

$$s_j^{-1/2} = r(s_j), \quad -s_j^{-3/2}/2 = r'(s_j), \quad 1 \le j \le n.$$

Согласно п.1.4 найденные d_j, w_j дают также тождество (1.11), что завершает решение поставленной в п.1.1 задачи о матрице F.

В заключение отметим чрезвычайно важное для приложений Экстремальное свойство 1-аппроксимации r(s):

$$r(s) > 1/\sqrt{s} \text{ для любого } s>0, \ s \ne s_1,\dots,s_n. \quad (5.14)$$

« Неравенство (5.14) сразу следует из положительности левой части (5.12) при всех $z<0$, $z \ne -f_1,\dots,-f_n$ ».

Литература

1. *Гервер М.Л.* О матрице $F = \{1/[f_i f_j (f_i + f_j)]\}$ // ДАН СССР. 1991. Т.319. N3. С.535-538.
2. *Гервер М.Л.* Волноводы и устойчивые многочлены. II // Современные методы интерпретации сейсмологических данных. М.:Наука. 1991. С.102-148. (Вычисл. сейсмология: Вып. 24).
3. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978. Ч.2. 432с.