

В.М.Маркушевич. А.С.Цемахман

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ СЕЙСМИЧЕСКОГО СИГНАЛА ПО τ -ФУНКЦИИ
ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

V.M.Markushevich, A.S.Tsemahman

DETERMINATION OF SEISMIC VELOCITY BY τ -FUNCTION
FOR A CLASS OF ANISOTROPIC MEDIA

We generalize the τ -method for anisotropic horizontally homogeneous media with seismic signal velocity v depending on two variables y and α , where y is depth and α is the angle between the vertical and ray direction. We consider also the specific case where the velocity of seismic signal propagation in horizontal direction increases with depth. In that case we can evaluate the horizontal velocity and the velocity indicatrix by τ -functions of reflected and refracted waves.

Рассмотрим трансверсально анизотропную горизонтально однородную среду, скорость распространения сейсмического импульса в которой дается зависимостью

$$v(y, \alpha) = \frac{u(y)}{1 + e(y) \cos \alpha},$$

$$v(y, \pi - \alpha) = v(y, \alpha), \quad 0 < \alpha \leq \pi/2, \quad (1)$$

где y - глубина; α - угол с вертикалью, $|e(y)| < 1$. Функция $u(y)$ будет в дальнейшем называться горизонтальной скоростью, $e(y)$ - эксцентриситетом ввиду сходства (1) с формулой для эллипса в полярных координатах.

В этой статье мы распространим определение τ -функции, введенное на такие среды в [1]. В частном случае, когда $u(y)$ - монотонно возрастающая функция, будет показано, что, хотя $u(y)$ и $e(y)$ не определяются по τ -функции для преломленной волны единственным образом, но выше отражающей границы их можно найти по годографам (или τ -функциям) отраженной и преломленной волн.

Конечно, единственность будет доказана только в классе сред, определяемом формулой (1). С каждым представителем этого класса возникает все множество его диффеоморфных соответствий, описанное в [2,3], по крайней мере, если рассматривать только преломленные волны. Поэтому с решением обратной задачи в классе (1) мы связыва-

ем лишь возможность грубой оценки слабой анизотропии, т.е. $|e| \ll 1$, в средах, близких к изотропным. Надеемся также, что формула (1) достаточно хорошо описывает анизотропное распространение волн в уплотненных осадках.

1. Закон Снеллиуса в средах (1)

Луч является экстремалью функционала

$$t = \int_{\lambda} \frac{ds}{v(y, \alpha)}, \quad (2)$$

где λ - траектория луча от поверхности до самой глубокой точки; s - длина траектории (рис.1). На плоскости (x, y) (где x - горизонтальная координата, y - глубина) удобно записать (2) в виде

$$t = \int_0^y \frac{\sqrt{1 + (x'_y)^2}}{v(y, \alpha)} dy = \int_0^y F(x'_y, y) dy, \quad (3)$$

где

$$F(x'_y, y) = \frac{\sqrt{1 + (x'_y)^2}}{u(y)} + \frac{e(y)}{u(y)}. \quad (4)$$

Полагая $v(y, \alpha)$ достаточно гладкой функцией по y , рассмотрим уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Так как $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, то

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{1}{u(y)} \frac{x'}{\sqrt{1 + (x')^2}} = \frac{\sin \alpha(y)}{u(y)} = p, \quad (5)$$

где $p = \text{const}$ - лучевой параметр.

Таким образом, лучи в средах (1) подчиняются закону Снеллиуса, записанному для горизонтальных скоростей. Как будет показано дальше, отсюда не следует, что лучи в таких средах не зависят от эксцентриситета $e(y)$ и совпадают с лучами в изотропной среде при $e(y) = 0$.

2. Луч как решение вариационной задачи со свободным концом.

Т е о р е м а 1. Пусть скорость $v(y, \alpha) = g_y^{-1}(\alpha)$, $v(y, \pi - \alpha) = v(y, \alpha)$, при любых y, α удовлетворяет условию

$$\sigma_y(y, \alpha) + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \sigma_y(y, \alpha) > 0. \quad (6)$$

Тогда и только тогда лучи, соединяющие две точки на поверхности $y=0$, являются симметричными кривыми.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть нисходящая и восходящая ветви луча несимметричны на интервале глубин $I_0 = (y_0, y_0+h)$, где h - мало (рис.2). Смещая часть луча при $y > y_0+h$ конгруэнтно параллельно горизонтальной оси, можно симметризовать участки обеих ветвей на интервале I_0 . Вариация времени эквивалентна изменению функции

$$f(s) = \sigma_y(\alpha(s))\sqrt{h^2 + (a-s)^2} + \sigma_y(\beta(s))\sqrt{h^2 + (a+s)^2}$$

в окрестности $s=0$. Так как

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = \frac{2\cos^3 \alpha}{h} (\sigma_{yy}(\alpha) + \sigma''_{y_0}(\alpha)),$$

то отсюда следует справедливость утверждения.

С л е д с т в и е. В нашем случае

$$\sigma_y(y, \alpha) + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \sigma_y(y, \alpha) = u^{-1}(y) > 0,$$

поэтому луч является симметричной кривой.

Вследствие симметричности луча мы можем рассматривать его нисходящую ветвь как решение следующей задачи (рис.3): на полуплоскости $\{(x, y), y \geq 0\}$ соединить начало координат и прямую $x=X$ экстремалью, проходимой за минимальное время. Поскольку нижний конец экстремали не фиксирован, в точке (X, Y) должно удовлетворяться условие трансверсальности (ср. [4.С.127])

$$1 + e(y)\sqrt{1+(x')^2} + \phi'x' = 0. \quad (7)$$

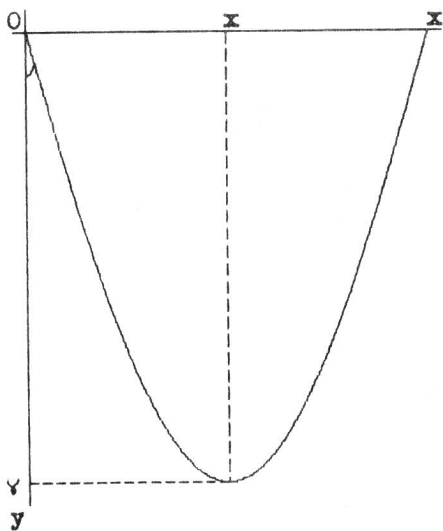
Здесь ϕ' - тангенс угла между прямой $x=X$ и вертикалью - равен нулю. Поэтому условие (7) принимает вид

$$\cos \alpha(Y) + e(Y) = 0. \quad (8)$$

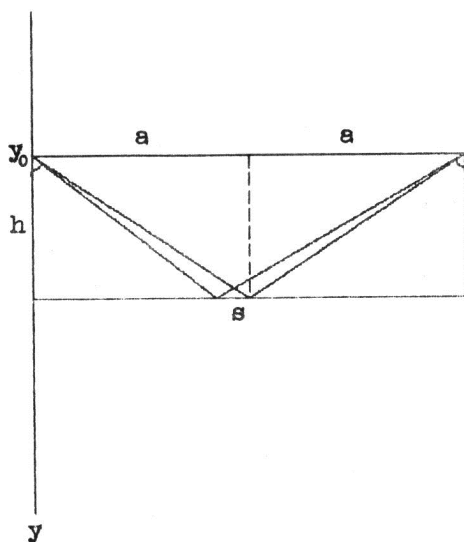
Если $e(Y) \leq 0$, то (8) определяет угол наклона луча в самой глубокой точке (см. рис.3). Полагая $u(Y) = q^{-1}$ (где $q \geq p$), получим из (8)

$$X'(Y) = \operatorname{tg} \alpha(Y) = \frac{p}{\sqrt{q^2 - p^2}},$$

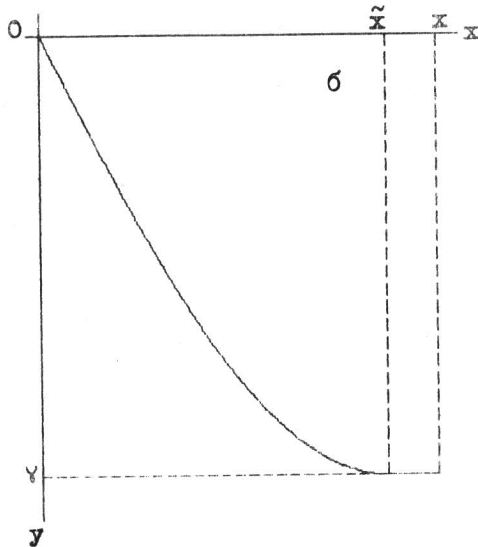
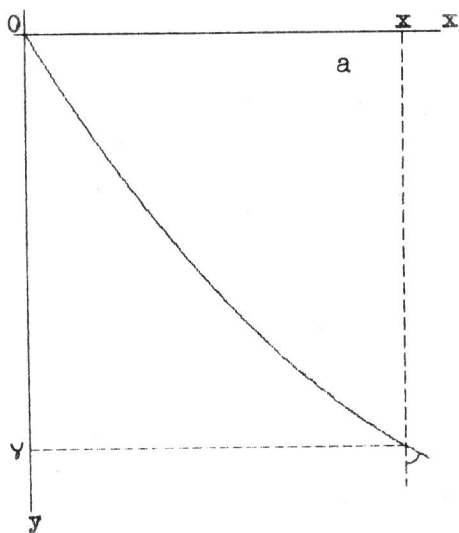
и, следовательно, можно записать (8) в виде



Р и с. 1. Траектория сейсмического импульса



Р и с. 2. Распространение сейсмического импульса на малом интервале глубин $I_0 = (y_0, y_0+h)$



Р и с. 3. Траектория сейсмического импульса в анизотропной среде рассматриваемого типа при $e(Y) < 0$ (а) и при $e(Y) > 0$ (б)

$$\sqrt{q^2 - p^2} + qe(Y) = 0, \quad e(Y) < 0. \quad (9)$$

Однако, если $e(Y) > 0$, то условие трансверсальности не удовлетворяется на нисходящей ветви луча. Всюду в этой статье мы будем рассматривать безволноводные среды, полагая, что

$$u(y_1) \geq u(y_2), \quad y_1 > y_2. \quad (10)$$

В предположении (10) становится очевидным, что гладкой экстремалью при $e(y) > 0$ является кривая $(0,0) \rightarrow (\tilde{X}, Y) \rightarrow (X, Y)$ (см. рис.3), состоящая из нисходящей ветви луча, которая описывается уравнением (5), продолженной горизонтальным участком.

3. Функции $X(p)$, $T(p)$ и $\tau(p)$

Введем по аналогии с [1] половину эпицентрального расстояния $X(p)$ и половину времени движения сейсмического импульса $T(p)$,

$$X(p) = \int_0^{Y(p)} \operatorname{tg} \alpha(y) dy + \theta(e(Y(p)))L(p) = \tilde{X}(p) + \theta(e(Y))L(p), \quad (11)$$

$$T(p) = \int_0^{Y(p)} \frac{ds}{v(y, \alpha)} = \int_0^{Y(p)} \frac{dy}{v(y, \alpha) \cos \alpha(y)} = \tilde{T}(p) + \theta(e(Y))pL(p), \quad (12)$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad (13)$$

$$\tilde{X}(p) = \int_0^{Y(p)} \frac{pu(y)}{\sqrt{1-p^2u^2(y)}} dy, \quad (14)$$

$$\tilde{T}(p) = \int_0^{Y(p)} \left[\frac{1}{u(y)\sqrt{1-p^2u^2(y)}} + \frac{e(y)}{u(y)} \right] dy, \quad (15)$$

$$Y(p) = \begin{cases} \inf\{y, pu(y) \geq 1\}, & e(Y) \geq 0, \\ \inf\{y, \operatorname{Re} \sqrt{1-p^2u^2(y)} + e(y) < 0\}, & e(Y) < 0, \end{cases} \quad (16)$$

$L(p)$ - длина горизонтального участка.

Образует функцию $\tau(p)$:

$$\tau(p) = T(p) - pX(p) = \tilde{T}(p) - p\tilde{X}(p) = \int_0^{Y(p)} \left(\frac{\sqrt{1 - p^2 u^2(y)}}{u(y)} + \frac{e(y)}{u(y)} \right) dy. \quad (17)$$

С помощью этой функции можно найти форму экстремали при $e(y) > 0$, которая определяется требованием стационарности $T(p)$, т.е.

$$T'(p) = 0. \quad (18)$$

С другой стороны, при $e(y) > 0$

$$T(p) = \tilde{T}(p) + p(X(p) - \tilde{X}(p)) = \tau(p) + pX(p). \quad (19)$$

Отметим, что при определении значений p для экстремалей с полуэпицентральной расстоянием X мы считаем X фиксированным, т.е.

$$X(p) = \bar{X}. \quad (20)$$

Дифференцируя (19) при условии (20), находим, что в стационарной точке должно быть

$$T'(p) = \tau'(p) + \bar{X} = 0 \quad (21)$$

или

$$-\tilde{X}(p) + pe(Y)Y'_p + \bar{X} = 0,$$

откуда

$$L(p) = \bar{X} - \tilde{X}(p) = -pe(Y)Y'_p. \quad (22)$$

Уравнения (22) и (8) позволяют найти стационарные траектории для фиксированного эпицентрального расстояния.

4. Движение фронта возмущения

Появление излома в самой глубокой точке луча при $e(Y) < 0$ и горизонтального участка при $e(Y) > 0$ становится понятным, если рассмотреть движение фронтов. Фронт — это кривая, трансверсальная лучу, причем в малой окрестности точки на луче эту кривую можно приблизить касательной к ней. При $e(Y) \leq 0$ в самой глубокой точке эта касательная является вертикальной прямой и осью симметрии луча. При $e(Y) > 0$ в начале горизонтального участка уравнение (7) дает

$$\phi'(Y) = -e(Y),$$

так как $X'(y) \rightarrow \infty$ при приближении к точке Y . При дальнейшем движении импульса вдоль горизонтального участка фронт поворачивается, стремясь к вертикальному с $\phi'(Y) = 0$. Угол поворота равен

$$d\phi = \frac{u'(Y)}{u(Y)} dx,$$

поэтому

$$L = \frac{e(Y)u(Y)}{u'(Y)} = \frac{e(Y)}{pu'(Y)} = -pe(Y)Y'_p.$$

Таким образом, горизонтальный участок луча обусловлен его симметричностью.

5. Определение параметра p

Пусть $e(Y) > 0$, т.е. эксцентриситет в самой глубокой точке положителен. Продифференцировав в (17) функцию $\tau(p)$, с одной стороны, как комбинацию $T(p)$ и $X(p)$, а с другой ее интегральное представление, получим

$$\tau'(p) = T'_p - pX'_p - X = \tilde{X}(p) + pe(Y)Y'(p). \quad (23)$$

Здесь предполагается, в отличие от (20), что при изменении параметра p изменяется и эпицентральное расстояние. Поскольку для луча справедливо соотношение (22), то подставляя это равенство в (23), имеем

$$T'_p - pX'_p = 0$$

или

$$p = \frac{dT}{dX}. \quad (24)$$

При $e(Y) < 0$ дифференцирование интегрального представления для $\tau(p)$, задаваемого (17), дает

$$\tau' = -X(p) + q\left(\sqrt{1-p^2/q^2} - |e(Y)|\right)Y'. \quad (25)$$

Но второе слагаемое равно нулю в силу (9), и, следовательно,

$$\tau'_p = -X(p). \quad (26)$$

Подставляя (26) в левую часть (23), получаем снова

$$p = \frac{dT}{dX}.$$

Таким образом, параметр p , как и в изотропной среде, является производной годографа. Что касается $\tau(p)$, то и она сохраняет свои основные свойства. В частности, $\tau(p)$ - монотонно убывающая функция.

6. Решение обратной задачи

Очевидно, что по одной функции $\tau(p)$ невозможно определить две функции - горизонтальную скорость $u(y)$ и эксцентриситет $e(y)$. Допустим, что кроме годографа $\{X(p), T(p), p \in (0, 1)\}$ преломленной волны задан также годограф $\{X_H(p), T_H(p), p \in (0, \mathcal{P})\}$ волны, отраженной от расположенной на глубине H отражающей границы. Здесь

$$X_H(p) = \int_0^H \frac{pu(y)}{\sqrt{1-p^2u^2(y)}} dy, \quad (27)$$

$$T_H(p) = \int_0^H \left(\frac{1}{u(y)\sqrt{1-p^2u^2(y)}} + \frac{e(y)}{u(y)} \right) dy, \quad (28)$$

$$p \in (0, \mathcal{P}), \quad \mathcal{P} = u^{-1}(H-0) (1 - \theta(-e) e^2(H-0))^{1/2}. \quad (29)$$

Так как формула (27) для полуэпицентрального расстояния отраженного сигнала отличается от такой же формулы в изотропной среде только областью значений параметра p , то для монотонной $u(y)$ справедлива теорема (ср. [5]):

Т е о р е м а 2. Функция $u(y)$, $y \in (0, H)$ единственным образом определяется по функции $X_H(p)$, $p \in (0, \mathcal{P})$, где \mathcal{P} задается формулой (29).

Отметим, что годограф отраженной волны в анизотропной среде рассматриваемого типа при $e(H-0) > 0$ конгруэнтен такому же годографу в изотропной среде со скоростью $u(y)$. Действительно, он получается из последнего сдвигом, параллельным оси времени, на величину

$$\Delta t = \int_0^H \frac{e(y)}{u(y)} dy.$$

То же правильно и для $e(H-0) < 0$, за исключением того, что в годографе отраженной волны в анизотропной среде не содержатся лучи с параметром $p \in (u^{-1}(H-0) (1 - e^2(H-0))^{1/2}, u^{-1}(H-0))$.

Теорема 2 вместе с формулой (17) приводит к следующему утверждению.

Т е о р е м а 3. По заданным годографам преломленной и отраженной с глубины H волн единственным образом определяется эксцентриситет $e(y)$ и монотонная горизонтальная скорость $u(y)$.

7. Пример годографа в анизотропной среде рассматриваемого типа

Пусть $u(x) = ch(ax)$. Тогда в изотропной среде с такой скоростью

$$X_u(p) = \int_0^{Y(p)} \frac{pu(y) dy}{\sqrt{1-p^2u^2(y)}} = \frac{1}{a} \operatorname{arch} \frac{1}{p} \int_0^{\operatorname{arch} \frac{1}{p}} \frac{ch(ay) dy}{\sqrt{p^{-2} - ch^2(ay)}} = \frac{\pi}{2a},$$

$$T_u(p) = \int_0^{Y(p)} \frac{dy}{u(y)\sqrt{1-p^2u^2(y)}} = p^{-1} \int_0^{\operatorname{arch} \frac{1}{p}} \frac{dy}{ch(ay)\sqrt{p^{-2} - ch^2(ay)}} = \frac{\pi}{2a}.$$

Далее

$$\begin{aligned} \int_0^{Y(p)} \frac{dy}{u(y)} &= \int_0^{\frac{1}{a} \operatorname{arch} \frac{1}{p}} \frac{dy}{\operatorname{ch}(ay)} = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{1}{a} \operatorname{arch} \frac{1}{p}} \frac{dsh(ay)}{\operatorname{ch}^2(ay)} = \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{\sqrt{p^{-2}-1}} \frac{dv}{1+v^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-p^2}}{p}, \quad Y'(p) = -\frac{1}{ap} \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}. \end{aligned}$$

Пусть $e(y) = e_+ > 0$, тогда уравнение для стационарных траекторий

$$\bar{X} - \frac{\pi}{2a} = e_+ / (a\sqrt{1-p^2})$$

и, следовательно,

$$X(p) = \frac{\pi}{2a} + e_+ / (a\sqrt{1-p^2}),$$

$$\tilde{T}(p) = \frac{\pi}{2a} + \frac{e_+}{a} \operatorname{arctg}(\sqrt{1-p^2}/p).$$

$$T(p) = \tilde{T}(p) + pL(p) = \frac{\pi}{2a} + \frac{e_+}{a} \operatorname{arctg}(\sqrt{1-p^2}/p) + e_+ p / (a\sqrt{1-p^2}),$$

$$\tau(p) = \frac{\pi}{2a}(1-p) + \frac{e_+}{a} \operatorname{arctg}(\sqrt{1-p^2}/p).$$

Пусть $e(y) = -e_- < 0$, тогда

$$X(p) = \frac{1}{a} \operatorname{arcsin}(\sqrt{(1-e_-^2)p^{-2}-1} / \sqrt{p^{-2}-1}),$$

$$T(p) = \frac{1}{a} \left\{ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left[p \sqrt{\frac{1-p^2}{(1-e_-^2)p^2}-1} \right] \right\},$$

$p \in (0, \sqrt{1-e_-^2})$. Вдоль лучей с параметрами $p \in (\sqrt{1-e_-^2}, 1)$ сейсмический сигнал не распространяется.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Рассмотрим вычисление интегралов $X_u(p)$ и $T_u(p)$ (остальные находятся по аналогии).

$$X_u(p) = \int_0^{Y(p)} \frac{pu(y)dy}{\sqrt{1-p^2u^2(y)}} = \int_0^{\frac{1}{a} \operatorname{arch} \frac{1}{p}} \frac{\operatorname{ch}(ay)dy}{\sqrt{p^{-2}-\operatorname{ch}^2(ay)}} = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{1}{a} \operatorname{arch} \frac{1}{p}} \frac{dsh(ay)}{\sqrt{p^{-2}-1-\operatorname{sh}^2(ay)}} =$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^{\sqrt{p^{-2}-1}} \frac{dv}{\sqrt{(p^{-2}-1)-v^2}} = \frac{1}{a} \arcsin \frac{v}{\sqrt{p^{-2}-1}} \Big|_0^{\sqrt{p^{-2}-1}} = \frac{\pi}{2a},$$

$$T_u(p) = \int_0^{Y(p)} \frac{dy}{u(y)\sqrt{1-p^2u^2(y)}} = p^{-1} \int_0^{\frac{1}{a} \operatorname{arch} \frac{1}{p}} \frac{dy}{\operatorname{ch}(ay)\sqrt{1-p^2\operatorname{ch}^2(ay)}} =$$

$$= \frac{1}{ap} \int_0^{\frac{1}{a} \operatorname{arch} \frac{1}{p}} \frac{d\operatorname{sh}(ay)}{\operatorname{ch}^2(ay)\sqrt{p^{-2}-\operatorname{ch}^2(ay)}} = \frac{1}{ap} \int_0^{\sqrt{p^{-2}-1}} \frac{dv}{(1+v^2)\sqrt{(p^{-2}-1)-v^2}} =$$

$$= -\frac{1}{ap} \int_0^{\sqrt{p^{-2}-1}} \frac{\frac{1}{v} d\frac{1}{v}}{(1/v^2+1)\sqrt{(p^{-2}-1)/v^2-1}} = \frac{1}{2ap} \int_{(p^{-2}-1)^{-1}}^{\infty} \frac{du}{(1+u)\sqrt{(p^{-2}-1)u-1}} =$$

$$= \frac{1}{ap(p^{-2}-1)} \int_{(p^{-2}-1)^{-1}}^{\infty} \frac{d\sqrt{(p^{-2}-1)u-1}}{1+u}$$

Полагая $\sqrt{(p^{-2}-1)u-1} = w$, $u = (1+w^2)(p^{-2}-1)^{-1}$, получаем

$$T_u(p) = \frac{1}{ap} \int_0^{\infty} \frac{dw}{w^2 + p^{-2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}(pw) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2a}.$$

Литература

1. Гервер М.Л., Маркушевич В.М. Определение по годографу скорости распространения сейсмической волны // Методы и программы для анализа сейсмических наблюдений. М.: Наука, 1967. С.3-51. (Вычисл. сейсмология: Вып.3).
2. Бернштейн И.Н., Гервер М.Л. Условие различимости метрик по годографам // М.: Наука, 1980. С. 50-73. (Вычисл. сейсмология: Вып.13).
3. Сейсморазведка: Справочник геофизика. Т.1 / Под ред. В.П. Номоконова. М.: Недра, 1990. 336с.
4. Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Основы вариационного исчисления. Т.1, ч.2. М.:Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 400с.
5. Маркушевич В.М. Характеристические свойства годографа от глубинного источника // М.: Наука, 1968. С.64-77. (Вычисл. сейсмология: Вып.4).