

В.М.Маркушевич, Э.Найленд, А.С.Цемахман

ДИСПЕРСИЯ ВОЛН РЭЛЕЯ В СРЕДАХ ЗВОЛИНСКОГО. ПУАССОНОВ СЛУЧАЙ

*V.M.Markushevich, E.Nyland, A.S.Tsemahman*DISPERSION OF RAYLEIGH WAVES IN ZVOLINSKY'S MEDIA.
POISSONIAN CASE

An unexpected behavior of Rayleigh waves is found in elastic half-spaces in which density and elastic parameters are proportional and increase exponentially with depth. Such a structure, which might approximate the behavior of shallow sediments, has a frequency band in which Rayleigh waves cannot propagate.

Введение

Дисперсионные свойства поверхностных волн Рэлея в неоднородных средах зависят не только от скоростей продольных и поперечных волн. Некоторые среды с постоянными скоростями в действительности имеют необычные дисперсионные свойства, если их плотность ρ и коэффициенты Ламе λ и μ изменяются, оставаясь при этом пропорциональными. В частности, подобную зависимость плотности и упругости от глубины могут обнаруживать морские осадочные породы, сформировавшиеся преимущественно под действием гравитационного уплотнения [1]. Ввиду того, что исследование этих пород с помощью стационарных поверхностных колебаний имеет практическое значение, в данной работе мы аналитически рассматриваем распространение волн Рэлея в таких средах.

В упругих полупространствах, названных D -постоянными [2,3], существует характерная частота, своя для каждой среды, для которой возможно простое аналитическое описание стационарного поля колебаний рэлеевского типа. Для части D -постоянных сред волны Рэлея на характерной частоте не возникают. Мы ищем такой диапазон частот, включающий данную характерную частоту, в котором рэлеевские моды исчезают. Для большинства D -постоянных сред этот диапазон пока не найден.

Некоторые D -постоянные среды, являющиеся пуассоновыми, т.е. удовлетворяющие условию $\lambda = \mu$, совпадают со средами, которые исследовал Н.В. Зволинский [4], т.е. с полупространствами $\lambda = \mu = \mu_0 \exp(Rz)$, $\rho = \rho_0 \exp(Rz)$. Уравнение для волн Рэлея в таких средах решается явно, что позволяет полностью изучить дисперсию этих волн.

Зволинский, не выделяя пуассонов случай, рассматривал также полупространства с $\lambda=0$, $\mu=\mu_0 \exp(Rz)$, $\rho=\rho_0 \exp(Rz)$ и кроме того, изучал асимптотическое поведение волновых чисел при $\omega \rightarrow \infty$ для произвольных $\lambda=\lambda_0 \exp(Rz)$, $\mu=\mu_0 \exp(Rz)$, $\rho=\rho_0 \exp(Rz)$. Он отметил, что в рассматриваемых средах волны Рэлея существуют не при любой частоте. В своем исследовании Зволинский не использовал метод Рэлея [5.С.229], который состоит в сведении дисперсионного уравнения к полиному с помощью последовательных возведений в квадрат обеих частей дисперсионного уравнения с последующим отбором правильных корней. В данной работе мы, напротив, следуем методу Рэлея. Получающийся при этом полином позволяет аналитически найти зависимость волнового числа от частоты или наоборот. Этот неожиданно простой результат был получен с использованием пакета программ "Математика" [6]. Возможно, отсутствие таких вычислительных средств в середине 40-х годов повлияло на то, что Зволинский выбрал другой путь исследования.

Решение уравнения для волн Рэлея

Краевая задача для поверхностных волн Рэлея [7]

$$\frac{d}{dz} \left(\mu \frac{dw_1}{dz} - \xi \mu w_2 \right) - \xi \lambda \frac{dw_2}{dz} + (\omega^2 \rho - \xi^2 (\lambda + 2\mu)) w_1 = 0,$$

$$\frac{d}{dz} \left((\lambda + 2\mu) \frac{dw_2}{dz} + \xi \lambda w_1 \right) + \xi \mu \frac{dw_1}{dz} + (\omega^2 \rho - \xi^2 \mu) w_2 = 0,$$

(1)

$$\left. \begin{aligned} \mu \frac{dw_1}{dz} - \xi \mu w_2 &= 0 \\ (\lambda + 2\mu) \frac{dw_2}{dz} + \xi \lambda w_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{при } z = 0,$$

$$w_1 \rightarrow 0, \quad w_2 \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty$$

в случае полупространства $\lambda=\mu=\mu_0 \exp(Rz)$, $\rho=\rho_0 \exp(Rz)$ принимает вид

$$\ddot{w}_1 + R_1 \dot{w}_1 - 3\alpha^2 w_1 - 2\xi \dot{w}_2 - R\xi w_2 = 0,$$

$$\ddot{w}_2 + R_2 \dot{w}_2 - \frac{\beta^2}{3} w_2 + \frac{2}{3} \xi \dot{w}_1 + \frac{1}{3} R\xi w_1 = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{w}_1 - \xi w_2 &= 0 \\ 3\dot{w}_2 + w_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{при } z = 0, \quad (2)$$

$$w_1 \rightarrow 0, w_2 \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty,$$

где

$$\alpha^2 = \xi^2 - \frac{\omega^2}{a^2} = \xi^2 - \frac{\omega^2}{3b^2}, \quad \beta^2 = \xi^2 - \frac{\omega^2}{b^2},$$

$$a^2 = \frac{3\mu_0}{\rho_0} = 3b^2, \quad b^2 = \frac{\mu_0}{\rho_0}, \quad \dot{f} \equiv \frac{df}{dz}.$$

Мы исследуем зависимость собственных значений ξ_1 краевой задачи (2) от частоты ω .

Следуя Зволинскому [4], положим

$$w_1 = -\frac{2}{3}\xi\dot{F} - \frac{1}{3}R\xi F, \quad (3)$$

$$w_2 = -\frac{1}{3}\ddot{F} - \frac{1}{3}R\dot{F} + \alpha^2 F.$$

Тогда первое уравнение в (2) удовлетворяется автоматически, а из второго получается уравнение для F :

$$F^{(4)} + 2R\dot{F} + (R^2 - \alpha^2 - \beta^2)\ddot{F} - R(\alpha^2 + \beta^2)\dot{F} + (\alpha^2\beta^2 + \frac{1}{3}R^2\xi^2)F = 0. \quad (4)$$

Характеристическое уравнение для (4) имеет вид

$$(k^2 + Rk - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} - S)(k^2 + Rk - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} + S) = 0,$$

где $S = \sqrt{\frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2}{4} - \frac{R^2\xi^2}{3}}$. Его решениями являются

$$k_1 = -\frac{R}{2} - \sqrt{\frac{R^2}{4} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} + S}, \quad k_2 = -\frac{R}{2} - \sqrt{\frac{R^2}{4} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} - S},$$

$$k_3 = -\frac{R}{2} + \sqrt{\frac{R^2}{4} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} + S}, \quad k_4 = -\frac{R}{2} + \sqrt{\frac{R^2}{4} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} - S}.$$

Так как плотность и упругие модули экспоненциально растут на бесконечности, то краевые условия в (2) следует дополнить требованием конечности потока энергии [2, 8], которое справедливо только для k_1 и k_2 . Подставляя (3) в краевые условия, получаем

$$\dot{F} + R\dot{F} - (2\alpha^2 + \frac{\beta^2}{3})\dot{F} + \frac{1}{3}R\xi^2 F = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{3}\ddot{F} + \alpha^2 F = 0$$

при $z=0$. С учетом того, что

$$k_1^2 + Rk_1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} - S = 0,$$

$$k_2^2 + Rk_2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} + S = 0,$$

запишем дисперсионное уравнение, эквивалентное линейной зависимости (5) при $F = \exp(k_1 z)$ и $F = \exp(k_2 z)$:

$$\begin{vmatrix} \left(-\frac{3}{2}\alpha^2 + \frac{1}{6}\beta^2 + S\right)k_1 + \frac{1}{3}R\xi^2 & \left(-\frac{3}{2}\alpha^2 + \frac{1}{6}\beta^2 - S\right)k_2 + \frac{1}{3}R\xi^2 \\ -Rk_1 + \frac{7\alpha^2 + \beta^2}{2} + S & -Rk_2 + \frac{7\alpha^2 + \beta^2}{2} - S \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Часть корней уравнения (6) появляется при линейной зависимости выражений (3). Эти корни не связаны с существованием рэлеевских мод и должны быть исключены, поскольку рэлеевские моды — это линейные комбинации линейно независимых решений задачи (1) или (2). Так как решения (3) линейно зависимы при

$$\begin{vmatrix} \frac{-5\alpha^2 + \beta^2}{2} + S & \frac{-5\alpha^2 + \beta^2}{2} - S \\ (2k_1 + R)\xi & (2k_2 + R)\xi \end{vmatrix} = 0, \quad (7)$$

то мы должны найти корни уравнения (6), не совпадающие с корнями уравнения (7).

Формулировка задачи в безразмерных величинах

Введем величины

$$x = \frac{S}{R^2}, \quad t = \frac{\omega^2}{R^2 b^2}, \quad \zeta = \frac{\xi}{R}. \quad (8)$$

Задача (6), (7) сводится к нахождению корней x_i уравнения

$$\begin{vmatrix} S_+ + T_+ \sqrt{W_+} & S_- + T_- \sqrt{W_-} \\ U_+ + \sqrt{W_+} & U_- + \sqrt{W_-} \end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

которые не совпадают с корнями

$$\begin{vmatrix} \zeta \sqrt{W_+} & \zeta \sqrt{W_-} \\ P_+ & P_- \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

Здесь

$$S_{\pm} = \frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{6}t - 3x^2 \mp \frac{1}{2}x = -3\left(x \pm \frac{t}{3}\right)\left(x \mp \frac{t}{3} \pm \frac{1}{6}\right),$$

$$\begin{aligned}
T_{\pm} &= \frac{4}{9}t^2 - \frac{1}{3}t - 4x^2 \mp x = -4(x \pm \frac{t}{3})(x \mp \frac{t}{3} \pm \frac{1}{4}), \\
U_{\pm} &= \frac{4}{3}t^2 - \frac{5}{3}t - 12x^2 \pm x + \frac{1}{2} = -12(x \mp \frac{t}{3} \pm \frac{1}{6})(x \pm \frac{t}{3} \mp \frac{1}{4}), \\
W_{\pm} &= \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{3}t - 3x^2 \pm x + \frac{1}{4} = -3(x \mp \frac{t}{3} \pm \frac{1}{6})(x \pm \frac{t}{3} \mp \frac{1}{2}), \\
P_{\pm} &= -\frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{3}t + 6x^2 \pm x = -2S_{\pm}, \\
\zeta^2 &= \frac{1}{3}t^2 - 3x^2.
\end{aligned} \tag{11}$$

Уравнение (10) приводит либо к $\zeta = \xi/R = 0$ либо к

$$-4x(x - \frac{t}{3} + \frac{1}{6})(x + \frac{t}{3} - \frac{1}{6})(36x^2 - 4t^2 + 3t) = 0. \tag{12}$$

Сведение дисперсионного уравнения к полиному

Перепишем (9) в виде

$$(S_{+}U_{-} - S_{-}U_{+}) + (T_{+}U_{-} - S_{-})\sqrt{W_{+}} - (T_{-}U_{+} - S_{+})\sqrt{W_{-}} + (T_{+} - T_{-})\sqrt{W_{+}W_{-}} = 0. \tag{13}$$

Будем избавляться от квадратных корней в уравнении (13) следующим традиционным способом: сначала запишем его в виде $f_1\sqrt{W_{+}} = f_2$, возведем в квадрат, перегруппируем члены в полученном выражении, представив его в виде $g_1\sqrt{W_{-}} = g_2$, и снова возведем в квадрат. Множество корней получившегося уравнения является объединением корней уравнения (13), для которых $\operatorname{Re}\sqrt{W_{+}} > 0$ и $\operatorname{Re}\sqrt{W_{-}} > 0$, и корней трех других уравнений, отличающихся от (13) тем, что либо $\operatorname{Re}\sqrt{W_{+}} \leq 0$, либо $\operatorname{Re}\sqrt{W_{-}} \leq 0$, либо вещественные части $\sqrt{W_{+}}$ и $\sqrt{W_{-}}$ неположительны одновременно. Иными словами, корни этого уравнения объединяют корни на всех четырех листах поверхности Римана, связанной с (13).

Коэффициенты в (13) имеют вид

$$\begin{aligned}
S_{+}U_{-} - S_{-}U_{+} &= 18x(x + \frac{t}{3} - \frac{1}{6})(x - \frac{t}{3} + \frac{1}{6}), \\
T_{\pm}U_{\mp} - S_{\mp} &= 3(x \pm \frac{t}{3} \mp \frac{1}{6})(16x^3 \pm 8x^2 \mp \frac{16}{3}x^2t + 2x - \frac{16}{9}xt^2 \mp \frac{8}{9}t^2 \pm \frac{16}{27}t^3), \\
T_{+} - T_{-} &= -2x.
\end{aligned} \tag{14}$$

Перепишем (13) в форме

$$[(T_{+}U_{-} - S_{-}) + (T_{+} - T_{-})\sqrt{W_{-}}]\sqrt{W_{+}} = -(S_{+}U_{-} - S_{-}U_{+}) + (T_{-}U_{+} - S_{+})\sqrt{W_{-}} \tag{15}$$

и возведем (15) в квадрат:

$$[-2(S_{+}U_{-} - S_{-}U_{+})(T_{-}U_{+} - S_{+}) - 2(T_{+}U_{-} - S_{-})(T_{+} - T_{-})W_{+}]\sqrt{W_{-}} =$$

$$= (T_+ U_- - S_-)^2 W_+ - (T_- U_+ - S_+)^2 W_- + (T_+ - T_-)^2 W_+ W_- - (S_+ U_- - S_- U_+)^2. \quad (16)$$

Подставляя (14) в (16) и факторизуя обе части уравнения с помощью пакета "Mathematica", получим

$$\begin{aligned} & 2x(x + \frac{t}{3} - \frac{1}{6})(x - \frac{t}{3} + \frac{1}{6})(36x^2 - 4t^2 + 3t) \times \\ & \quad \times (36x^2 - 9x - 4t^2 + 6t)\sqrt{W_-} = \\ & = \frac{1}{81}x(x + \frac{t}{3} - \frac{1}{6})(x - \frac{t}{3} + \frac{1}{6})(36x^2 - 4t^2 + 3t) \times \\ & \quad \times (1296x^4 - 486x^2 + 648x^2 t - 288x^2 t^2 + 81x - 54t + 108t^2 - 72t^3 + 16t^4). \end{aligned} \quad (17)$$

С учетом (12) сокращаем сомножитель

$$x(x + \frac{t}{3} - \frac{1}{6})(x - \frac{t}{3} + \frac{1}{6})(36x^2 - 4t^2 + 3t)$$

и возводим в квадрат получившееся уравнение:

$$\begin{aligned} & 768x^8 - 768t(\frac{4}{9}t - 1)x^6 + (\frac{512}{9}t^4 - 256t^3 + 256t^2 - 32t)x^4 + \\ & \quad + (-\frac{1024}{243}t^6 + \frac{256}{9}t^5 - \frac{512}{9}t^4 + \frac{352}{9}t^3 - 4t^2)x^2 + \\ & \quad + \frac{4}{3}t^2(-\frac{64}{729}t^6 - \frac{64}{81}t^5 + \frac{64}{27}t^4 - \frac{80}{27}t^3 + \frac{4}{3}t^2) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Если положить

$$y = x^2 - s^2, \quad t = 3s, \quad (19)$$

то (18) переходит в

$$y^4 + 3sy^3 + 3s(s - \frac{1}{24})y^2 + \frac{9}{8}s^2(s - \frac{1}{24})y + \frac{9}{64}s^4 = 0. \quad (20)$$

Та же подстановка (19) дает вместо выражения (11)

$$\begin{aligned} S_{\pm} &= -3y - \frac{1}{2}s \mp \frac{1}{2}x, \\ T_{\pm} &= -4y - s \mp x, \\ U_{\pm} &= -12y - 5s \pm x + \frac{1}{2}, \\ W_{\pm} &= -3y - 2s \pm x + \frac{1}{4}, \\ \zeta^2 &= -3y. \end{aligned} \quad (21)$$

Рассмотрим теперь уравнение (9) на следующих листах поверхности Римана:

- а) физический лист $(++)$, определенный условием $\operatorname{Re}\sqrt{W_+} > 0$, $\operatorname{Re}\sqrt{W_-} > 0$;
- б) лист $(+-)$, для которого $\operatorname{Re}\sqrt{W_+} > 0$, $\operatorname{Re}\sqrt{W_-} \leq 0$;

в) лист $(-+)$, для которого $\operatorname{Re}\sqrt{W_+} \leq 0$, $\operatorname{Re}\sqrt{W_-} > 0$;

г) лист $(--)$, для которого $\operatorname{Re}\sqrt{W_+} \leq 0$, $\operatorname{Re}\sqrt{W_-} \leq 0$.

Корни уравнения (20) содержат корни уравнения (9) на всех листах поверхности Римана. В то же время дисперсия волн Рэлея описывается только корнями, принадлежащими физическому листу. Рассмотрим принадлежность корней различным листам.

Исследование дисперсии

Положим

$$y = sv, \quad (22)$$

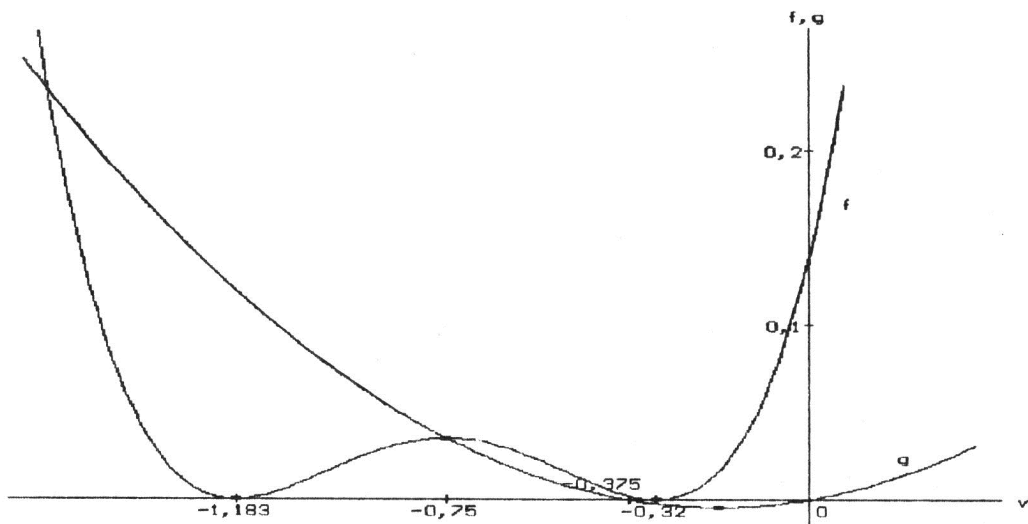
тогда (20) переходит в

$$\left(v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{1}{8} \frac{v}{s} \left(v + \frac{3}{8}\right) = 0. \quad (23)$$

Обозначим

$$f(v) = \left(v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8}\right)^2, \quad g(v) = \frac{1}{8}v\left(v + \frac{3}{8}\right)$$

и рассмотрим рис.1, из которого очевидно, что для отрицательных v всегда существуют два корня уравнения (23). Для положительных v два корня существуют лишь для достаточно малых значений s , т.е. при низких частотах. При высоких частотах уравнение (23) имеет два вещественных и два комплексных корня.



Р и с. 1. Функции $f(v) = \left(v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8}\right)^2$ и $g(v) = \frac{1}{8}v\left(v + \frac{3}{8}\right)$, связанные дисперсионным соотношением $f(v) = s^{-1}g(v)$.

Как видно из рис.1, $v = -\frac{3-\sqrt{3}}{4}$ не является корнем (23) ни при каком конечном s , но это значение становится корнем в пределе при $s \rightarrow \infty$, когда $\frac{1}{s}g(v) = 0$. С другой стороны, из (8), (19), (21) и (22) следует, что

$$\frac{\xi^2}{\omega^2} = \frac{\zeta^2}{tb^2} = -\frac{y}{sb^2} = -\frac{v}{b^2}. \quad (24)$$

Подобные случаи, когда волны Рэля не являются пределом последовательности аналогичных волн, а возникают внезапно при предельном значении параметра, описываются, например, в [9.С.223]. Точка $v = -\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ соответствует скорости волны Рэля в однородном пространстве [10.С.323] с той же скоростью поперечных волн и $\lambda = \mu$.

Перейдем к исследованию поведения корней дисперсионного уравнения, удовлетворяющих (23). Выражая s из (23), получим

$$s = \frac{v(v + \frac{3}{8})}{8(v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8})^2}, \quad (25)$$

а из (19) и (25) находим

$$x^2 = y + s^2 = \frac{v^2(v + \frac{1}{2})^3(v + \frac{3}{2})(v + \frac{3}{8})}{(v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8})^2}.$$

Отсюда

$$x = \frac{|v(v + \frac{1}{2})|}{4(v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8})^2} \sqrt{2(v + \frac{1}{2})(v + \frac{3}{2})(v + \frac{3}{8})}. \quad (26)$$

Обозначая

$$\varphi = \sqrt{2(v + \frac{1}{2})(v + \frac{3}{2})(v + \frac{3}{8})}, \quad (27)$$

получаем из (21)

$$\begin{aligned} w_{\pm} &= \frac{v + \frac{1}{2}}{4(v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8})^2} [v^3 + v^2 + \frac{15}{16}v + \frac{9}{32} \pm |v|\varphi \text{sign}(v + \frac{1}{2})] = \\ &= \frac{(\frac{9}{2} \pm |v(v + \frac{1}{2})|)^2}{(v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8})^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Следовательно,

$$w_+ w_- = \left[\frac{(v + \frac{1}{2})(v^3 - \frac{15}{16}v - \frac{9}{32})}{4(v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8})^2} \right]^2. \quad (29)$$

Подставляя (21), (28) и (29) в (13), находим

$$\begin{aligned}
 & [6(1+3v)s - \frac{1}{2}]x - \frac{|(v + \frac{1}{2})(v^3 - \frac{15}{16}v - \frac{9}{32})|}{2(v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8})^2} x + \\
 & + \frac{||v(v + \frac{1}{2})| + \frac{\phi}{2}|}{2|v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8}|} [2(24v^2+16v+3)s^2 + 2(8v+3)sx + 2sv - x] - \\
 & - \frac{||v(v + \frac{1}{2})| - \frac{\phi}{2}|}{2|v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8}|} [2(24v^2+16v+3)s^2 - 2(8v+3)sx + 2sv + x] = 0. \quad (30)
 \end{aligned}$$

У т в е р ж д е н и е. Пусть все выражения под знаком модуля в (30) положительны, за исключением $v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8}$, которое отрицательно. Тогда уравнение (30) является тождеством на физическом листе поверхности Римана.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если

$$v(v + \frac{1}{2}) + \frac{\phi}{2} > 0,$$

$$v(v + \frac{1}{2}) - \frac{\phi}{2} > 0,$$

$$v(v + \frac{1}{2}) > 0,$$

(31)

$$(v + \frac{1}{2})(v^3 - \frac{15}{16}v - \frac{9}{32}) > 0,$$

$$v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8} < 0,$$

то (30) имеет вид

$$\begin{aligned}
 & [6(1+3v)s - \frac{1}{2}]x - \frac{(v + \frac{1}{2})(v^3 - \frac{15}{16}v - \frac{9}{32})}{2(v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8})^2} x - \\
 & - \frac{v(v + \frac{1}{2}) + \frac{\phi}{2}}{2(v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8})} [2(24v^2+16v+3)s^2 + 2(8v+3)sx + 2sv - x] + \\
 & + \frac{v(v + \frac{1}{2}) - \frac{\phi}{2}}{2(v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8})} [2(24v^2+16v+3)s^2 - 2(8v+3)sx + 2sv + x] = 0. \quad (32)
 \end{aligned}$$

С учетом (25) и (26) преобразуем два первых члена уравнения (32):

$$\begin{aligned}
 & \left[6(1+3v)s - \frac{1}{2}x - \frac{(v + \frac{1}{2})(v^3 - \frac{15}{16}v - \frac{9}{32})}{2(v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8})^2} x \right] = \\
 & = \frac{x}{32(v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8})^2} \left[(576v^5 + 1920v^4 + 2304v^3 + 1224v^2 + 297v + 27)s - \right. \\
 & \left. - (32v^3 + 56v^2 + 33v + 6)v \right] = - \frac{v^2(v + \frac{1}{2})(v + \frac{1}{4})(v^2 - \frac{3}{4}v - \frac{3}{8})}{4(v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8})^4} \varphi.
 \end{aligned}$$

Из двух последних членов (32) находим

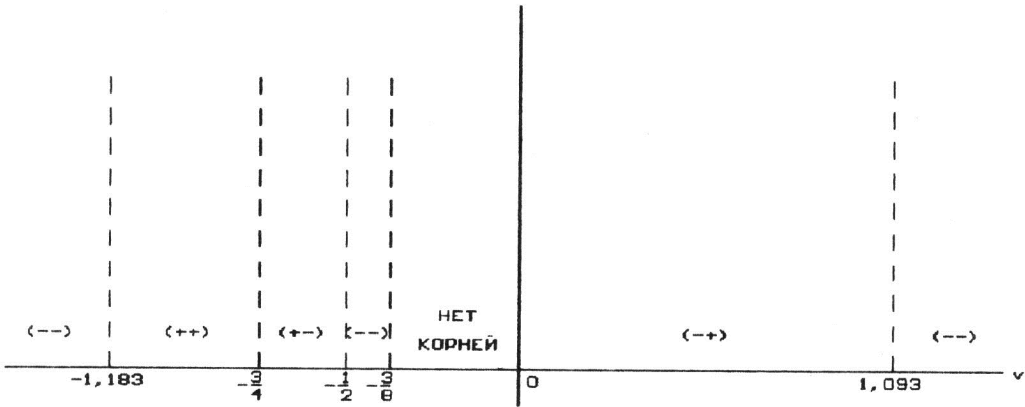
$$\begin{aligned}
 & - \frac{v(v + \frac{1}{2}) + \frac{\varphi}{2}}{2(v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8})} [2(24v^2 + 16v + 3)s^2 + 2(8v + 3)sx + 2sv - x] + \\
 & + \frac{v(v + \frac{1}{2}) - \frac{\varphi}{2}}{2(v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8})} [2(24v^2 + 16v + 3)s^2 - 2(8v + 3)sx + 2sv + x] = \\
 & = - \frac{1}{2(v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8})} \left[2(24v^2 + 16v + 3)\varphi s^2 - 2(16v^2 + 14v + 3)sx + \right. \\
 & \left. + 2\varphi sv - (2v + 1)vx \right] = \frac{v^2(v + \frac{1}{2})(v + \frac{1}{4})(v^2 - \frac{3}{4}v - \frac{3}{8})}{4(v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8})^4} \varphi.
 \end{aligned}$$

Из (31) следует, что уравнение (32) обращается в тождество при $v \in (-\frac{3+\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4})$. Таким образом, корень остается на физическом листе при $v \in (-\frac{3+\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4})$, причем при $v \rightarrow -\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ частота растет.

Аналогичные рассуждения позволяют установить следующее соответствие между интервалами изменения v и остальными листами поверхности Римана:

$$\begin{aligned}
 & [-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}) \iff (+-), \\
 & (0, \frac{3+\sqrt{33}}{8}) \iff (-+), \\
 & (-\infty, -\frac{3+\sqrt{3}}{4}] \cup [-\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}] \cup [\frac{3+\sqrt{33}}{8}, +\infty) \iff (--).
 \end{aligned}$$

Это соответствие представлено на рис.2, где указаны следующие критические точки: $v = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{3+\sqrt{33}}{8} \cong 1,093$, при которых W_+ или W_- из (28) обращаются в 0; $v = -\frac{3}{8}$, при котором ϕ обращается в 0 по формуле (27); $v = -\frac{3+\sqrt{3}}{4} \cong -1,183$ - корень $v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8} = 0$.



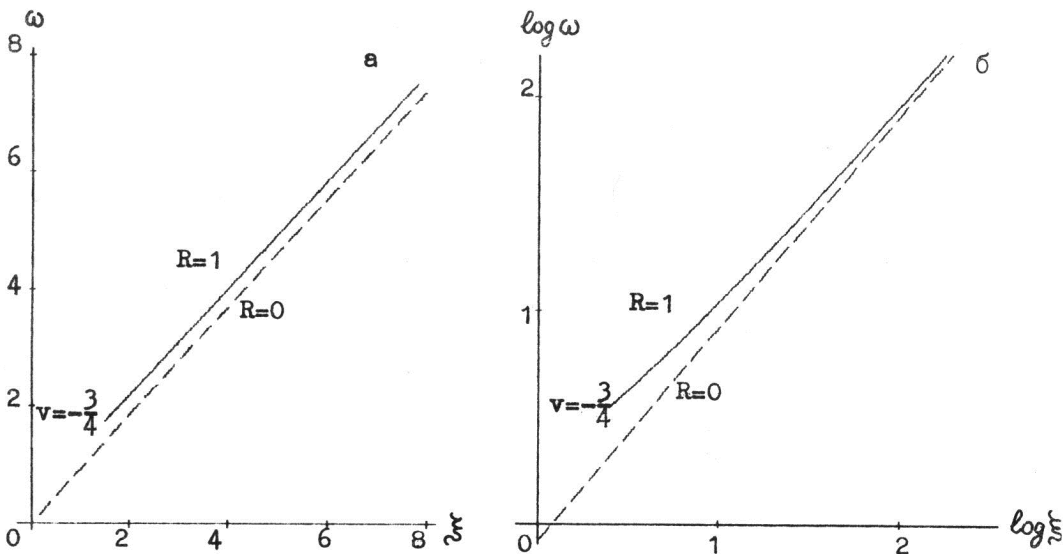
Р и с. 2. Соответствие между интервалами изменения v и принадлежностью корней дисперсионного уравнения различным листам поверхности Римана

Наконец, можно проверить, что комплексные корни, возникающие при слиянии вещественных корней на листе $(-+)$, когда s возрастает, остаются на этом листе при дальнейшем росте s . Нам известно только вычислительное доказательство этого факта. Однако во всех известных нам примерах дисперсионных соотношений для волн Рэлея переход корней с листа на другой лист поверхности Римана происходит либо через точку ветвления, либо через бесконечность. Скорее всего, возможен и переход через нуль. Доказательство этого свойства сделало бы исследование логически завершенным. Отметим также, что в силу (24) существуют чисто мнимые волновые числа ξ при вещественных положительных v .

Итак, дисперсионная кривая (рис.3,а,б) параметрически задается соотношениями

$$\frac{\omega^2}{R^2 b^2} = t = 3s = \frac{3v(v + \frac{3}{8})}{8(v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8})^2}, \quad (33)$$

$$\frac{\xi^2}{R^2} = \zeta^2 = -3vs = -\frac{3v^2(v + \frac{3}{8})}{8(v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8})^2},$$



Р и с. 3. Дисперсионная кривая для среды Зволинского с $\lambda=\mu$, $R=b=1$ и $\nu \in (-\frac{3+\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4})$ (сплошная линия) и зависимость $\omega=2\xi/\sqrt{3+\sqrt{3}}$ для однородного полупространства с $\lambda=\mu=\mu_0$, $\rho=\rho_0$, $R=0$, $b=1$ (пунктир) в обычном (а) и двойном логарифмическом (б) масштабе

причем левые части (33) увеличиваются по мере того, как ν изменяется от $-\frac{3}{4}$ до $-\frac{3+\sqrt{3}}{4}$. При $\nu=-\frac{3}{4}$ имеем $t=3$, $\zeta=\frac{3}{2}$. Отсюда следует, что критическая частота, выше которой в данной среде появляется основная мода Рэлея,

$$\Omega_1 = Rb\sqrt{t} \cong 1,732 Rb.$$

Отметим, что для произвольного $\xi=\xi_0$ и $\delta>0$ всегда найдется такое $R = R_0$, что для всех $R \leq R_0$ значение любого $\xi>\xi_0$ соответствует $\nu \in (-\frac{3+\sqrt{3}}{4}, -\frac{3+\sqrt{3}}{4} + \delta)$. В этом смысле при $R \rightarrow 0$ дисперсионная кривая стремится к прямой

$$\omega = \frac{2b\xi}{\sqrt{3+\sqrt{3}}},$$

соответствующей однородному полупространству с $\lambda=\mu=\mu_0$ и $\rho=\rho_0$.

Дополнительное ограничение

При обсуждении этой работы В.Е.Федоров обратил наше внимание на то, что часть рассмотренных мод Рэлея связана с бесконечным ростом напряжений при увеличении глубины, хотя поток энергии конечен. Столкнувшись с аналогичной проблемой, Зволинский сузил лист (++) так, чтобы исключить эту часть решений. Мы сделаем то же самое, а затем обсудим другие возможности.

Для того, чтобы напряжения стремились к нулю при $z \rightarrow \infty$, нужно, чтобы для W_{\pm} из (28) на физическом листе выполнялось неравенство

$$\sqrt{W_{\pm}} > \frac{1}{2}. \quad (34)$$

Это условие должно выполняться при $v \in (-\frac{3+\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4})$. Так как для этого интервала справедливы неравенства (31) и условие $\phi > 0$, то (34) эквивалентно неравенству

$$v(v + \frac{1}{2}) - \frac{\phi}{2} > -(v^2 + \frac{3}{2}v + \frac{3}{8}),$$

которое верно для $v \in (-\frac{3+\sqrt{3}}{4}, -0,941)$. Значение $v = -0,941$ соответствует величинам $t=8,765$, $\zeta=1,695$. Таким образом, требование конечности напряжений приводит к существованию волн Рэлея при частотах, превышающих

$$\Omega_2 \cong \sqrt{8,765} Rb \cong 2,961 Rb,$$

а дисперсионная кривая определяется параметрическими уравнениями (33) для v , убывающего от $-0,941$ до $-\frac{3+\sqrt{3}}{4}$.

Хотя такое сужение допустимых решений логично с формальной точки зрения, возможность создания слабым поверхностным источником больших напряжений на глубине представляется неестественной. По-видимому, причины, лежащие за рамками теории идеально упругих сред, приводят к более сильному, чем следует из этой теории, затуханию колебаний, проникающих во все более плотные и жесткие слои. Одной из таких причин может быть упругий гистерезис [8.С.130]. Во всяком случае, это лишь гипотетическое допущение. Лучшим выходом, с нашей точки зрения, была бы экспериментальная проверка выводов этого исследования относительно интервала частот, в котором интенсивные волны Рэлея существуют в средах Зволинского.

Обсуждение

Рассмотренная математическая модель, очевидно, является крайне упрощенной, но она может оказаться полезной для объяснения особенностей распространения поверхностных волн Рэлея вблизи свободной поверхности. Ясно также, что не следует применять не задумываясь стандартную теорию распространения поверхностных волн для моделей с упругими параметрами, непрерывно и значительно возрастающими с глубиной на расстоянии порядка длины волны. Наиболее интересным результатом представляется определение нижней частотной границы распространения волн Рэлея. Этот результат может быть пояснен сле-

дующим довольно правдоподобным примером. Предположим, что скорость поперечных волн в среде $b = 1000$ м/с, а модуль сдвига и плотность возрастают в e раз на расстоянии порядка 1000 м по сравнению с их значениями на поверхности и остаются постоянными в полупространстве, подстилающем экспоненциальный слой. Тогда граничная частота, найденная с учетом конечности напряжений, $f_2 = \Omega_2/2\pi \approx 0,5$ Гц, в то время как частота, соответствующая волне Рэлея, распространяющейся в основном в подстилающем однородном полупространстве, $f_0 \approx 0,25$ Гц. Мы предполагаем, что на практике в этом случае сигналы от волн Рэлея в интервале частот от f_0 до f_2 будут существенно ослаблены. Это будет происходить не вследствие поглощения, а из-за своеобразного индуктивного эффекта.

Литература

1. Мангнани М.Х., Шлангер С.О., Милхолланд Ф.Д. Упругие свойства пелагических карбонатных осадков в зависимости от глубины их залегания, содержания стронция, возраста и стадии диагенеза // Акустика дна океана: Пер. с англ./ Под ред. У.Купермана, Ф.Ен-сена. М.: Мир, 1984. С.36-45.
2. Маркушевич В.М., Цемахман А.С. D-постоянные среды и рэлеевские волны в них на характерных частотах. I. Пуассоновы среды // Современные методы интерпретации сейсмологических данных. М.: Наука, 1991. С.149-157. (Вычисл. сейсмология: Вып. 24).
3. Маркушевич В.М., Стеблов Г.М., Цемахман А.С. D-постоянные среды и рэлеевские волны в них на характерных частотах. II. Не-пуассоновы среды // Современные методы интерпретации сейсмологических данных. М.: Наука, 1991. С.158-171. (Вычисл. сейсмология: Вып. 24).
4. Зволинский Н.В. Волны Рэлея в неоднородном упругом полупространстве частного типа // Изв. АН СССР, Сер. геогр. и геофиз. М.: Изд-во АН СССР, 1945. Т. IX, N 3. С.261-278.
5. Петрашень Г.И. Основы математической теории распространения упругих волн // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. XVIII. Л.: Наука, 1978. С.3-248.
6. Wolfram S. Mathematica. A system for doing mathematics by computer. N.Y.: Addison-Wesley, 1988. 747 p.
7. Keilis-Borok V.I., Neigauz M.G., Shkadinskaya G.V. Application of the theory of eigenfunctions to the calculations of surface wave velocities // Rev. Geophys. 1965. Vol.1, N1. P.105-109.
8. Зильберглейт А.С., Копилевич Ю.И. Спектральная теория регулярных волноводов. Л.: ЛФТИ АН СССР, 1983. 301 с.
9. Cagniard L. Reflection and refraction of progressive seismic waves. N.Y.: Mc.Graw-Hill, 1962. 282 p.
10. Ляв А. Математическая теория упругости. М.;Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 674 с.