

4. *Matsu'ura R.S.* Precursory quiescence and recovery of aftershock activities before some large aftershocks // *Bull. Earthq. Res. Inst., University of Tokyo*, 1986. Vol. 61. P. 1–65.
5. *Kagan Y.Y., Knopoff L.* Stochastic synthesis of earthquake catalogs // *J. Geophys. Res.*, 1981. Vol. 86, N B4. P. 2853–2862.
6. *Latoussakis J., Stavrakakis G., Drakopoulos J.*, et al. Temporal characteristics of some earthquake sequence in Greece // *Tectonophysics*, 1991. Vol. 193, N4. P. 299–310.
7. *Кокс Д., Льюис П.* Статистический анализ последовательностей событий. М.: Мир, 1969. 312 с.
8. *Пиеничный Б.Н., Данилин Ю.М.* Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1975. 320 с.
9. *Global Hypocenters Data Base, CD-ROM*, 1989, NEIC-USGS; 1989–90, HDS NEIC, USGS, Golden Co, USA.

УДК 550.348+550.343.6

НИЗКОЧАСТОТНАЯ АСИМПТОТИКА СПЕКТРА КАК ХАРАКТЕРИСТИКА НЕСТАЦИОНАРНОСТИ НЕКОТОРЫХ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

В.Б. Лысенко, В.Ф. Писаренко

LOW-FREQUENCY SPECTRUM ASYMPTOTICS AS A MEASURE OF NONSTATIONARITY OF SOME GEOPHYSICAL PROCESSES

V.B.Lysenko and V.F. Pisarenko

A method of statistical estimation of power α of low-frequency spectrum asymptotics $f(\lambda) \sim c/\lambda^\alpha$ for Gaussian and point processes is presented. The method is applied to several geophysical processes: Earth's nutation, atmospheric pressure and regional siesmicity.

ВВЕДЕНИЕ

Ответ на вопрос – можно ли считать данный геофизический процесс стационарным случайным процессом, то есть таким, у которого характеристики не изменяются со временем – имеет большое значение как для теории, так и для практики. Поскольку все существование нашей планеты исчисляется некоторым конечным промежутком времени, строго говоря, не существует стационарных геофизических процессов. Часто для экспериментальной проверки стационарности геофизик располагает лишь реализацией процесса, имеющей ограниченную длительность. По такой реализации вообще нельзя делать категорического заключения о стационарности или нестационарности процесса. Как бы “нестационарно” ни выглядела реализация, всегда можно придумать стационарный процесс, для которого она оказалась бы типичной.

Таким образом, для многих практических ситуаций естественней ставить вопрос не о проверке гипотезы стационарности процесса, а о сравнительной интенсивности его низкочастотных компонент. Эти компоненты можно моделировать двумя основными способами: либо в виде низкочастотных трендов (т.е. известных функций, которые умножаются на коэффициенты, оцениваемые по реализации), либо в виде случайного процесса с возрастающим в нуле спектром. Оба способа являются в некотором смысле противоположными: один из них моделирует низкочастотные компоненты неэргодическим процессом, а другой – случайным, эргодическим. На самом деле, эта противоположность не столь уж существенна для приложений: по одной реализации практически невозможно различить полиномиальный или полигармонический тренд на фоне шума и низкочастотный случайный эргодический процесс. Гораздо важнее уметь сравнивать у разных процессов относительную интенсивность низкочастотных компонент, не вдаваясь в их природу.

Для этого мы предлагаем аппроксимировать спектр низкочастотной части наблюдаемого процесса функцией вида

$$f(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda^\alpha}, \lambda \rightarrow 0. \quad (1)$$

При этом метод аппроксимации выбирается так, как его следовало бы выбрать для случайного процесса со спектральной плотностью (1). Если $\alpha \geq 1$, то спектральная плотность понимается в обобщенном смысле, как плотность процесса со стационарными приращениями некоторого порядка [1, 2]. Показатель α в (1) можно рассматривать, как количественную характеристику “нестационарности” процесса: чем больше α , тем более “низкочастотным и нестационарным” можно назвать процесс.

Спектральные плотности, имеющие в нуле асимптотику (1), охватывают довольно широкий класс процессов. Это, прежде всего, упомянутые выше процессы со стационарными приращениями (например, многократные неопределенные интегралы от стационарных процессов). Затем, получившие широкое распространение в связи с изучением нелинейных динамических систем и фрактальных самоподобных явлений, так называемые $1/f$ -процессы или фликкер-шум (здесь f – частота в герцах, $f = 2\pi\lambda$) [3, 4]. И, наконец, довольно давно известный математикам и входящий в настоящее время в моду, класс дробных броуновских процессов [5, 6]. В физике процессы со спектром типа (1) относят к так называемым процессам с “дальним порядком” (long-range dependence), у которых корреляционная функция убывает не экспоненциально, а лишь как некоторая степень аргумента, что и обеспечивает степенной рост спектра в нуле.

Для гауссовских процессов и для точечных процессов пуассоновского типа [7, 8], имеющих в нуле спектр типа (1), мы приводим оценку максимального правдоподобия (ОМП) $\hat{\alpha}$ для параметра α (точнее, уравнения для ее численного нахождения) и ее асимптотическое стандартное отклонение (п. 1 и п. 1).

В принципе низкочастотная асимптотика спектра какого-либо процесса может вести себя самым произвольным образом. Низкочастотные амплитуды периодограммы (какова бы ни была их природа) могут быть любыми, и трудно ожидать, что простая степенная асимптотика (1) даст удовлетворительную аппроксимацию спектра во всех случаях. Однако, для наиболее естественных случаев монотонной асимптотики в нуле, степенной спектр (1) дает, по-видимому, достаточно богатое семейство для аппроксимации реальных спектров.

Для того, чтобы судить о качестве аппроксимации наблюдаемого низкочастотного спектра степенной функцией (1), предлагается статистика S , характеризующая количественно эту аппроксимацию. Если она превосходит установленный порог – аппроксимация неудовлетворительна, и предложенную нами методику оценки степени нестационарности процесса применять нельзя – нужны другие подходы. Порог для статистики S выбран так, что он в восемь раз превосходит стандартное отклонение S при нулевой гипотезе, т.е. когда процесс действительно является гауссовским (либо пуассоновским) и имеет асимптотику (1). Таким образом, мы расширяем класс процессов, для которых аппроксимация считается удовлетворительной; он может включать и процессы с низкочастотным трендом, если значения периодограммы этого тренда не слишком сильно отклоняются от асимптотики (1).

Когда аппроксимация удовлетворительна и процесс относится к вышеупомянутым гауссовскому либо пуассоновскому классам с асимптотикой (1), оценка максимального правдоподобия $\hat{\alpha}$ является статистической оценкой параметра α , обладающей известными оптимальными свойствами. В тех же случаях, когда аппроксимация удовлетворительна, но низкочастотные компоненты процесса обусловлены трендом, оценку $\hat{\alpha}$ можно интерпретировать как оценку параметра степенной аппроксимации. Стандартное отклонение этой оценки уже не имеет точного статистического смысла,

Регион	Интервал времени, годы	Представительный класс	Координаты	
			φ, N , град	λ, E , град
Р-н Джавахетского нагорья	1962–1983	8	40.83–41.75	43.63–44.12
Р-н Гарма	1955–1979	9	37.28–40.00	68.00–72.00
Камчатка	1962–1983	10	47.63–60.38	169.89w–169.96
Япония	1931–1988	12	30.00–49.00	127.50–154.00
Ю. Калифорния	1932–1989	10	30.00–39.00	122.22w–111.58w

но, тем не менее, это отклонение характеризует хотя бы приближенно точность степенной аппроксимации тренда.

Выбор интервала, на котором производится аппроксимация в рассматриваемой задаче довольно существенен. Здесь трудно дать единое для всех случаев формальное правило выбора такого интервала. Единственное, что можно сказать при его выборе – он должен быть одним и тем же для сравниваемых процессов.

Изложенный подход мы иллюстрируем, используя искусственные модели и реальные геофизические процессы: нутацию земной оси и атмосферного давления и нестационарность потока землетрясений в нескольких регионах. Сведения о землетрясениях получены из региональных каталогов землетрясений банка данных МИТП РАН и приведены в табл. 1.

1. ГАУССОВСКИЙ ПРОЦЕСС

Будем считать, что высокочастотные компоненты исследуемого процесса $x(t)$ предварительно отфильтрованы и Фурье-преобразование реализации процесса принимает наибольшие значения на низких частотах. Именно с такой ситуацией приходится иметь дело, когда встает вопрос о нестационарности $x(t)$.

Пусть $x(t)$ – гауссовский процесс с дискретным временем $t = k\Delta t$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и со стационарными приращениями n -го порядка [1, 2]. Предположим, что у этого процесса существует обобщенная спектральная плотность, которая при малых λ ведет себя степенным образом:

$$f(\lambda) \cong \frac{c}{\lambda^\alpha}, \quad \lambda \rightarrow 0, \quad -1 \leq \alpha - 2n < 1, \quad (2)$$

где c , λ , n – некоторые неизвестные параметры; n – целое число. Нужно оценить параметр α по конечной реализации процесса $x(t)$, $t = 1, 2, \dots, N$.

Допустим сначала, что n известно. Тогда можно от процесса $x(t)$ перейти с помощью n -ых разностей к обычному стационарному процессу $y(t)$:

$$y(t) = \sum_{j=0}^n x(t + j\Delta t)(-1)^j C_n^j, \quad t = 1, 2, \dots, N - n.$$

Процессу $y(t)$ будет соответствовать спектральная плотность

$$\varphi(\lambda) = \left| \sum_{j=0}^n \exp(ij\Delta t\lambda)(-1)^j C_n^j \right|^2 f(\lambda), \quad |\lambda| \leq \frac{\pi}{\Delta t},$$

которая уже интегрируема в нуле, причем

$$\varphi(\lambda) \cong \frac{c(\Delta t)^{2n}}{\lambda^{\alpha-2n}}, \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (3)$$

Вне окрестности нулевой частоты спектральные плотности $f(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ могут вести себя произвольным образом, однако нас интересует поведение $f(\lambda)$, $\varphi(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$, так как именно оно связано с возможной нестационарностью процесса. Поскольку нам не известно точное значение граничной частоты λ_0 , ниже которой справедливы асимптотики (2), (3), будем предполагать, что спектральная плотность $\varphi(\lambda)$ процесса $y(t)$ имеет вид

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} \frac{c}{\lambda^\beta}, & 0 < \lambda \leq \lambda_0, \\ \frac{c}{\lambda_0^\beta}, & \lambda_0 < \lambda \leq \frac{\pi}{\Delta t}, \end{cases} \quad (4)$$

где $\beta = \alpha - 2n$; λ_0 – неизвестный параметр.

Для реализации $y(t)$, $t = 1, \dots, N - n$, выпишем асимптотическое выражение для правдоподобия [9]:

$$L(y_1, \dots, y_{N-n} | \beta; c; \lambda_0) \cong \left(\frac{2\pi}{\Delta t} v \right)^{-(N-n)/2} \exp \left\{ -\frac{(N-n)\Delta t}{4\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} \frac{\Phi_{N-n}(\lambda)}{\varphi(\lambda)} d\lambda \right\}, \quad (5)$$

где $v = \exp \left\{ \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} \ln \varphi(\lambda) d\lambda \right\}$, $\Phi_{N-n}(\lambda)$ – периодограмма:

$$\Phi_{N-n}(\lambda) = \frac{\Delta t}{N-n} \left| \sum_{k=1}^{N-n} \exp(i\Delta t \lambda k) y(k\Delta t) \right|^2.$$

Покажем, что в формуле (5) можно вернуться от параметра β к параметру α , заменив $\varphi(\lambda)$ на $f(\lambda)$ и периодограмму $\Phi_{N-n}(\lambda)$ процесса $y(t)$ на периодограмму исходного процесса $\psi_N(\lambda)$:

$$\psi_N(\lambda) = \frac{\Delta t}{N} \left| \sum_{k=1}^N \exp(i\Delta t \lambda k) x(k\Delta t) \right|^2.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} v &= \exp \left\{ \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} \ln [1 - \exp(i\lambda\Delta t)]^{2n} f(\lambda) d\lambda \right\} = \\ &= \exp \left\{ \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} \ln f(\lambda) d\lambda \right\} \exp \left\{ \frac{n\Delta t}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} \ln |1 - \exp(i\lambda\Delta t)|^2 d\lambda \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Второй множитель в (6) равен единице, так как

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{+\frac{\pi}{\Delta t}} \ln |1 - \exp(i\lambda\Delta t)|^2 d\lambda &= \int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{+\frac{\pi}{\Delta t}} \ln \left[4 \sin^2 \frac{\lambda\Delta t}{2} \right] d\lambda = \\ &= 2\pi \ln 4 + 4 \int_0^{+\frac{\pi}{\Delta t}} \ln \left[\sin \frac{\lambda\Delta t}{2} \right] d\lambda = 2\pi \ln 4 - 2\pi \ln 4 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{N-n}(\lambda) &= \frac{\Delta t}{N-n} \left| \sum_{k=1}^{N-n} \exp(i\Delta t \lambda k) y(k\Delta t) \right|^2 = \\
&= \frac{\Delta t}{N-n} \left| \sum_{k=1}^{N-n} \exp(i\Delta t \lambda k) \sum_{i=0}^n x(k\Delta t + j\Delta t) (-1)^j C_n^j \right|^2 = \\
&= \frac{\Delta t}{N-n} \left| \sum_{k=1}^{N-n} \sum_{j=0}^n \exp[i\Delta t \lambda (k+j)] x[(k+j)\Delta t] \exp(-i\lambda t j) (-1)^j C_n^j \right|^2 = \\
&= \frac{\Delta t}{N} \left| \sum_{k=1}^N \exp(i\lambda \Delta t k) x(k\Delta t) \right|^2 \left[1 - \exp(i\lambda \Delta t)^{2n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \right] = \\
&= \Psi_N(\lambda) |1 - \exp(i\lambda \Delta t)|^{2n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \tag{7}
\end{aligned}$$

Таким образом, подставляя (7) в (5), сокращаем множитель $|1 - \exp(i\lambda \Delta t)|$ и главный член правдоподобия при $N \rightarrow \infty$ будет иметь вид

$$L(x_1, \dots, x_N | \alpha; c; \lambda_0) \cong \left[\frac{2\pi}{\Delta t} v \right]^{-\frac{N}{2}} \exp \left\{ -\frac{N\Delta t}{4\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} \frac{\Psi_N(\lambda)}{f(\lambda)} d\lambda \right\}, \tag{8}$$

где $v = \exp \left\{ \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} \ln f(\lambda) d\lambda \right\}$.

Оценки параметров α ; c ; λ_0 находим, максимизируя по ним правдоподобие (8). Это сводится к численному решению системы уравнений для α и λ_0 :

$$\begin{cases} \int_0^{\lambda_0} (1 - \ln \lambda_0 + \ln \lambda) \lambda^\alpha \Psi_N(\lambda) d\lambda = 0 \\ (\pi - \lambda_0) \int_0^{\lambda_0} \lambda^\alpha \Psi_N(\lambda) d\lambda - \lambda_0^{\alpha+1} \int_0^{\pi} \Psi_N(\lambda) d\lambda = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Обозначим оценки максимального правдоподобия: $\hat{\alpha}, \hat{c}, \hat{\lambda}_0$. Параметры c, λ_0 нам непосредственно не нужны (мешающие параметры). Матрица ковариаций предельного нормального 3-х-мерного распределения параметров α, c, λ_0 находится стандартным способом путем обращения матрицы Фишера:

$$\left\{ E \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i} \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_j} \right\}, \quad \theta_1 = \alpha, \quad \theta_2 = c, \quad \theta_3 = \lambda_0.$$

Отсюда имеем выражения для дисперсий оценок:

$$\text{var } \hat{\alpha} = \frac{2\pi}{N\lambda_0}, \tag{10}$$

$$\text{var } \hat{\lambda}_0 = \frac{2\lambda_0\pi(2\pi - \lambda_0)}{N\alpha^2(\pi - \lambda_0)}. \tag{11}$$

α	λ_0	$\langle \hat{\alpha} \rangle$	$\langle \hat{\lambda}_0 \rangle$	$\sqrt{v(\hat{\alpha})}$	$\sqrt{v(\hat{\lambda}_0)}$	$\sqrt{asu(\hat{\alpha})}$	$\sqrt{asu(\hat{\lambda}_0)}$
0.4	0.490	0.354	0.602	0,1545	0.3646	0.1581	0.2868
1.0	0.490	0.984	0.462	0.1604	0.1022	0.1581	0.1147
2.0	0.490	1.964	0.474	0.1720	0.0473	0.1581	0.0573
0.8	1.227	0.819	1.041	0.1071	0.2917	0.1000	0.2492
1.5	1.227	1.500	1.148	0.0840	0.1505	0.1000	0.1329
0.2	2.454	0.214	1.445	0.0921	1.3627	0.0707	2.0482

Метод был опробован на модельных спектрах со степенным поведением на низких частотах. Такие спектры получались умножением периодограммы реализации гауссовского “белого” шума на функцию $f(\lambda)$, зависящую от параметров λ_0 и α :

$$f(\lambda) = \begin{cases} \frac{c}{\lambda^\alpha}; & 0 < \lambda \leq \lambda_0 \\ \frac{c}{\lambda_0^\alpha}; & \lambda_0 < \lambda \leq \frac{\pi}{\Delta t}. \end{cases}$$

Число отсчетов по частоте: $N/2 = 256$. По выборке из 9-ти реализаций процесса с заданными α и λ_0 вычислялись: средние значения оценок $\langle \hat{\alpha} \rangle$ и $\langle \hat{\lambda}_0 \rangle$; стандартные отклонения $\sqrt{v(\hat{\alpha})}$, $\sqrt{v(\hat{\lambda}_0)}$; а также по формулам (10), (11) асимптотические дисперсии $asu(\hat{\alpha})$, $asu(\hat{\lambda}_0)$. Результаты оценивания параметров модельных спектров для разных α и λ_0 приведены в табл. 2.

Чтобы понять, для каких N “начинает работать” асимптотическая формула (8), был проведен сравнительный анализ результатов оценивания показателя α с помощью асимптотического правдоподобия (8) и точного правдоподобия (12):

$$L(y_1, \dots, y_{N-n} | \alpha) = \frac{1}{|\det B^{(\alpha)}|^{1/2} (2\pi)^{N-n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N-n} \beta_{ij}^{(\alpha)} y_i y_j \right\}, \quad (12)$$

$$\text{где } B^{(\alpha)}(k) = E y_i y_{i+k} = C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\exp(i\lambda) - 1|^{2n}}{\lambda^\alpha} \exp(i\lambda k) d\lambda,$$

$$\begin{bmatrix} B(0) & B(1) & \dots & B(N-n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & B(1) \\ B(N-n) & B(N-n^{-1}) & \dots & B(0) \end{bmatrix}^{-1} = \beta_{ij}.$$

По реализациям модельного процесса с показателем $\alpha = 2.5$ методом максимального правдоподобия вычислялись:

оценка $\hat{\alpha}_0$ – с помощью точного правдоподобия (12);

оценка $\hat{\alpha}_a$ – с помощью асимптотического правдоподобия (8);

дисперсии $v(\hat{\alpha}_0)$, $v(\hat{\alpha}_a)$; асимптотическая дисперсия $asu(\hat{\alpha}_a)$; $\sigma = \sqrt{\langle (\hat{\alpha}_a - \hat{\alpha}_0)^2 \rangle}$.

В табл. 3 сопоставляют оценки точного и асимптотического максимального правдоподобия показателя α по модельным рядам разной длины N .

Таблица 3

N	$\sqrt{v(\hat{\alpha}_a)}$	$\sqrt{v(\hat{\alpha}_0)}$	$\sqrt{asv(\hat{\alpha}_a)}$	σ
20	0.6199	0.4913	0.3162	0.5484
40	0.4002	0.5292	0.2236	0.4880
80	0.2870	0.2216	0.1581	0.2091

Таблица 4

Процесс	$\hat{\alpha}$	$\sqrt{var(\hat{\alpha})}$	$\frac{2\pi}{T}$, Гц	ОМП $\hat{\lambda}_0$, Гц
Нутация (1900–1942)	1.926	0.063	$0.910 \cdot 10^{-8}$	$1.169 \cdot 10^{-6}$
Нутация (1938–1980)	1.833	0.071	$0.910 \cdot 10^{-8}$	$1.138 \cdot 10^{-6}$
Атмосферное давление	2.243	0.078	$1.704 \cdot 10^{-6}$	$5.403 \cdot 10^{-4}$

Если считать допустимым расхождение в оценке α , характеризуемое величиной σ/α , порядка 10%, то, как видно из табл. 2, число точек в реализации должно быть не менее 80. В противном случае относительное отклонение σ/α может достигать 25–30%.

В работе проведены вычисления оценок “показателя нестационарности” различных реальных геофизических процессов: нутации земной оси за 1900–1980 г. (шаг по времени 1 мес), атмосферного давления в районе Ашхабада (шаг по времени 1 сут) и количества землетрясений в месяц, произошедших в данном регионе, в зависимости от времени. Рассматривались события с классом не меньше представительного для данного каталога (представительным называется энергетический класс, начиная с которого график повторяемости можно считать линейным).

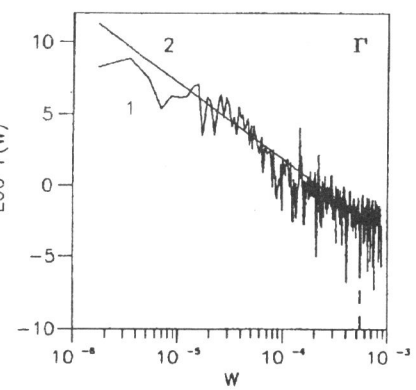
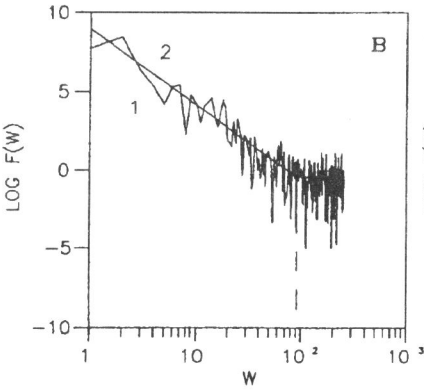
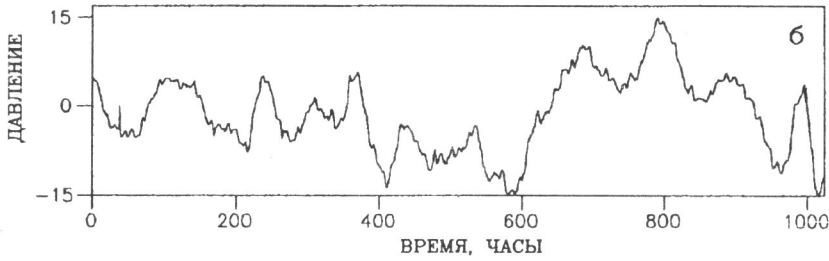
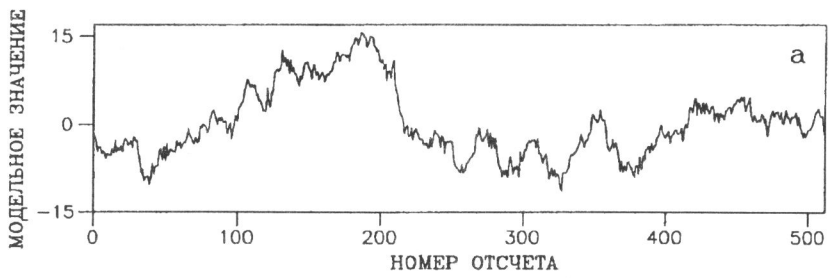
Пусть T – время наблюдения в секундах, тогда $wf = 2\pi/T$ – фундаментальная частота ряда, Гц. Оценки показателя α и “частоты отсечения” λ_0 для процесса нутации земной оси и атмосферного давления, моделируемых гауссовскими процессами, приведены в табл. 4.

Как видно из табл. 4, значения $\hat{\alpha}$ для процессов нутации земной оси и атмосферного давления достаточно высоки (порядка 2), причем для двух слегка пересекающихся 43-летних интервалов времени значения оценок $\hat{\alpha}$ для процесса нутации близки.

Заметим, что ОМП $\hat{\lambda}_0$ для этих рядов получились на два порядка больше их фундаментальной частоты. Это говорит о том, что спектры этих рядов имеют степенной характер на большом интервале частот (примерно 200 отсчетов периодограммы), что обуславливает довольно устойчивую оценку степени $\hat{\alpha}$ (стандартное отклонение оценки $\hat{\alpha} \sim 0.07$).

На рис. 1 приведены примеры процессов с большим “показателем нестационарности” α ($\alpha \geq 2$) и оценки их спектров. Видно, что наблюдаемый в природе ряд атмосферного давления “похож” на реализацию модельного процесса с показателем $\alpha = 2$. Это подтверждается степенным характером его периодограммы почти на всем интервале частот и значением оценки $\hat{\alpha} = 2.2$.

Когда были проведены вычисления ОМП для процессов сейсмичности, оказалось, что значения оценок $\hat{\alpha}$ получаются значительно ниже (порядка 0.5), за исключением



Р и с. 1. Примеры процессов и их спектры

a – реализация модельного процесса с параметрами $\alpha = 2, \lambda_0 = 1.2$ рад; *б* – ряд замеров атмосферного давления в р-не Ашхабада ($\Delta t = 1$ сут): *в-г* – их периодограммы (1) и ОМП модели спектральной плотности (2) в двойном логарифмическом масштабе. Пунктир – ОМП $\hat{\lambda}_0$; $\log F(w)$ – логарифм спектральной плотности в условных единицах, w – частота в герцах

района Гарма. Оценки $\hat{\lambda}_0$ сильно различаются для разных регионов, что затрудняет сравнение соответствующих оценок $\hat{\alpha}$. Кроме того, для района Гарма оценка максимального правдоподобия для $\hat{\lambda}_0$ очень мала и соответствует всего пяти отсчетам по частоте в периодограмме, что сильно увеличило стандартное отклонение оценки $\hat{\alpha}$ и тем самым снизило надежность.

Дисперсия (11) оценки максимального правдоподобия частоты отсечения λ_0 растет с уменьшением α , поэтому на реальных данных с небольшим α эта оценка ведет себя неустойчиво. Но от $\hat{\lambda}_0$ зависит оценка $\hat{\alpha}$. Поэтому предлагается либо задавать λ_0 а priori: исходя из физических особенностей изучаемого процесса, или из интервала частот, представляющего интерес для конкретной задачи; либо с помощью следующего алгоритма.

Регион	$\hat{\alpha}$	$\sqrt{\text{var}(\hat{\alpha})}$	$\frac{2\pi}{T}$, Гц	$\bar{\lambda}_0$, Гц
Р-н Джавахетского нагорья	0.39	0.24	$0.910 \cdot 10^{-8}$	$1.609 \cdot 10^{-7}$
Р-н Гарма	1.37	0.24	$0.910 \cdot 10^{-8}$	$1.609 \cdot 10^{-7}$
Камчатка	0.74	0.24	$0.910 \cdot 10^{-8}$	$1.609 \cdot 10^{-7}$
Япония	0.55	0.17	$0.455 \cdot 10^{-8}$	$1.609 \cdot 10^{-7}$
Ю. Калифорния	0.11	0.17	$0.455 \cdot 10^{-8}$	$1.609 \cdot 10^{-7}$

Предлагается вычислять статистику $S_{\lambda_0}(\lambda)$, отражающую степень соответствия между периодограммой и степенной моделью

$$S_{\lambda_0}(\lambda) = \frac{2(Jm - m)}{\sqrt{7m}}, \quad \text{где } \lambda = \frac{m}{T};$$

$$J_m = \sum_{k=1}^m \left[\frac{(k/T)^\alpha \Psi_N(k/T)}{c} - 1 \right]^2.$$

Статистика $S_{\lambda_0}(\lambda)$ при больших N приблизительно распределена как $N(0,1)$ для процессов, имеющих в точности степенной спектр. Но, чтобы не исключать из рассмотрения спектры, допускающие удовлетворительную степенную аппроксимацию, в качестве порога было принято значение $S_{cr} = 8$. Для этого порога в численных экспериментах со степенными спектрами, модулированными гармониками, величина относительного отклонения от степенной зависимости достигала 50%.

Опишем теперь кратко процедуру выбора λ_0 по реализации.

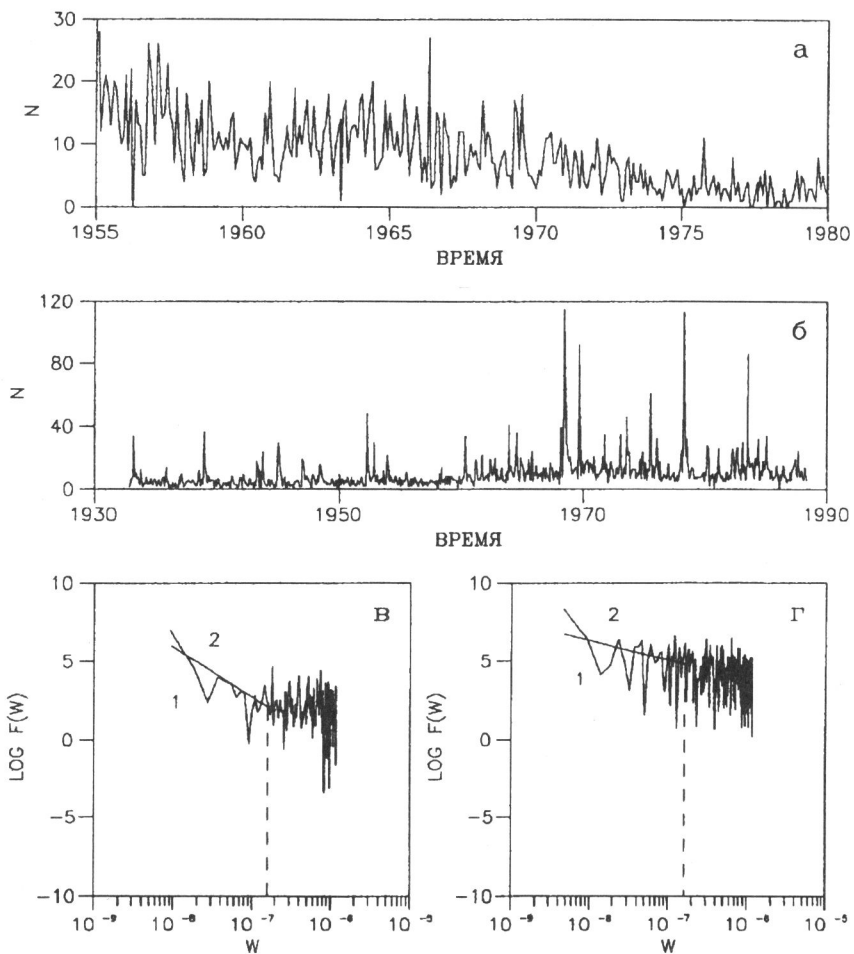
а. Задается ограничение снизу на частоту отсечения λ_0 . В качестве λ_0 рассматриваются последовательно отсчеты частоты периодограммы $\lambda = m/T$, начиная с $m = 5$. Для каждого λ_0 находятся оценки максимального правдоподобия $\hat{\alpha}$ и \hat{c} , которые используются для вычисления статистики $S_{\lambda_0}(\lambda)$. Приемлемым считается такое λ_0 ,

для которого существует частота λ_1 , такая что статистика $S_{\lambda_0}(\lambda) < S_{cr}$. Если не существует такого λ_0 , то данные не допускают степенную аппроксимацию и предлагаемый метод неприменим.

б. Для сравнения оценок показателей α нескольких процессов нужно задавать общее для них λ_0 . Тогда сначала для каждого процесса выбирается свое λ_0 с помощью описанной в а) процедуры, а затем наименьшее из них берется в качестве общего для этих процессов λ_0 , при котором уже вычисляются оценки максимального правдоподобия показателей $\hat{\alpha}$ для каждого процесса. Сравнение показателей с учетом их стандартных отклонений определяет, какой из процессов можно считать “более нестационарным”.

С помощью изложенной методики для сравнения низкочастотных компонент сейсмических процессов в разных регионах были получены значения оценок, приведенные в табл. 5, где $2\pi/T$ (Гц) – фундаментальная частота ряда; $\bar{\lambda}_0$ (Гц) – “частота отсечения”, выбранная с помощью описанной выше процедуры.

Из табл. 5 видно, что низкочастотные составляющие сильнее всего выражены в



Р и с. 2. Примеры временных рядов числа землетрясений в р-не Гарма (а) и в Японии (б), их периодограммы (1) и ОМП спектральной плотности (2) (в, з). Пунктир – $\bar{\lambda}_0$, обозначения, как на рис. 1

районе Гарма ($\hat{\alpha} = 1.37$). Оценки ($\hat{\alpha}$) в районах Камчатки, Японии и Джавахетского нагорья составляют около 0.4–0.7, а в Южной Калифорнии $\hat{\alpha}$ практически равно нулю.

На рис. 2 приведены примеры временных рядов числа событий за один месяц.

2. ПРОЦЕСС ПУАССОНОВСКОГО ТИПА

Мы интегрировали по времени сейсмический процесс, чтобы считать его приближенно гауссовским. Теперь рассмотрим его непосредственно как точечный процесс $N(t)$ пуассоновского типа, т.е. пуассоновский процесс со случайной стационарной интенсивностью. Для таких процессов известно выражение асимптотического логарифмического правдоподобия [7, 8]:

$$-\sum_{s=1}^S \left[\log f_2 \left(\frac{2\pi s}{T} \right) + I_2^T \left(\frac{2\pi s}{T} \right) / f_2 \left(\frac{2\pi s}{T} \right) \right], \quad (13)$$

где $I_2^T(\lambda)$ – периодограмма точечного процесса $N(t)$:

Регион	N	$\hat{\alpha}$	$\sqrt{\text{var}(\hat{\alpha})}$	$\frac{2\pi}{T}$, Гц	$\bar{\lambda}_0$, Гц
Р-н Джавахетского нагорья	1372	0.544	0.235	$0.90 \cdot 10^{-8}$	$1.609 \cdot 10^{-7}$
Р-н Гарма	2504	1.174	0.235	$0.79 \cdot 10^{-8}$	$1.609 \cdot 10^{-7}$
Камчатка	6076	0.661	0.235	$0.90 \cdot 10^{-8}$	$1.609 \cdot 10^{-7}$
Япония	6726	0.584	0.145	$0.34 \cdot 10^{-8}$	$1.609 \cdot 10^{-7}$
Ю. Калифорния	7166	0.007	0.145	$0.35 \cdot 10^{-8}$	$1.609 \cdot 10^{-7}$

$$I_2^T(\lambda) = (2\pi T)^{-1} \left| \int_0^T \exp(-i\lambda t) dN(t) \right|^2,$$

$f_2(\lambda)$ – спектральная плотность процесса $N(t)$:

$$f_2(\lambda) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\lambda u) \text{cov}\{dN(t+u), dN(t)\} du.$$

Выражение (13) для точечного процесса аналогично выражению (8) для асимптотического правдоподобия гауссовского процесса; поэтому, если задать $f_2(\lambda)$ в виде (4), то задача оценивания параметров максимального правдоподобия опять сводится к численному решению системы интегральных уравнений (9).

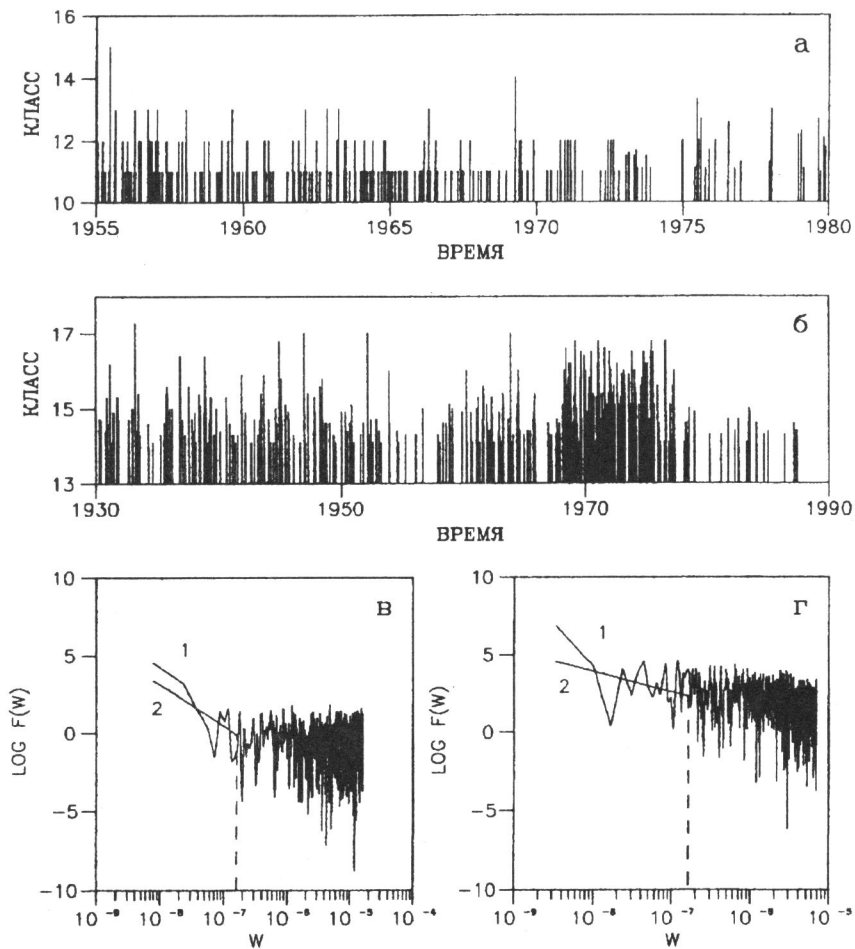
В табл. 6 приведены оценки параметра α , получающиеся при использовании точечного процесса в качестве модели потока землетрясений: N – число событий точечного процесса, T – время наблюдения в секундах, $\bar{\lambda}_0$ такое же, как в гауссовском случае.

Из табл. 6 видно, что оценки показателей α , полученные с помощью моделей пуассоновского типа (при той же самой частоте $\bar{\lambda}_0$) близки к оценкам, полученным по гауссовским моделям. Стандартные отклонения этих двух типов оценок также оказались близкими, что говорит об объективности полученных результатов сравнения низкочастотных асимптотик спектров. Большая разрешающая способность метода точечных процессов, по-видимому, существенна лишь для высокочастотной части спектра, а для низкочастотных компонент оба этих подхода практически равноэффективны.

На рис. 3 приведены примеры точечных процессов региональной сейсмичности: в р-не Гарма и в Японии.

Итак, предложенная методика позволяет оценивать параметр нестационарности α (степень, с которой стремится к бесконечности спектр процесса в нуле) как для гауссовских, так и для точечных процессов. Рассмотренные примеры некоторых геофизических процессов (нутация земной оси, атмосферное давление) показывают, что параметр α может принимать довольно большие значения ($\alpha \approx 2$), что соответствует обобщенному процессу. Поэтому для того, чтобы избавиться от тренда при спектрально-корреляционном анализе таких процессов, рекомендуется переходить к конечным разностям соответствующего порядка.

Сравнительный анализ низкочастотной асимптотики каталогов землетрясений дал следующие результаты. Из рассмотренных нами каталогов наиболее нестационарным оказался каталог Гарма ($\hat{\alpha} > 1$). Для каталогов Японии, Камчатки и Джавахетского нагорья $\hat{\alpha} \approx 0.4 - 0.7$; для Южной Калифорнии показатель $\hat{\alpha}$ практически равен нулю. Во всех регионах, за исключением Гарма, оценка спектральной плотности стремится к



Р и с. 3. Примеры точечных процессов отдельных землетрясений из р-на Гарма (а) и Японии (б), их периодограммы (1) и ОМП спектральной плотности (2) (в, г). Пунктир – $\bar{\lambda}_0$, обозначения, как на рис. 1

бесконечности при $\lambda \rightarrow 0$, но стремление это достаточно слабое – не быстрее, чем $1/\lambda^{-\alpha}$, $\alpha < 0.75$. Поэтому, при спектральнокорреляционном анализе таких процессов переходить к конечным разностям (в гауссовской модели) необязательно. Это утверждение справедливо по крайней мере для каталогов с большим числом землетрясений ($N \sim 2000 \div 5000$) и охватывающих представительные площади и промежутки времени. При небольших интервалах времени или для небольших по площади районов следует ожидать увеличение показателя нестационарности α . Зависимость α от пространственно-временных объемов, охватываемых каталогом, требует специальных исследований. Однако, как показывает пример Гарма, и для сейсмического процесса асимптотика спектра в нуле может иметь показатель $\alpha > 1$, что требует особой осторожности при спектрально-корреляционном анализе и снижения интенсивности низкочастотных компонент либо с помощью перехода к конечным разностям, либо каким-то другим способом.

В заключение авторы выражают свою искреннюю благодарность за предоставленные данные Ю.Н. Авсюку, И.В. Савину и Т.А. Рукавишниковой, а также Г.М. Молчану за замечания, способствовавшие улучшению статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яглом А.М., Пинскер М.С. Случайные процессы со стационарными приращениями n -го порядка // ДАН СССР. 1953. Т. 90. С. 385–388.
2. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов // Прогноз и управление. М.: Мир, 1974. Вып. 1. 406 с.; Вып. 2. 197 с.
3. Bak P., Chen K. The physics of fractals // Physica D, Vol. 38. 1989. P. 5–12.
4. Шустер Г. Детерминированный хаос. (Введение). М.: Мир, 1988. 240 с.
5. Taqqu M. A bibliographic guide to self-similar processes and long-range dependence, in "Dependence in probability and statistics" // Prog. Probab. Stat. Ser. / ed. E. Eberlein and M. Taqqu. Birkhauser. Boston: 1986. P. 137–162.
6. Taqqu M. Random processes with long-range dependence and high variability // J. Geophys. Res. Vol. 92, N. D8. 1987. P. 9683–9686.
7. Brillinger D.R. The spectral analysis of stationary interval functions // Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Probab. 1. 1972. P. 483–513.
8. Brillinger D. Comparative aspects of the study of ordinary time series and point processes // Developments in statistics. Vol. 1. N-Y.: Academic Press. 1987. P. 33–133.
9. Whittle P. Some results in time series analysis // Skandinavisk Aktuarietidskrift. 1952. Vol. 35. P. 48–60.