

Отношение  $v_p/v_s$  в направлении  $x_2$  выражается формулой

$$\frac{v_p}{v_s} = \left[ \frac{\lambda_{2222}}{2\lambda_{1212}} \right]^{1/2}.$$

Из вида упругих модулей (5) можно заключить, что это явление слабо связано собственно с дилатансией (т.е. когда  $s \neq 0$ ) и должно наблюдаться также в экспериментах на сжатие под давлением, блокирующим возникновение отрывных трещин. Рис. 10 демонстрирует убывание отношения  $v_p/v_s$  с ростом нагрузки, полученное в численном эксперименте при тех же условиях, что в п. 2.4.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Герцик В.М. Уравнения динамики сейсмогенной сплошной среды // Современные методы интерпретации сейсмических данных. М.: Наука, 1991. С. 62–75. (Вычисл. сейсмология; Вып. 24).
2. Timoshenko S. Strength of materials. Part II. New York: 1945. 510 p.
3. Поль Б. Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения // Разрушение. Т. 2. М.: Мир, 1975. С. 336–520.
4. Касахара К. Механика землетрясений. М.: Мир, 1985. 264 с.
5. Brace W.F. Current laboratory studies pertaining to earthquake prediction // Tectonophysics. 1968. Vol. 6. P. 75–87.

УДК 550.345.1

## ОДНОМЕРНАЯ СИСТЕМА КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ – МОДЕЛЬ СЕЙСМОАКТИВНОГО РАЗЛОМА

*М.Г.Шнирман, Ю.В. Генюк*

### ONE-DIMENSIONAL SYSTEM OF CELLULAR AUTOMATA FOR MODELING AN EARTHQUAKE FAULT

*M.G. Shnirman and J.V. Genyuk*

Two one-dimensional models of an earthquake fault studied here are constructed as systems of blocks residing in one of three (the first model) or five states (the second model) Certain transition rules are included, which specify the interaction of blocks. We obtain a magnitude–frequency relation similar to that in the model of Burridge and Knopoff. We also study the evolution of large events and show that the behavior the model can be described by information effectively contracted by the multifractal technique.

В известной работе [1] была впервые рассмотрена одномерная система связанных блоков, призванная объяснить функционирование сейсмоактивного разлома. В последнее время, после работы [2], интерес к подобного рода конструкциям существенно возрос.

В них представлен целый спектр механической антрибутики (масса, упругость и т.д.), который порождает ощущение физичности модели, однако не существует критериев, позволяющих осмысленно приписывать значения соответствующим параметрам. Таким образом, мы имеем дело с типичной математической моделью, эффективность которой определяется отношением результативность–сложность. Естественно желание упростить, огрубить схему из [1, 2], сохранив основные сеймоподобные эффекты. Ранее, в своей работе [3], один из авторов предлагал одномерную модель сейсмоактивного разлома – систему клеточных автоматов. Принципиальное отличие ее от системы взаимодействующих блоков из [1] состоит в

радикальном сокращении пространства состояний для элемента системы: вместо двумерного пространства координаты–скорости вводятся всего три состояния: покой, быстрое и медленное движение.

Ниже рассматривается и изучается с помощью компьютерных экспериментов модель из работы [3] и ее модификация с пятью состояниями для одного элемента. Эта модификация позволяет сделать режим стационарным и получить разумную аналогию с моделью из работы [2].

Основными вопросами при изучении поведения модели мы считали следующие: 1) зависимость числа сейсмических событий от их размеров; 2) отличие этой зависимости от степенной; 3) развитие во времени крупнейших событий, развертывающихся в масштабах всей системы (в этом случае активно использовалась "мультифрактальная" технология из [4], позволяющая эффективно спрессовывать информацию о "рваных" зависимостях.

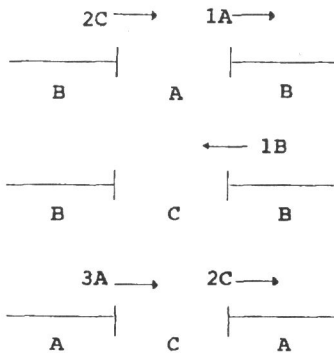
## 1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассматривается клеточный автомат, устроенный следующим образом. Имеются  $L$  последовательных клеток, каждая из которых может находиться в одном из трех состояний: **A**, **B** или **C**. Обозначим через  $x(i, t)$  состояние  $i$ -й клетки в момент  $t$ ,  $t = 1, \dots, T$ ,  $i = 1, \dots, L$ . Тогда на следующем такте новые состояния клеток получаются так. Справа налево просматриваются пары соседних клеток. Если две соседние клетки находятся в одинаковых состояниях, то ничего не меняется. В противном случае происходит переход по следующим правилам:

$$\begin{aligned}
 x(i, t) = \mathbf{A}, \quad x(i+1, t) = \mathbf{B}, \quad x(i+1, t+1) = \mathbf{A}, \\
 x(i, t) = \mathbf{B}, \quad x(i+1, t) = \mathbf{A}, \quad x(i+1, t+1) = \mathbf{C}, \quad x(i+2, t+1) = \mathbf{C}, \\
 x(i, t) = \mathbf{C}, \quad x(i+1, t) = \mathbf{B}, \quad x(i, t+1) = \mathbf{B}, \\
 x(i, t) = \mathbf{A}, \quad x(i+1, t) = \mathbf{C}, \quad x(i+1, t+1) = \mathbf{A}, \quad x(i+2, t+1) = \mathbf{A}, \\
 \qquad \qquad \qquad x(i+3, t+1) = \mathbf{A}, \\
 x(i, t) = \mathbf{C}, \quad x(i+1, t) = \mathbf{A}, \quad x(i+1, t+1) = \mathbf{C}, \quad x(i+2, t+1) = \mathbf{C}, \\
 x(i, t) = \mathbf{B}, \quad x(i+1, t) = \mathbf{C},
 \end{aligned}$$

Краевые условия могут быть заданы в двух видах: либо фиксация состояний в трех дополнительных клетках слева и одной справа, либо совмещение левого и правого концов системы.

Таким образом, если например, длинная цепочка клеток в состоянии **A** граничит справа с серией клеток в состоянии **C**, то **A** "поедает" **C** со скоростью три клетки за



Р и с. 1. Схема, иллюстрирующая описание клеточного автомата с тремя состояниями **A**, **B** и **C** (п. 1)

Вертикальные линии разграничивают клетки с разными состояниями в момент времени  $t$ . Стрелки показывают, по какую сторону раздела происходит изменения в момент  $t + 1$ . Надписи у стрелок – число клеток, меняющих состояние, и их новое состояние

такт, а если слева – то С "поедают" А со скоростью две клетки за такт, и аналогично для других вариантов расположения (рис. 1).

Этот автомат можно содержательно интерпретировать как грубую модель движения блоков по разлому, при этом В имитируют неподвижные блоки, А – движущиеся, С – останавливающиеся после разгона.

Кроме описанных правил, вводится также случайное возмущение, т.е. любая клетка может на каждом такте с заданной вероятностью перескакивать в другое состояние. Рассматривается случай, когда отличны от нуля только вероятности перехода В в А и С в А, обозначаемые соответственно  $P(\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}) = p_1$  и  $P(\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{A}) = p_2$ . В первый момент времени все клетки находятся в состоянии В.

Назовем серией (возмущением) последовательность (без пропусков) клеток в состояниях А и С, ограниченную с обоих концов клетками в состояниях А и С, ограниченную с обоих концов клетками в состоянии В. Назовем событием появление и эволюцию серии. Очевидно, событие является связным множеством (кластером) на двумерной решетке пространства–время. Серия может расти или укорачиваться с обоих концов. Этот процесс заканчивается либо исчезновением возмущения, либо распространением его на всю систему. В последнем случае, когда ни одной клетки в состоянии В не останется, процесс обрывается и моделирование начинается с исходного состояния.

## 2. ГРАФИК ПОВТОРЯЕМОСТИ

Назовем размером события сумму длин серий в данном событии по всем тактам времени, в которые оно существовало. Если изобразить поведение системы во времени на двумерной решетке, где точке с координатами  $(i, t)$  соответствует значение  $x(i, t)$ , то размером события будет просто размер кластера из А и С на этой решетке. Магнитудой  $m$  события назовем логарифм его размера.

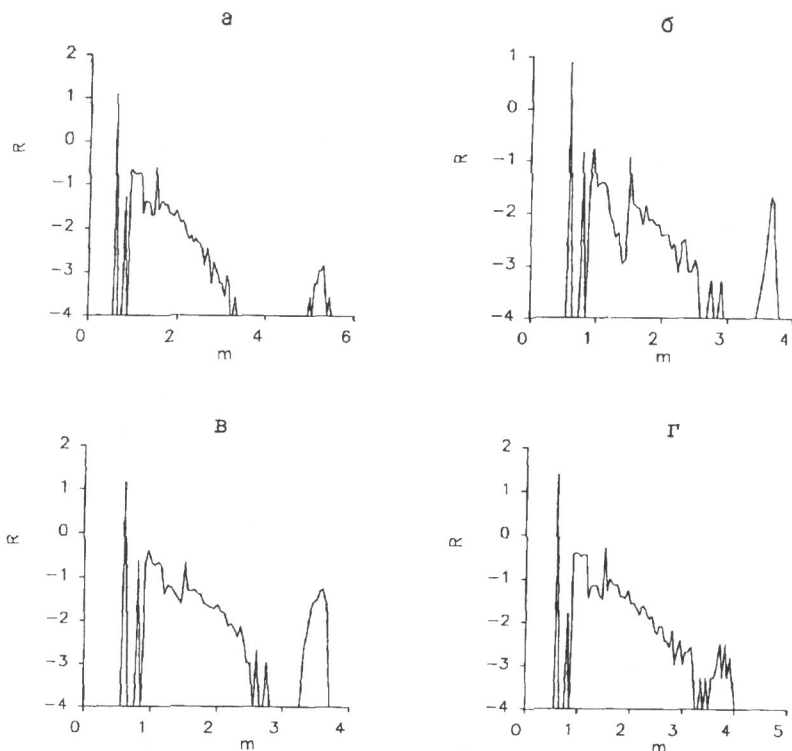
Назовем частотой появления события с магнитудой  $m$  в данном компьютерном эксперименте полное число таких событий, деленное на 100.

Пусть  $R(m)$  – логарифм частоты появления событий с магнитудой  $m$  на 100 клеток. Из рис. 2 видно, что график зависимости  $R(m)$  состоит из трех частей. Несколько отдельных пиков слева отражают большое число мелких событий, т.е. серий, распадающихся почти сразу после рождения. Видно, что из-за дискретности системы существует лишь несколько возможных размеров таких событий. Средний участок графика  $R(m)$  приблизительно линейный, т.е. соответствующий закону Гутенберга–Рихтера. Наконец, справа на графике возникает "всплеск" из-за того, что существует некоторая критическая длина серии, зависящая от  $p_1$  и  $p_2$ . Практически все серии, достигшие этой длины, уже не распадаются, а разрастаются неограниченно, пока не охватят всю систему (глобальные события).

Вариации параметров модели приводят к следующим эффектам. При увеличении размера системы  $L$  участок графика, соответствующий глобальным событиям (пик справа), отодвигается вправо. Так как развитие глобального события при больших  $L$  занимает больше времени, относительная частота всех событий уменьшается (ср. рис. 2, а с 2 б, в, г).

При увеличении  $p_1$  от 0.005 до 0.02 (при  $p_2 = 0.02$ ) частота всех событий увеличивается и пик справа расширяется влево, (рис. 2, б и 2, в), так как распространение возмущения происходит путем слияния разных серий и время распространения тем самым уменьшается.

При уменьшении  $p_2$  от 0.02 до 0.001 (при  $p_1 = 0.02$ ) линейный участок графика  $R(m)$  расширяется вправо и в конце концов сливается с пиком справа, который понижается, т.е. критическая длина серии увеличивается и глобальные события случаются реже (рис. 2, в и 2, г).



Р и с. 2. Зависимость логарифмической частоты событий  $R(m)$  от их магнитуды  $m$  в системе с тремя состояниями для различных значений параметров  $L$  (размер системы),  $p_1$  и  $p_2$  (вероятности перехода  $B \rightarrow A$  и  $C \rightarrow A$  соответственно)

$a - p_1 = 0.005, p_2 = 0.02, L = 100$ ;  $б - p_1 = 0.02, p_2 = 0.02, L = 100$ ;  $в - p_1 = 0.02, p_2 = 0.001, L = 100$ ;  $г - p_1 = 0.02, p_2 = 0.005, L = 1000$

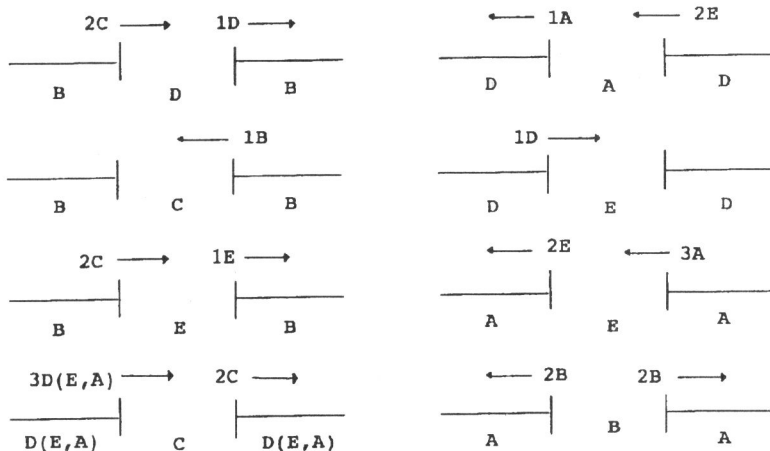
Рассчитывался также наклон линейного участка  $Rm$ . При  $p_1 = 0.02$  он равен (с точностью около 0.03) следующим значениям:  $-1.1$  для  $0.001 \leq p_2 \leq 0.005$ ,  $-1.2$  для  $p_2 = 0.01$  и  $p_2 = 0.01$  и  $-1.35$  для  $p_2 = 0.02$ . При постоянной  $p_2$  и уменьшении  $p_1$  наклон уменьшается по модулю. Заметим, что у графика повторяемости для модели Барриджа–Кнопова из [2] наклон линейного участка также близок к единице для широкого диапазона параметров; но при сильном увеличении трения он становится меньше единицы, чего с нашей моделью не происходит.

### 3. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Следующим шагом должно, естественно, стать создание системы, не обрывающей свою эволюцию после распространения возмущения, а "залечивающей" возмущение и переходящей в стабильное состояние с локальными событиями. Так ведет себя система, где каждая клетка может иметь пять состояний: **A**, **B**, **C**, **D** и **E**, а изменение состояния происходит так, как показано на рис. 3. Можно интерпретировать состояние **B** как покой, **A** – как быстрое движение, а **C**, **D**, **E** – как разные типы медленного движения. Параметрами являются вероятности перехода

$$P(\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}) = p_1, \quad P(\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}) = p_2, \quad P(\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{A}) = p_3,$$

$$P(\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{A}) = p_4, \quad P(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) = p_5,$$



Р и с. 3. Схема, иллюстрирующая описание клеточного автомата с пятью состояниями. Схема построена аналогично рис. 1

Поведение такой системы выглядит как ряд глобальных событий, разделенных интервалами стабильности. Параметры можно подобрать так, что в глобальном событии выделяются несколько этапов: сначала вся система постепенно переходит в состояние **D**, и на этом фоне появляются серии из **E** и **A** аналогично тому, как в модели с тремя состояниями появлялись серии из **C** и **A**. Развитие этих серий также аналогично развитию серий из **C** и **A** в модели с тремя состояниями, однако их рост направлен влево. В конце концов происходит глобальное событие "второго порядка", и вся система переходит в состояние **A**, где через некоторое время появляется **B**, "съедающее" его и переводящее систему в исходное состояние. Фаза перехода системы в состояние **D** может, таким образом, рассматриваться как процесс подготовки к переходу в состояние **A**.

#### 4. ГРАФИК ПОВТОРЯЕМОСТИ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

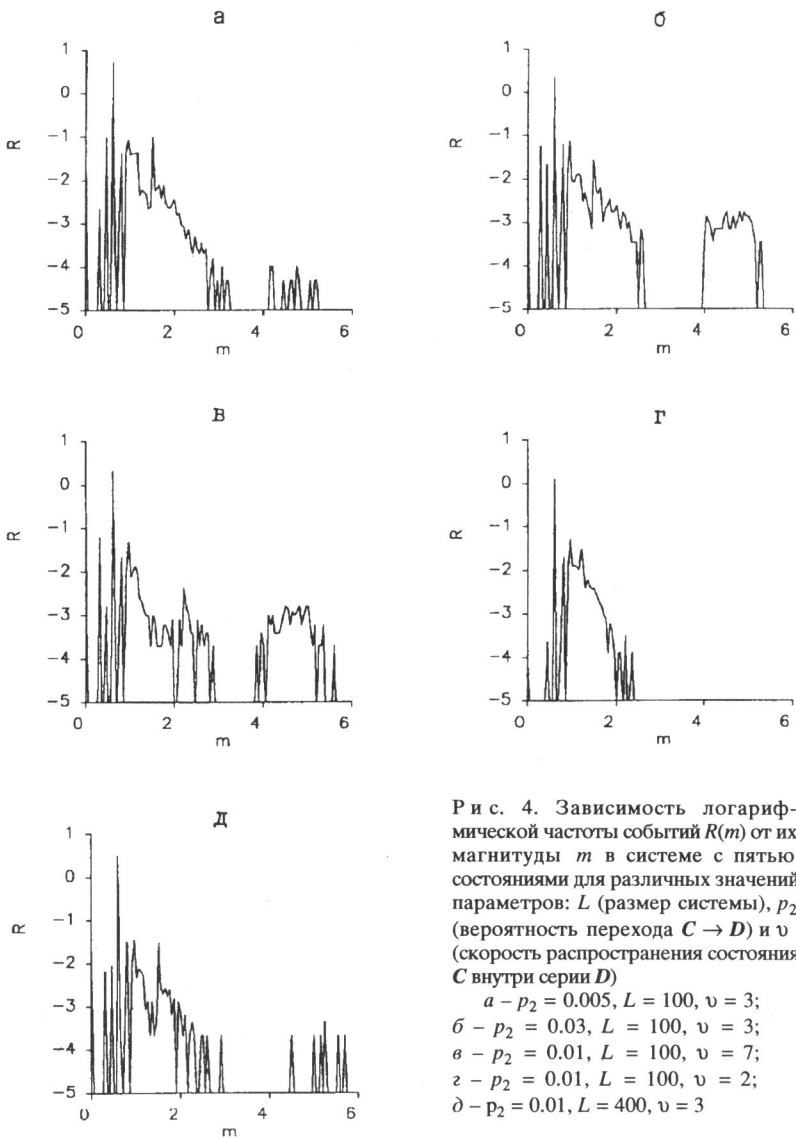
График  $R(m)$  состоит из таких же трех участков, что и для предыдущей модели (рис. 4). Система рассматривалась при  $L = 100$  и  $L = 400$  и для обоих случаев параметры подбирались так, чтобы наблюдалась описанная в конце п. 3 схема поведения системы, т.е. последовательный переход почти всех клеток сначала в состояние **D**, а затем в состояние **A**. При этом получились следующие значения:

$$L = 100: p_1 = 0.005, p_2 = 0.01, p_3 = 0.02, p_4 = 0.02, p_2 = 0.0005;$$

$$L = 400: p_1 = 0.002, p_2 = 0.01, p_3 = 0.02, p_4 = 0.03, p_2 = 0.00001.$$

После этого параметр  $p_2$  менялся в диапазоне  $0.005 \leq p_2 \leq 0.03$  при  $L = 100$  (рис. 4, а,б). При этом с уменьшением  $p_2$  линейный участок графика расширяется вправо; правый конец его сдвигается от 2.65 до 3.25, т.е. максимальный размер локального события увеличивается в 4 раза. Наклон линейного участка равен приблизительно  $-1.4$  для  $p_2 = 0.005$  и колеблется от  $-1.2$  до  $-1.1$  для остальных значений  $p_2$ .

Изменялась также скорость распространения состояния **C** внутри **D** в правилах перехода – от 2 до 7 (при "нормальном" значении 2). При увеличении этой скорости, очевидно, увеличивается общая частота глобальных событий и сужается линейный участок графика за счет сдвига вправо области дискретных микроскопических событий; при скорости  $V = 7$  линейный участок вырождается (рис. 4,в). Наклон



Р и с. 4. Зависимость логарифмической частоты событий  $R(m)$  от их магнитуды  $m$  в системе с пятью состояниями для различных значений параметров:  $L$  (размер системы),  $p_2$  (вероятность перехода  $C \rightarrow D$ ) и  $\nu$  (скорость распространения состояния  $C$  внутри серии  $D$ )

- $a - p_2 = 0.005, L = 100, \nu = 3;$
- $б - p_2 = 0.03, L = 100, \nu = 3;$
- $в - p_2 = 0.01, L = 100, \nu = 7;$
- $г - p_2 = 0.01, L = 100, \nu = 2;$
- $д - p_2 = 0.01, L = 400, \nu = 3$

графика практически не меняется. При скорости  $V = 2$  исчезают глобальные события и уменьшается максимальный размер локальных событий; наклон увеличивается по модулю до 2.2 (рис. 4,з).

Рис. 4,д показывает, что с увеличением размера системы пик справа отрывается от линейного участка и сдвигается вправо. Вероятно, при увеличении общего количества блоков в модели из [2] участок графика, соответствующий глобальным событиям, должен вести себя сходным образом, о чем, однако, в [2] ничего не сказано.

При фиксированном  $L$  на поведение пика, соответствующего глобальным событиям, влияют уже другие параметры:  $p_3, p_4$ , и особенно  $p_5$ . Для изучения этого, однако, необходимо проводить эксперименты с большими  $L$ , так как изменение магнитуд глобальных событий малозаметно в логарифмическом масштабе, когда  $L$

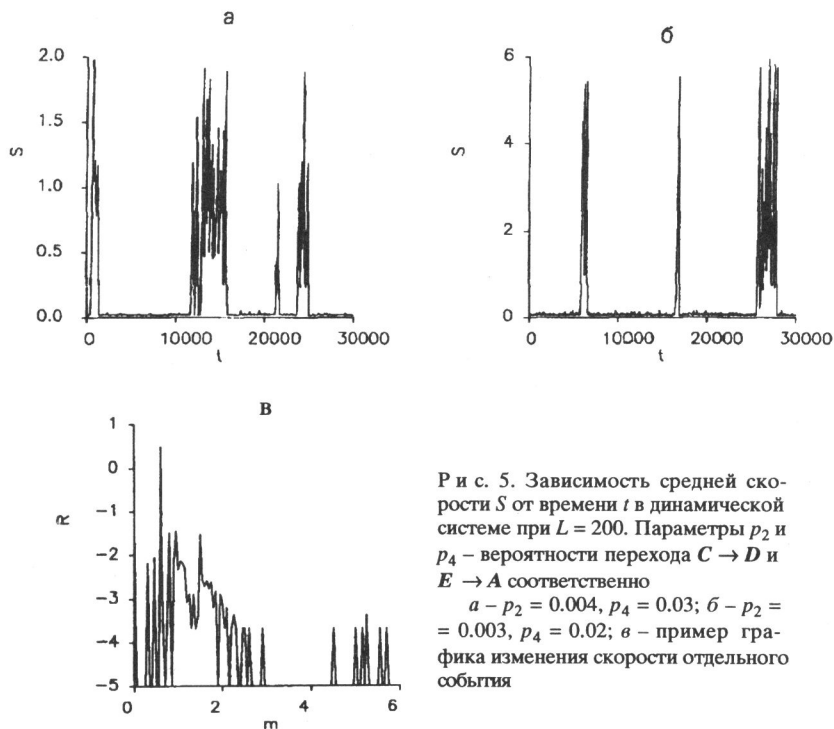
мало; вычислительные ресурсы между тем не позволяют провести такие эксперименты в достаточном объеме. Кроме того, график повторяемости не отражает внутреннюю структуру событий, а также сценарии перехода от стабильного режима к распространению возмущения. Таким образом, необходимо найти другие способы описания поведения системы.

## 5. ГРАФИК СРЕДНЕЙ СКОРОСТИ

Для того, чтобы представить поведение системы во времени, каждому состоянию клетки приписывается вес ("скорость"), и в каждый момент времени  $t$  рассчитывается средняя по всем клеткам системы скорость  $S(t)$ . Для уменьшения объема данных можно также разбить временную ось на интервалы равной длины и вычислять среднюю скорость на каждом интервале.

Веса выбирались так, чтобы переход системы в состояние **A** четко выделялся на графике, но и период "подготовки" был заметен по сравнению со стабильным режимом. Были выбраны следующие значения:  $A = 60$ ,  $B = 0$ ,  $C = 1$ ,  $D = 2$ ,  $E = 4$ . Тогда в стабильном режиме средняя скорость близка к 0, и глобальное событие выражается участком графика, на котором  $S(t)$  больше некоторого фиксированного значения  $S_0$ , т.е. появляется возмущение длины больше критической и распространяется на всю систему. В наших экспериментах достаточно взять  $S_0 = 0.1$ .

Глобальные события разделены периодами, когда система находится в стабильном режиме с большинством клеток в состоянии **B** и  $S(t) < S_0$  (рис. 5). В общем случае переход системы в состояние **A** и возврат ее к стабильному режиму происходит не сразу, так как серия **A** может начать распадаться, не охватив всю систему, и наоборот, распад может остановиться и смениться новым ростом возмущения. Поэтому график скорости, характеризующий такое событие, может состоять из



Р и с. 5. Зависимость средней скорости  $S$  от времени  $t$  в динамической системе при  $L = 200$ . Параметры  $p_2$  и  $p_4$  – вероятности перехода  $C \rightarrow D$  и  $E \rightarrow A$  соответственно  
 $a - p_2 = 0.004$ ,  $p_4 = 0.03$ ;  $б - p_2 = 0.003$ ,  $p_4 = 0.02$ ;  $в$  – пример графика изменения скорости отдельного события

одного или нескольких пиков, разделенных горизонтальными участками с  $S(t) \approx 2$ , т.е. периодами, когда поведение системы также стабильно, но с большинством клеток в состоянии **D**. При увеличении  $L$  без изменения параметров среднее число пиков в одном событии резко возрастает.

Уменьшая вероятности перехода  $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}$  и  $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ , можно увеличивать интервалы времени между событиями, так как при этом уменьшается частота возмущений и увеличивается критическая длина (рис. 5,а и 5,б). Аналогично, уменьшая вероятности перехода  $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{A}$  и  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{A}$ , можно увеличивать интервалы между пиками внутри события (рис. 5,в). Можно также растягивать время пребывания всей системы в состоянии **A** (с  $S(t) = 60$ ), уменьшая вероятность перехода  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ .

Аналогичное поведение можно наблюдать и на модели Барриджа–Кнопова. В ней также происходят хаотические подвижки одного или нескольких блоков, причем если длина цепочки движущихся блоков превысит критическую, возмущение распространяется на всю систему. При этом, если существует интервал скоростей, где трение со скоростью возрастает, блоки продолжают общее медленное движение (крип), пока группа блоков достаточной длины не превысит критическую скорость. После этого вся система постепенно начинает двигаться с большой скоростью, пока вертикальные пружины не заставят блоки остановиться.

## 6. ИЗУЧЕНИЕ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ФУНКЦИИ $S(t)$

Так как функция  $S(t)$  имеет весьма сложный рельеф, ее неудобно непосредственно использовать для изучения важнейших характеристик поведения системы. Чтобы выделить такие характеристики, необходимо уменьшить размерность описания системы. Эффективным способом описания сложных динамических систем с нерегулярным поведением является описание с помощью мультифрактальной меры. Попытка применить этот подход к нашему случаю заключалась в следующем.

Функция  $S(t)$  сглаживалась скользящим окном длиной девять тактов (Результат сглаживания обозначим  $\tilde{S}(t)$ .)

После этого производилась нормировка: вычислялись значения  $p_i$  по формуле

$$p_i = \frac{\tilde{S}(t_i)}{\sum_k \tilde{S}(t_k)}, \quad i = 1, 2, \dots, N - 8.$$

Здесь сумма распространяется на  $i = 1, 2, \dots, N - 8$ , где  $N$  – количество тактов времени. Очевидно  $\sum p_i = 1$ . Потом для этого набора  $N - 8$  чисел  $p_i$  рассчитывались функции:

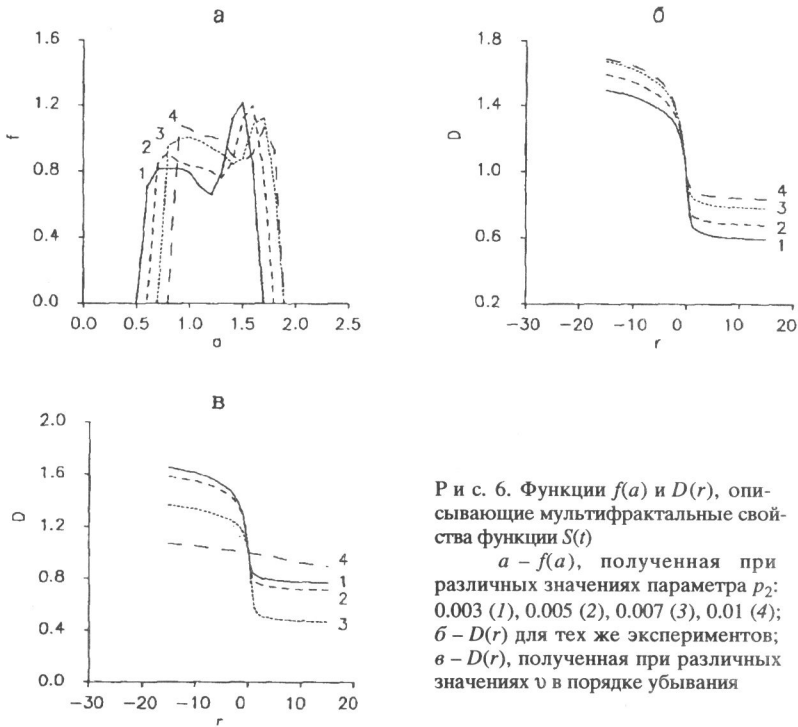
$$D(r) = \frac{\ln \sum p_i^r}{(1-r) \ln(N-8)}, \quad f(a) = \frac{\ln(N^a / \Delta\alpha)}{\ln(N-8)},$$

где  $N^a$  – количество чисел  $p_i$ , для которых  $a = -\ln p_i / \ln N$  попадает в интервал  $[a, a + \Delta\alpha]$ .

На рис. 6 видно, что график  $f(a)$  имеет два максимума, а  $D(r)$  – две горизонтальные асимптоты.

Далее варьировался параметр  $p_2$  (вероятность перехода  $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ ) и скорость распространения **D** внутри **C**. При уменьшении  $p_2$  от 0.01 до 0,003 число событий уменьшается и, следовательно,  $D(r)$  сдвигается вниз, а  $f(a)$  – влево (рис. 6,а). То же происходит при уменьшении скорости распространения (рис. 6,б). Существует также критическое значение вероятности  $P_2$ , зависящее от других вероятностей, при котором





Р и с. 6. Функции  $f(a)$  и  $D(r)$ , описывающие мультифрактальные свойства функции  $S(t)$

$a - f(a)$ , полученная при различных значениях параметра  $p_2$ : 0.003 (1), 0.005 (2), 0.007 (3), 0.01 (4);  
 $b - D(r)$  для тех же экспериментов;  
 $в - D(r)$ , полученная при различных значениях  $\nu$  в порядке убывания

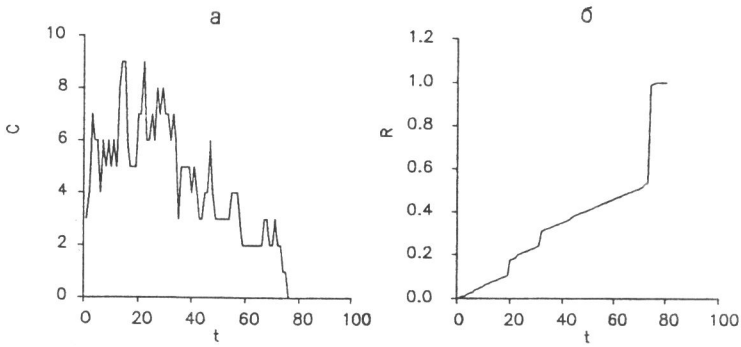
за время  $0 < t < t_{N-8}$  событий не происходит, и график  $D(r)$  вырождается в прямую (рис. 6,б). Таким образом, с каждым типом поведения системы может быть сопоставлена пара чисел – значений, к которым стремится  $D(r)$  при больших и малых  $r$ . Сближение этих чисел характеризует спокойное поведение без крупных событий.

## 7. ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЯ

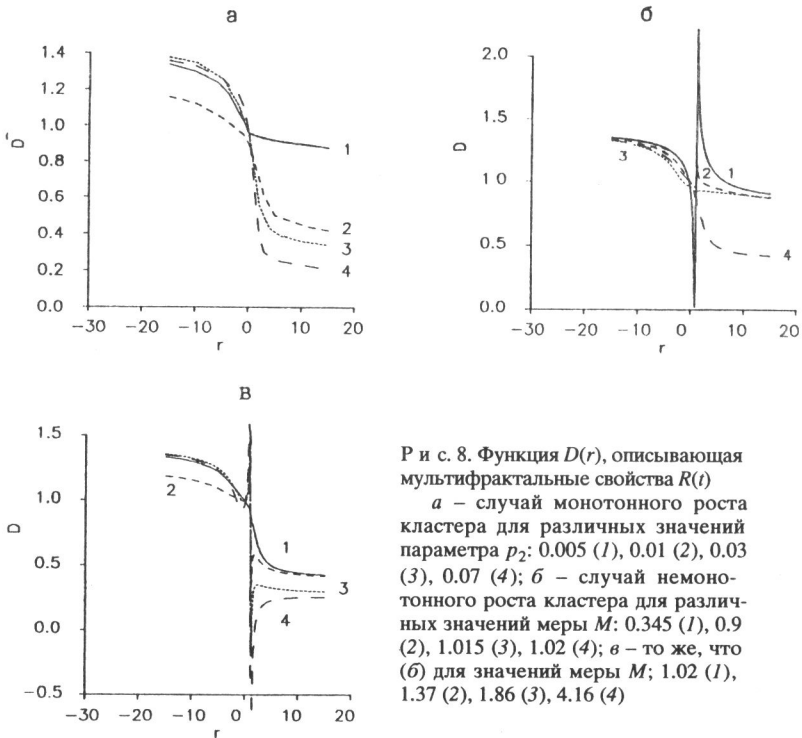
Рассмотрим интервал времени, на котором происходит рост одного из имеющихся кластеров до момента, когда он охватит всю систему. Для описания этого процесса использовались две функции, значения которых в каждый момент времени равны соответственно количеству кластеров в системе  $c(r)$  (рис. 7,а) и относительной доле большего из них  $R(r)$  (отношение длины большего кластера к длине модели) (рис. 7,б).

При достаточно малых  $p_1, p_2$  и  $p_5$  вторая функция почти монотонно возрастает от 0 до 1. При этом с увеличением вероятностей  $p_1$  и  $p_2$  у нее появляются все больше скачков в результате слияния независимо растущих кластеров.

Такую функцию также можно свести к более простой с помощью мультифрактального подхода. Разделим интервал возрастания функции на равные отрезки и примем за меру  $M$  отрезка разность значений функции на его концах. Функция  $D(r)$  для этой меры показана на рис. 8,а. При уменьшении  $p_2$  ее правая ветвь поднимается, а левая слегка опускается, пока  $p_2$  не станет равным критическому значению (0.005 на рисунке), при котором скачков уже нет и расстояние между ветвями  $D(r)$  резко сужается (хотя  $D(r)$  не вырождается в прямую из-за колебаний размера кластера в начале его роста). Малая разность  $D(-\infty) - D(+\infty)$  указывает на то,



Р и с. 7. Пример функции  $c(t)$  (а) и  $R(t)$  (б), описывающих процесс распространения возмущения во времени



Р и с. 8. Функция  $D(r)$ , описывающая мультифрактальные свойства  $R(t)$   
 а – случай монотонного роста кластера для различных значений параметра  $p_2$ : 0.005 (1), 0.01 (2), 0.03 (3), 0.07 (4); б – случай немонотонного роста кластера для различных значений меры  $M$ : 0.345 (1), 0.9 (2), 1.015 (3), 1.02 (4); в – то же, что (б) для значений меры  $M$ : 1.02 (1), 1.37 (2), 1.86 (3), 4.16 (4)

что возмущение росло с постоянной скоростью без существенных объединений. Для разных экспериментов с одними и теми же параметрами картина, однако, может сильно меняться, особенно при значении параметра, близком к критическому.

Размер возмущения может также возрастать не монотонно; возмущение может начать распадаться, а затем расти заново или разделиться пополам, а затем опять слиться. В этом случае приращение меры на отрезке времени можно определить как модуль разности значений функции на его концах или, в общем случае, вариацию функции. В результате мера перестает быть нормированной.

В качестве примера такой мультифрактальной меры можно рассмотреть следующую модель. Пусть отрезок меры 1 делится пополам, и после каждого деления мера умножается на  $m > 0$  и распределяется по подынтервалам в пропорции  $p/q$ .

Продолжая этот процесс, получим для любой итерации  $n$  выражение для  $D_n(r)$ :

$$D_n(r) = \frac{\ln(m^r p^r + m^r q^r)^n}{n(1-r)\ln 2} = \frac{r \ln m + \ln^r(p^r + q)}{(1-r)\ln 2} = D_0(r) + \frac{r}{1-r} \log_2 m = D(r).$$

Таким образом, в результате умножения меры на  $m$  на каждом шаге к монотонной функции  $D_0(r)$  прибавляется гипербола с вертикальной асимптотой в  $r = 1$ , причем для  $m > 1$   $D(r) \rightarrow -\infty$  при  $r \rightarrow 1 + 0$  и  $D(r) \rightarrow +\infty$  при  $r \rightarrow 1 - 0$ , а для  $m > 1$  – наоборот.

Рассмотрим  $D(r)$  функции доли большего кластера  $R(r)$  при различных вариантах процесса роста кластера, а также для стабильного режима. В результате получится картина поведения функции  $D(r)$ , очень близкая к описанной выше картине для мультифрактальной модели (см. рис. 8,б). Если выбрать отрезок времени, на котором вариация  $M$  функции  $R(r)$  (мера отрезка) меньше единицы, левая ветвь  $D(r)$  уходит вниз при  $r \rightarrow 1 - 0$ , правая – вверх. Это обычно соответствует стационарному режиму без крупных событий.

При увеличении  $M$  скачок между ветвями уменьшается и весь график опускается, пока при  $M = 1$  функция не станет монотонной. Это, очевидно, случай монотонного распространения возмущения на весь массив. При дальнейшем увеличении  $M$  ветви  $D(r)$  в точке  $r = 1$  начинают расходиться в другие (по сравнению со случаем  $m < 1$ ) стороны, что соответствует немонотонному варианту развития глобального события (рис. 8,в).

Таким образом, мы снова обнаружили, что "сейсмический" процесс в модели, несмотря на свой очевидно ненормированный характер, поддается простому описанию в слегка модернизированной мультифрактальной технике.

\* \* \*

Предложенная выше конструкция и анализ ее поведения показывают, что модель клеточных автоматов может демонстрировать поведение, качественно совпадающее с поведением модели Барриджа–Кнопова, несмотря на бедность пространства состояний одного элемента. Развитие и характер неустойчивости не связаны, видимо, с конкретными механическими или физическими "тонкостями", а определяются очень грубыми свойствами взаимодействия элементов.

С точки зрения моделирования сейсмичности следует отметить, что эта модель, как и иные одномерные конструкции, может претендовать лишь на грубое описание ситуации на единичном сейсмичном разломе. Явление "делокализации" возмущения, описанное в п. 2, 3, можно сопоставить с "характеристическими" землетрясениями, которые исследовались многими авторами. Развитие такого возмущения в масштабах всей системы в модели может быть, в зависимости от параметров, весьма различным.

Интересно было бы найти аналоги соответствующих "сценариев" развития событий в очаге среди реальных событий.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Burridge R., Knopoff L.* Model and theoretical seismicity // *Bull. Seismol. Soc. Amer.* 1967. Vol. 57. P. 341–356.
2. *Carlson J.M., Langer J.S.* Mechanical model of an earthquake fault // *Phys. Rev.* 1989. A. 40. P. 6470–6479.
3. *Шнирман М.Г.* Многокомпонентные стохастические системы и неустойчивость сейсмического шва // Прогноз землетрясений и изучение строения Земли. М.: Наука, 1982. С. 12–19. (Вычисл. сейсмология; Вып. 15).
4. *Halsey T.C., Jensen M.H., Kadanoff L.P. et al.* Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets // *Phys. Rev.* 1986. A. 33. P. 1141–1151.