

РЕОЛОГИЯ МАНТИИ И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ

Б.И. Биргер

MANTLE RHEOLOGY AND INSTABILITY OF CONVECTIVE FLOW

B.I. Birger

A nonlinear integral rheological model is proposed to describe the rheology of the earth's mantle. For constant stress the model behaves like a power-law non-Newtonian fluid. However, the model differs significantly if stress changes with time, because it has a memory, in contrast with the power-law fluid model. The proposed model is applied to linear stability analysis of large-scale convective circulation in the mantle. The Lorenz equations, a three-mode spatial Fourier expansion of the non-linear thermal convection equations are generalized for non-Newtonian fluid models. In the proposed rheological model, the instability of the lower thermal boundary layer of a whole mantle convective circulation is oscillatory. The period of the boundary layer convective oscillation is about 6×10^7 years.

1. РЕОЛОГИЯ МАНТИИ ЗЕМЛИ

До недавнего времени в геофизической литературе при описании медленных течений в мантии Земли в качестве реологической модели мантии использовалась вязкая ньютоновская жидкость. В рамках этой модели тензор девиатора напряжений связан с тензором девиатора скорости деформации линейным соотношением

$$\sigma_{ij} = 2\eta\dot{\epsilon}_{ij}, \quad (1.1)$$

где η – ньютоновская вязкость. Однако ньютоновская реологическая модель не соответствует результатам лабораторных исследований ползучести мантийных пород, проводимых при температурах и давлениях, характерных для земных недр.

В последние годы для исследования медленных течений и, в частности, конвективных течений в мантии обычно применяется реологическая модель степенной неньютоновской жидкости, представляемая нелинейным законом

$$\dot{\epsilon}_{ij} = B\sigma^{n-1}\sigma_{ij}, \quad \sigma = (\sigma_{kl}\sigma_{kl} / 2)^{1/2}, \quad (1.2)$$

где σ – второй инвариант тензора девиатора напряжений; B – реологический параметр. Типичным значением показателя n для мантийных пород является $n = 3$. Модель степенной жидкости хорошо описывает лабораторные эксперименты при постоянных девиаторных напряжениях и достаточно больших деформациях (установившаяся ползучесть). Поэтому применение данной модели для исследования стационарной мантийной конвекции, связанной с постоянными напряжениями и большими деформациями, не вызывает возражений. Но при рассмотрении нестационарной конвекции правомерность использования модели степенной жидкости сомнительна. Действительно, в рамках этой модели, как и для модели ньютоновской жидкости, напряжение в текущий момент времени полностью определяется текущим значением скорости деформации, т.е. деформациями, существовавшими в бесконечно короткий период времени, предшествующий текущему моменту. Для реального же материала напряжение в текущий момент определяется всей предьсторией деформации, иными словами, реальный материал (в отличие от ньютоновской и степенной моделей) обладает памятью.

В работе [1] в качестве универсальной реологической модели мантии, справедливой при любых напряжениях, деформациях и временных масштабах, предложена не-

линейная наследственная (обладающая памятью) реологическая модель, описываемая уравнением

$$2\varphi(\varepsilon)\varepsilon_{ij} = \int_0^t K(t-t_1)\sigma_{ij}(t_1)dt_1. \quad (1.3)$$

Здесь ε_{ij} – тензор девиатора деформаций; ε – второй инвариант этого тензора, называемый интенсивностью деформаций, $\varepsilon = (2\varepsilon_{kl}\varepsilon_{kl})^{1/2}$; $K(t)$ – интегральное ядро ползучести

$$K(t) = \frac{m}{A}t^{m-1}, \quad (1.4)$$

где A – реологический параметр, а характерное для мантии значение показателя $m = 1/3$. Функция $\varphi(\varepsilon)$, определяющая нелинейность модели, обладает предельными свойствами

$$\varphi(\varepsilon) \equiv 1, \quad \varepsilon \ll \varepsilon_{tr}, \quad (1.5)$$

$$\varphi(\varepsilon) = (\varepsilon / \varepsilon_{tr})^{m-1}, \quad \varepsilon \gg \varepsilon_{tr},$$

где ε_{tr} – переходное значение интенсивности деформаций. Когда $\varepsilon \ll \varepsilon_{tr}$, исходный нелинейный реологический закон (3)* сводится к линейному интегральному реологическому соотношению, соответствующему Больцмановской теории наследственности. Положив в данном соотношении $\sigma_{ij} = \text{const}$, приходим к известному

$$\text{реологическому закону Андраде } 2\varepsilon_{ij} = \frac{t^m}{A}\sigma_{ij},$$

хорошо описывающему неустановившуюся ползучесть мантийных пород, наблюдаемую в лабораторных экспериментах при достаточно малых деформациях и постоянном напряжении. Реологическую модель, получаемую из (3) при $\varphi(\varepsilon) \equiv 1$, можно назвать моделью Андраде [2]. Интегральное ядро (4) в этой модели выбрано таким образом, чтобы при постоянных напряжениях модель приводила к закону Андраде.

Когда $\varepsilon \gg \varepsilon_{tr}$, уравнение (3) приводит к нелинейному наследственному реологическому соотношению

$$2(\varepsilon / \varepsilon_{tr})^{m-1}\varepsilon_{ij} = \int_0^t K(t-t_1)\sigma_{ij}(t_1)dt_1, \quad (1.6)$$

описывающему реологию мантии при больших деформациях. Положив в уравнении (6) $\sigma_{ij} = \text{const}$, приходим к соотношению (2), описывающему установившуюся ползучесть, в котором

$$n = 1/m, \quad 1/2B = \varepsilon_{tr}^{n-1}A^n. \quad (1.7)$$

Таким образом, реологическая модель (3), которая будет применяться в настоящей работе, в случае постоянных напряжений совпадает с реологической моделью степенной жидкости, причем соотношения (7) устанавливают связь между параметрами A, m , характеризующими неустановившуюся ползучесть в рамках модели Андраде, и параметрами B, n , характеризующими установившуюся ползучесть в рамках модели степенной жидкости.

* В статье использована двойная нумерация формул. Первая цифра означает номер раздела, вторая – номер формулы в данном разделе. При ссылках на формулы текущего раздела первая цифра в нумерации опускается.

В уравнениях, выписанных выше, ε_{ij} – деформация, связанная с дислокационной ползучестью. Полная деформация E_{ij} может быть представлена в виде суммы деформации дислокационной ползучести, деформации диффузионной ползучести и упругой деформации. Чтобы учесть диффузионную ползучесть, описываемую обычной ньютоновской моделью (1), и упругость, достаточно в уравнении (3) сделать замену

$$\varepsilon_{ij} = E_{ij} - \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} - \frac{1}{2\eta_0} \int \sigma_{ij}(t_1) dt_1, \quad (1.8)$$

где μ – упругий модуль сдвига; η – ньютоновская вязкость, обусловленная диффузионной ползучестью. Как показано в работах [1, 3], деформации диффузионной ползучести для конвективного течения в нижней мантии пренебрежимо малы по сравнению с деформациями дислокационной ползучести (для верхней мантии это не так). Пренебрежимо малы для конвективных течений в мантии и упругие деформации. Поэтому, хотя полное математическое описание введенной реологической модели мантии дается уравнениями (3), (8), в дальнейшем, рассматривая медленные конвективные течения в нижней мантии, связанные с большими деформациями, в качестве реологического уравнения будем использовать соотношение (6).

2. РЕОЛОГИЯ НАЛОЖЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ

Большинство известных геофизических процессов связано с деформациями в мантии, малыми по сравнению с огромными деформациями, вызываемыми крупномасштабной тепловой конвекцией. Следовательно, конвективное течение в мантии можно рассматривать как основное, на которое наложены течения, определяемые другими процессами. В работе [1] в качестве примера такого рода процессов рассматривалось распространение затухающих сейсмических волн и послеледниковое движение в мантии. В настоящей работе будет рассмотрен новый пример процесса, связанного с малодеформационным наложенным течением, – возникновение неустойчивости стационарного конвективного течения.

Деформации и напряжения представим в виде

$$\varepsilon_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij} + \varepsilon'_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \sigma'_{ij}, \quad (2.1)$$

где черта сверху означает основное стационарное течение, а штрих – наложенное течение. Подставляя (1) в (1.6) и принимая во внимание, что $\varepsilon'_{ij} \ll \bar{\varepsilon}_{ij}$, получаем линейное анизотропное реологическое соотношение для наложенного течения

$$2C_{ijkl} \varepsilon'_{kl} = (\bar{\varepsilon} / \varepsilon_{tr})^{1-m} \int_{t_0}^t K(t-t_1) \sigma'_{ij}(t_1) dt_1, \quad (2.2)$$

$$C_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} - 2(1-m) \bar{\varepsilon}_{ij} \bar{\varepsilon}_{kl} / \bar{\varepsilon}^2, \quad (2.3)$$

где нижний предел интегрирования t_0 обозначает момент возникновения наложенного течения. Так как основное течение стационарно, скорости деформации $\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}$ постоянны во времени и, следовательно, $\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\varepsilon}} t$, где $\dot{\bar{\varepsilon}} = \text{const}$. В дальнейшем будем использовать только значение $m = 1/3$ и, как следует из (1.7), $n = 3$. Подчеркнем, что в рамках используемой наследственной модели реология стационарного течения ничем не отличается от реологии, описываемой моделью степенной жидкости, реологические параметры которой B, n связаны с параметрами наследственной модели соотношениями (1.7). Реологический закон (1.2) для степенной жидкости, описывающий

стационарное конвективное течение, удобно переписать в виде

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2(2B)^{-1/3} (\dot{\bar{\epsilon}})^{-2/3} \dot{\bar{\epsilon}}_{ij}. \quad (2.4)$$

Сравнивая (4) и (1.1), можно ввести эффективную вязкость $\bar{\eta}$ стационарного течения

$$\bar{\eta} = (2B)^{-1/3} (\dot{\bar{\epsilon}})^{-2/3}. \quad (2.5)$$

Учитывая соотношения (1.4), (1.7), (5), реологическое уравнение (2) для наложенного течения можно представить в виде

$$2\bar{\eta} C_{ijkl} \dot{\epsilon}'_{kl} = \frac{t^{2/3}}{3} \int_{t_0}^t (t-t_1)^{-2/3} \sigma'_{ij}(t_1) dt_1. \quad (2.6)$$

Подставляя (1) в (1.2), получаем реологическое соотношение для наложенного течения в рамках модели степенной жидкости

$$2\bar{\eta} C_{ijkl} \dot{\epsilon}'_{kl} = \sigma'_{ij}. \quad (2.7)$$

Таким образом, хотя наша наследственная модель и модель степенной жидкости приводят к одному и тому же уравнению (4) для основного течения, реологические уравнения (6) и (7), получаемые в рамках этих моделей для наложенного течения, существенно отличаются.

При анализе устойчивости стационарного течения, который будет проведен в следующих разделах работы, исследуется поведение возмущений, экспоненциально зависящих от времени. Представим возмущение напряжения, связанное с наложенным течением, в виде

$$\sigma'_{ij} = \Sigma'_{ij} \exp \lambda(t-t_0). \quad (2.8)$$

Подставив (8) в (6) и сделав замену $y = \lambda(t-t_1)$, преобразуем интеграл в правой части уравнения (6)

$$\int_{t_0}^t (t-t_1)^{-2/3} \sigma'_{ij}(t_1) dt_1 = \Sigma'_{ij} \lambda^{-1/3} \exp \lambda(t-t_0) \int_0^{\lambda(t-t_0)} y^{-2/3} e^{-y} dy. \quad (2.9)$$

Последний интеграл представляет собой неполную гамма-функцию

$$\int_0^{\lambda(t-t_0)} y^{-2/3} e^{-y} dy = \gamma(1/3, \lambda(t-t_0)). \quad (2.10)$$

Напомним, что неполная гамма-функция определена как

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x y^{\alpha-1} e^{-y} dy, \quad \text{Re } \alpha > 0,$$

причем $\nu(\alpha, \infty) = \Gamma(\alpha)$, где $\Gamma(\alpha)$ – обычная гамма-функция. Неполная гамма-функция обладает следующими асимптотическими свойствами [4]:

$$\gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha), \quad |x| \gg 1, \quad (2.11)$$

$$\gamma(\alpha, x) = x^\alpha / \alpha, \quad |x| \ll 1.$$

Подставляя (9), (10) в уравнение (6) и дифференцируя по t , преобразуем уравнение для наложенного течения к виду

$$2\bar{\eta} F(\lambda, t) C_{ijkl} \dot{\epsilon}'_{kl} = \sigma'_{ij}. \quad (2.12)$$

Уравнение (12) отличается от уравнения (7), полученного для степенной жидкости, только функцией $F(\lambda, t)$. Используя асимптотические свойства (11) неполной гамма-функции, аргументы которой в нашем случае $\alpha = 1/3$, $x = \lambda(t-t_0)$, и приближенную оценку $\Gamma(1/3) \cong 3$, находим

$$F(\lambda, t) = (t\lambda)^{-2/3}, \quad |\lambda|(t-t_0) \gg 1, \quad (2.13)$$

$$F(\lambda, t) = \frac{3(t-t_0)^{2/3} t^{-2/3}}{1+2(t-t_0)/t}, \quad |\lambda|(t-t_0) \ll 1. \quad (2.14)$$

Представляя t в виде $t = t_0 + (t-t_0)$ и накладывая дополнительные ограничения на $t-t_0$, перепишем (13), (14) в виде

$$F(\lambda, t) = (t_0\lambda)^{-2/3}, \quad 1/|\lambda| \ll t-t_0 \ll t_0, \quad (2.15)$$

$$F(\lambda, t) \cong 1, \quad t_0 \ll t-t_0 \ll 1/|\lambda|. \quad (2.16)$$

Итак, получены две простые асимптотики для функции $F(\lambda, t)$, характеризующей реологию наложенного течения. Первая асимптотика (15) будет существенно использована в настоящей работе. Вторая асимптотика (16) приводит к реологии степенной жидкости (7), что естественно, поскольку при $|\lambda|(t-t_0) \ll 1$ возмущение напряжения (8) можно считать постоянным во времени. Но к анализу устойчивости вторая асимптотика отношения не имеет (за исключением случая, когда $\lambda = 0$), так как смысл этого анализа сводится к изучению поведения системы на достаточно больших ($|\lambda|(t-t_0) \gg 1$) временах, прошедших с момента начального возмущения.

3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ КОНВЕКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ ЛОРЕНЦА

Уравнения тепловой конвекции. Прежде, чем исследовать устойчивость конвективного движения в неньютоновской реологической среде, рассмотрим подобную задачу для обычной ньютоновской жидкости. Уравнения тепловой конвекции в приближении Буссинеска [5] выписываются в виде

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \quad (3.1)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \text{Ra} \theta = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_z \frac{\partial \theta}{\partial z} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \theta = 0, \quad (3.4)$$

где v_x, v_z – компоненты скорости; θ, p – отклонения температуры и давления от их равновесных значений, а компоненты девиатора напряжений связаны со скоростями реологическим законом (1.1). Все переменные в уравнениях (1)–(4) – безразмерные. В качестве масштаба длины принята толщина конвективного слоя d ; масштаб скорости – κ/d ; времени – d^2/κ , где κ – температуропроводность; масштаб напряжения – $\eta\kappa/d^2$, где η – вязкость; масштаб температуры – перепад температуры ΔT между нижней и

верхней изотермическими границами слоя. Число Рэлея Ra определяется как

$$Ra = \alpha \rho g \Delta T d^3 / \eta \kappa, \quad (3.5)$$

где α – коэффициент теплового расширения; ρ – плотность; g – ускорение силы тяжести. Число Прандтля для мантии предполагается бесконечно большим, поэтому в уравнениях движения (1), (2) опущены инерционные члены, и единственным источником нелинейности является уравнение теплового баланса (4). Нижняя и верхняя границы слоя предполагаются "свободными": на них отсутствуют вертикальные скорости и касательные напряжения. Выписывая уравнения (1)–(4), мы ограничиваемся рассмотрением только двумерных конвективных движений в плоскости xz .

Уравнения Лоренца. Искомые физические переменные $p, \sigma_{ij}, v_i, \theta$ можно представить в виде двойных рядов Фурье по x и z . Подставляя данные разложения в уравнения (1)–(4), получаем для бесконечного набора коэффициентов Фурье, зависящих только от времени, бесконечную систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Лоренц предложил для приближенного описания тепловой конвекции ограничиться только первыми членами в разложении Фурье

$$\theta = \theta_{11} \sin \pi z \cos kx - \theta_{02} \sin 2\pi z, \quad (3.6)$$

$$v_z = v_{11} \sin \pi z \cos kx,$$

где k – безразмерное волновое число, характеризующее периодичность конвективного движения по горизонтали. Подставляя (6) в (1)–(3), находим

$$v_x = -\frac{\pi}{k} v_{11} \cos \pi z \sin kx, \quad (3.7)$$

$$v_{11} = k^2 Ra \theta_{11} / \tilde{k}^4, \quad (3.8)$$

где введено обозначение $\tilde{k}^2 = \pi^2 + k^2$. Подставляя (6) в нелинейное уравнение (4), получаем

$$\dot{\theta}_{11} = v_{11} - \tilde{k}^2 \theta_{11} - \pi v_{11} \theta_{02}, \quad (3.9)$$

$$\dot{\theta}_{02} = -4\pi^2 \theta_{02} + \frac{\pi}{2} v_{11} \theta_{11}.$$

В случае конечного числа Прандтля получаются три дифференциальных уравнения для переменных $\theta_{11}, \theta_{02}, v_{11}$; в рассматриваемом же случае бесконечного числа Прандтля ($Pr = \infty$) одно из дифференциальных уравнений заменяется простым алгебраическим соотношением (8), подставляя которое в (9), приходим к уравнениям Лоренца для $Pr = \infty$

$$\dot{\theta}_{11} = \left(Ra \frac{k^2}{\tilde{k}^4} - \tilde{k}^2 \right) \theta_{11} - \frac{\pi k^2 Ra}{\tilde{k}^4} \theta_{11} \theta_{02}, \quad (3.10)$$

$$\dot{\theta}_{02} = -4\pi^2 \theta_{02} + \frac{\pi k^2 Ra}{2\tilde{k}^4} \theta_{11}^2.$$

Уравнения (10) отличаются от обычно принятой формы записи уравнений Лоренца наличием множителя 2 в знаменателе последней формулы. Различие связано с тем, что мы не вводили множитель $\sqrt{2}$ перед θ_{11} в первой из формул (6).

Стационарное решение. Положив в (10) $\dot{\theta}_{11} = \dot{\theta}_{02} = 0$, получаем систему алгебраических уравнений, описывающих стационарную конвекцию (переменные, характе-

ризирующие стационарное течение, обозначаем, как и ранее, чертой сверху). Решая эти уравнения, находим

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_{02} &= \frac{\tilde{k}^6}{\pi \text{Ra} k^2} \left(\frac{\text{Ra} k^2}{\tilde{k}^6} - 1 \right), \\ \bar{\theta}_{11} &= \frac{2^{3/2} \tilde{k}^5}{\text{Ra} k^2} \left(\frac{\text{Ra} k^2}{\tilde{k}^6} - 1 \right)^{1/2}, \\ \bar{v}_{11} &= 2^{3/2} \tilde{k} \left(\frac{\text{Ra} k^2}{\tilde{k}^6} - 1 \right)^{1/2}.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Стационарному решению (11) соответствует число Нуссельта

$$\text{Nu} = 1 + 2 \frac{\tilde{k}^6}{\text{Ra} k^2} \left(\frac{\text{Ra} k^2}{\tilde{k}^6} - 1 \right).\tag{3.12}$$

Число Нуссельта определяется как отношение количества тепла, выносимого через верхнюю границу слоя процессами конвекции и теплопроводности, к количеству тепла, выносимому только за счет теплопроводности. Если бы в разложении (6) для θ не учитывался второй член $\theta_{02} \sin 2\pi z$, мы получили бы, что $\text{Nu} = 1$, т.е. нет конвективного выноса тепла, хотя и есть конвективное движение. Данная ситуация имеет место в линейной теории конвективной устойчивости, уравнения которой получаются при линеаризации системы уравнений (1)–(4).

В линейной теории устойчивости вводится критическое число Рэлея $\text{Ra}_{\text{cr}}(k)$. Только, когда $\text{Ra} > \text{Ra}_{\text{cr}}(k)$, гидростатическое равновесие становится неустойчивым по отношению к возмущениям с волновым числом k . Для рассматриваемого случая, когда слой ньютоновской жидкости имеет свободные изотермические границы, $\text{Ra}_{\text{cr}}(k) = \tilde{k}^6 / k^2$. Минимум этой функции достигается при $k = k_m = \pi / \sqrt{2}$, а минимальное критическое число Рэлея – $\text{Ra}_m = 27\pi^4 / 4$. Конвективная мода, для которой $k = k_m$, является наиболее неустойчивой по сравнению с другими модами при $\text{Ra} > \text{Ra}_m$ (при $\text{Ra} < \text{Ra}_m$ гидростатическое равновесие устойчиво для любого k), поэтому можно считать, что и развитая стационарная конвекция характеризуется волновым числом $k = \pi / \sqrt{2}$. Если в формулах (11), (12) положить $k = \pi / \sqrt{2}$ и учесть, что $\tilde{k}^6 / k^2 = \text{Ra}_m$, нетрудно убедиться, что (11), (12) в точности совпадают с результатами, получаемыми при решении уравнений (1)–(4) методом разложения по малому параметру $((\text{Ra} - \text{Ra}_m) / \text{Ra}_m)^{1/2}$, характеризующему слабую надкритичность [2].

Устойчивость стационарного решения. Для исследования устойчивости найденного стационарного решения (11) будем искать решение уравнений (10) в виде

$$\theta_{11} = \bar{\theta}_{11} + \theta'_{11} \exp \lambda t, \quad \theta_{02} = \bar{\theta}_{02} + \theta'_{02} \exp \lambda t.\tag{3.13}$$

Линеаризуя по малым θ'_{11} , θ'_{02} уравнения, получаемые при подстановке (13) в (10), и приравнявая нулю определитель системы линейных однородных алгебраических уравнений, приходим к характеристическому уравнению для декрементов λ

$$\lambda^2 + 4\pi^2 \lambda + 8\pi^2 \tilde{k}^2 (\text{Ra} k^2 / \tilde{k}^6 - 1) = 0.\tag{3.14}$$

Решение (14) при $k = \pi / \sqrt{2}$ имеет вид

$$\lambda = -2\pi^2 \pm 4\pi^2 (1 - \text{Ra} / 9\pi^4)^{1/2}.\tag{3.15}$$

Как следует из (15), стационарное решение (11) является неустойчивым при $Ra < 27\pi^4/4$ (в этом случае устойчивым является состояние гидростатического равновесия слоя). При $27\pi^4/4 < Ra < 9\pi^4$ имеет место монотонная устойчивость решения (11), при которой $Re\lambda < 0, Im\lambda = 0$. Наконец, при $Ra > 9\pi^4$ реализуется колебательная устойчивость ($Re\lambda < 0, Im\lambda = \omega \neq 0$). Как следует из последнего равенства (11), при $k = \pi/\sqrt{2}$,

$$Ra = \bar{v}_{11}^2 9\pi^2 / 16 + 27\pi^4 / 4. \quad (3.16)$$

Подставляя (16) в (15), находим

$$\omega = 4\pi^2 (Ra/9\pi^4 - 1)^{1/2} = 2\pi^2 (\bar{v}_{11}^2 / 4\pi^2 - 1)^{1/2}, \quad (3.17)$$

причем колебательная устойчивость имеет место только при $\bar{v}_{11} > 2\pi$. Если $\bar{v}_{11} \gg 2\pi$, из (15), (17) следует

$$\lambda = -2\pi^2 \pm i\pi\bar{v}_{11}. \quad (3.18)$$

В этом случае $Re\lambda \ll Im\lambda$, т.е. колебание затухает очень слабо.

Конвективные колебания в слое ньютоновской жидкости, моделирующем мантию Земли, исследовались в численных экспериментах [7–10], где были найдены решения уравнений (1)–(4) при различных значениях числа Рэлея. В этих исследованиях было показано, что с ростом Ra стационарная конвекция становится неустойчивой и сменяется конвективными колебаниями, а при дальнейшем возрастании Ra конвективные колебания, в свою очередь, становятся неустойчивыми и происходит хаотизация. Близкие результаты [6] получаются и в том случае, когда решение ищется в виде рядов Фурье, но в разложении удерживается большее число членов, чем в формулах (6), приводящих к уравнениям Лоренца. В случае же, когда используются, как сделано выше, представления (6) для температуры и скорости и уравнения Лоренца, стационарное решение остается устойчивым при любых числах Рэлея и бесконечном числе Прандтля. Это, конечно, недостаток применяемого метода, который частично искупается его простотой и тем, что найденные частоты конвективных колебаний (17) по порядку величины близки к частотам, которые определяются в работах [6–10] в результате сложных и громоздких численных решений.

4. УРАВНЕНИЯ ЛОРЕНЦА ДЛЯ СТЕПЕННОЙ ЖИДКОСТИ

Вывод уравнений Лоренца и их стационарное решение. Конвекция в слое степенной жидкости описывается уравнениями (3.1)–(3.4), к которым добавляется нелинейное реологическое уравнение (1.2). Для перехода к уравнениям Лоренца используем, как и для ньютоновской жидкости, разложения (3.6), (3.7), которые приводят к системе уравнений (3.9), справедливых независимо от выбираемой реологии. Уравнение же (3.8) справедливо только для ньютоновской модели, и нам необходимо установить соотношение между v_{11} и θ_{11} , заменяющее (3.8) в случае степенной жидкости.

Как следует из (3.6), (3.7), компоненты тензора дивергента скоростей деформации записываются как

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial x} = \pi v_{11} \cos \pi z \cos kx, \\ \dot{\epsilon}_{xx} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\pi v_{11} \cos \pi z \cos kx, \\ \dot{\epsilon}_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = \frac{\pi^2 - k^2}{2k} v_{11} \sin \pi z \sin kx, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\dot{\epsilon} = 2\pi\nu_{11}(\cos^2 \pi z \cos^2 kx + \beta^2 \sin^2 \pi z \sin^2 kx)^{1/2}, \quad (4.2)$$

где β является функцией волнового числа

$$\beta = (\pi^2 - k^2) / 2\pi k. \quad (4.3)$$

Рассмотрение задачи о степенной жидкости будем проводить в безразмерных переменных, используя те же масштабы, которые были введены в предыдущем разделе для ньютоновской жидкости, причем в качестве отсчетной вязкости будем использовать

$$\eta_r = (2B)^{-1/3} (d^2 / \kappa)^{2/3}. \quad (4.4)$$

Данная величина определяется через реологический параметр B модели степенной жидкости и имеет размерность ньютоновской вязкости. В безразмерных переменных реологический закон для степенной жидкости принимает вид

$$\sigma_{ij} = 2(\dot{\epsilon})^{-2/3} \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (4.5)$$

Подставляя (1), (2) в (5), раскладывая правую часть в ряд Фурье и ограничиваясь только первым членом в разложении, получаем

$$\sigma_{zz} = -\sigma_{xx} = (2\pi\nu_{11})^{1/3} A_1 \cos \pi z \cos kx, \quad (4.6)$$

$$\sigma_{xz} = (2\pi\nu_{11})^{1/3} \beta A_2 \sin \pi z \sin kx,$$

где A_1 и A_2 – коэффициенты Фурье:

$$A_1 = 4 \frac{k}{\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi/k} \frac{\cos^2 \pi z \cos^2 kx dz dx}{(\cos^2 \pi z \cos^2 kx + \beta^2 \sin^2 \pi z \sin^2 kx)^{1/3}}, \quad (4.7)$$

$$A_2 = 4 \frac{k}{\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi/k} \frac{\sin^2 \pi z \sin^2 kx dz dx}{(\cos^2 \pi z \cos^2 kx + \beta^2 \sin^2 \pi z \sin^2 kx)^{1/3}}.$$

Чтобы найти искомое соотношение между температурой и скоростью, исключим p из уравнений (3.1), (3.2) и воспользуемся тем, что $\sigma_{xx} = -\sigma_{zz}$. В результате получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \sigma_{xz} - 2 \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial x \partial z} = \text{Ra} \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (4.8)$$

Подставляя (6) и (3.6) в (8), находим

$$\theta_{11} = c \tilde{k}^4 \nu_{11}^{1/3} / k^2 \text{Ra}, \quad (4.9)$$

где зависящий от k коэффициент c определен следующим образом:

$$\tilde{k}^4 (2\pi)^{-4/3} c / k^2 = A_1 + \beta^2 A_2 = \quad (4.10)$$

$$= 4 \frac{\pi}{k} \int_0^1 \int_0^{\pi/k} (\cos^2 \pi z \cos^2 kx + \beta^2 \sin^2 \pi z \sin^2 kx)^{2/3} dz dx,$$

т.е. параметр c в соотношении (9) пропорционален усредненному по конвективной ячейке значению $\dot{\epsilon}^{4/3}$.

При $k = \pi$, т.е. для изометрической конвективной ячейки, коэффициент β ,

определяемый формулой (3), равен нулю, а, следовательно, $\dot{\epsilon}_{xz} = \sigma_{xz} = 0$. При k , близких π , можно рассматривать β^2 как малый параметр (даже при $k = \pi/\sqrt{2}$ его значение $-1/8$). Линеаризуя по малому β^2 подинтегральную функцию в формуле (10), находим

$$c = 9\pi^{-8/3}(1 + 6\beta^2). \quad (4.11)$$

При вычислении интегралов было использовано равенство [4]

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{a-1} x dx = 2^{a-2} B(a/2, a/2),$$

где B – бета-функция, просто связанная с уже использовавшейся выше гамма-функцией $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$.

Исключая теперь v_{11} из уравнений (3.9) и (9), получаем систему уравнений для переменных θ_{11} , θ_{02}

$$\dot{\theta}_{11} = R\theta_{11}^3 - \tilde{k}^2\theta_{11} - \pi R\theta_{11}^3\theta_{02}, \quad (4.12)$$

$$\dot{\theta}_{02} = -4\pi^2\theta_{02} + \frac{\pi}{2}R\theta_{11}^4,$$

где введено обозначение

$$R = (Ra k^2 / c\tilde{k}^4)^{1/3}. \quad (4.13)$$

Уравнения (12) могут быть названы уравнениями Лоренца для степенной жидкости. Их стационарное решение можно представить как

$$\bar{\theta}_{02} = R\bar{\theta}_{11}^4 / 8\pi, \quad (4.14)$$

$$R^2\bar{\theta}_{11}^6 / 8 - R\bar{\theta}_{11}^2 + \tilde{k}^2 = 0. \quad (4.15)$$

Подставляя в (15) равенства (13) и (9), получаем важное соотношение между числом Рэлея и скоростью \bar{v}_{11} конвективного течения, позволяющее построить бифуркационную кривую,

$$Ra = \bar{v}_{11}^{-2/3}(\bar{v}_{11}^2 / 8 + \tilde{k}^2)c\tilde{k}^4 / k^2. \quad (4.16)$$

Характер бифуркационной кривой, соответствующий зависимости (16), показан на рисунке.

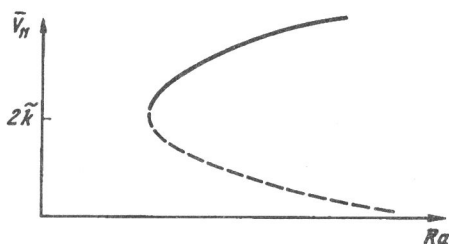
Устойчивость стационарного решения. Линейный анализ устойчивости стационарного решения, проводимый на основе уравнений (12)–(15) точно так же, как для ньютоновской жидкости, приводит к характеристическому уравнению для декрементов

$$\lambda^2 + (4\pi^2 - 2\tilde{k}^2)\lambda + 2\pi^2(\bar{v}_{11}^2 - 4\tilde{k}^2) = 0. \quad (4.17)$$

Отметим, что уравнения (12)–(17) справедливы для произвольных значений k , для которых функция $c(k)$ определяется формулой (10), а не только для $k = \pi$, при которых справедливо соотношение (11).

Для того, чтобы корни квадратного уравнения (17) имели отрицательную действительную часть (устойчивость), необходима и достаточна положительность коэффициентов этого уравнения, из которой следует: $k < \pi$ и $\bar{v}_{11} > 2\tilde{k}$. Верхняя ветвь бифуркационной кривой определяется условием $\bar{v}_{11} > 2\tilde{k}$, а нижняя – условием

$\bar{v}_{11} < 2\tilde{k}$, что нетрудно показать, находя минимум по \bar{v}_{11} правой части уравнения (16). Таким образом, анализ устойчивости стационарного решения показывает, что нижняя ветвь бифуркационной кривой, представленная на рисунке пунктирной линией, соответствует неустойчивому стационарному решению. Действительно, для нижней ветви кривой с ростом числа Рэлея интенсивность конвекции, характеризуемая



скоростью \bar{v}_{11} , уменьшается, а такого рода решения уравнений конвекции всегда являются неустойчивыми [11] и не реализуются в натуральных экспериментах. Решение, соответствующее верхней ветви бифуркационной кривой, является устойчивым только при условии $k < \pi$, т.е. для достаточно сильно вытянутых по горизонтали конвективных ячеек. То, что в степенной жидкости скорее, чем в ньютоновской, могут реализовываться вытянутые ячейки (а именно вытянутые ячейки характерны для конвекции в мантии Земли), отмечено и в численных экспериментах [12].

Положим $k = \pi/\sqrt{2}$, как в случае ньютоновской жидкости. Тогда решение характеристического уравнения (17) имеет вид

$$\lambda = -\pi^2 / 2 \pm \sqrt{2\pi(49\pi^2 / 8 - \bar{v}_{11}^2)^{1/2}}. \quad (4.18)$$

Как следует из (18), при $\bar{v}_{11}^2 < 6\pi^2$ (это нижняя ветвь бифуркационной кривой) имеет место неустойчивость, при $6\pi^2 < \bar{v}_{11}^2 < 49\pi^2 / 8$ – монотонная устойчивость, а при $\bar{v}_{11}^2 > 49\pi^2 / 8$ – колебательная устойчивость. Если $\bar{v}_{11}^2 \geq 49\pi^2 / 8$, декремент λ определяется как

$$\lambda = -\pi^2 / 2 \pm i\sqrt{2\pi}\bar{v}_{11}, \quad (4.19)$$

что незначительно отличается от результата (3.18), полученного для ньютоновской жидкости.

Эффективная однородная вязкость. Сравнивая соотношение (9) для степенной жидкости с аналогичным соотношением (3.8) для ньютоновской жидкости и учитывая, что число Рэлея в формуле (9) определено через отсчетную вязкость (4), нетрудно установить, что в рамках используемого метода решения, который можно назвать методом Лоренца, эффективная вязкость степенной жидкости определяется как

$$\bar{\eta} = \eta_r c \bar{v}_{11}^{-2/3}. \quad (4.20)$$

Формула (20) выписана для случая стационарного конвективного течения, обозначаемого чертой сверху, но она справедлива и для нестационарного течения. Формула, аналогичная (20), может быть получена из равенства (2.5) путем замены инварианта $\dot{\epsilon}$, зависящего от x и z , неким постоянным усредненным значением. В настоящем разделе работы было показано как правильно проводить такое усреднение в рамках применяемого метода Лоренца.

5. УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОЙ КОНВЕКЦИИ В НАСЛЕДСТВЕННОЙ СРЕДЕ

Переходя к исследованию устойчивости конвективного течения в рамках наследственной реологической модели мантии, введенной в двух первых разделах работы, напомним, что в случае стационарной конвекции данная модель ничем не отличается от модели степенной жидкости. Поэтому формулы (4.14)–(4.16), полученные для стационарного течения, справедливы и в рамках наследственной модели, однако результаты анализа устойчивости данного стационарного решения могут существенно отличаться.

Исследуя устойчивость, представим скорость в виде

$$v_{11} = \bar{v}_{11} + v'_{11} \exp \lambda(t - t_0), \quad (5.1)$$

а θ_{11} , θ_{02} – в виде (3.13), где t следует заменить на $t - t_0$ (время отсчитывается от момента возникновения возмущения). Подставляя (1) и (3.13) в (3.9) и линеаризуя по малым возмущениям θ'_{11} , θ'_{02} , v'_{11} , получаем систему уравнений для линейного анализа устойчивости

$$\lambda \theta'_{11} = v'_{11} - \tilde{k}^2 \theta'_{11} - \pi \bar{v}_{11} \theta'_{02} - \pi \bar{\theta}_{02} v'_{11}, \quad (5.2)$$

$$\lambda \theta'_{02} = -4\pi^2 \theta'_{02} + \pi \bar{v}_{11} \theta'_{11} / 2 + \pi \bar{\theta}_{11} v'_{11} / 2.$$

Чтобы замкнуть данную систему уравнений, нужно установить связь между θ'_{11} и v'_{11} . Для модели степенной жидкости, подставляя (1), (3.13) в (4.9), находим

$$v'_{11} = \frac{3k^2 \text{Ra}}{c\tilde{k}^4} \bar{v}_{11}^{2/3} \theta'_{11}. \quad (5.3)$$

Из равенства (3) следует, что эффективная вязкость наложенного течения в три раза ниже, чем эффективная вязкость $\bar{\eta}$ основного течения, определяемая формулой (4.20). Тот же результат, естественно, получается и из уравнений (2.3), (2.7), если подставить в эти уравнения компоненты тензора девиатора скоростей деформаций (4.1).

Для наследственной реологической модели, как следует из (2.12), (2.15), соотношение (3) нужно заменить на

$$v'_{11} = \frac{3k^2 \text{Ra}}{c\tilde{k}^4} \bar{v}_{11}^{2/3} (t_0 \lambda)^{2/3} \theta'_{11}, \quad t_0 |\lambda| \gg 1. \quad (5.4)$$

Подставляя (4) в (2) и приравнявая нулю определитель полученной системы уравнений, находим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \left(4\pi^2 + \tilde{k}^2 - 3\tilde{k}^2 (t_0 \lambda)^{2/3}\right) \lambda + \frac{\pi^2}{2} \bar{v}_{11}^2 \left(1 + 3(t_0 \lambda)^{2/3}\right) + 4\pi^2 \tilde{k}^2 \left(1 - 3(t_0 \lambda)^{2/3}\right) = 0. \quad (5.5)$$

Положив $k = \pi/\sqrt{2}$ и учитывая, что $t_0 |\lambda| \gg 1$, перепишем (5) в виде

$$\lambda^{4/3} t_0^{-2/3} - \lambda 9\pi^2 / 2 + 3\pi^2 (\bar{v}_{11}^2 / 2 - 6\pi^2) = 0. \quad (5.6)$$

Важно отметить, что в равенстве (4) под $\lambda^{1/3}$ подразумевается первое значение корня, соответствующее $\arg \lambda$, лежащему в интервале от 0 до 2π . Поэтому, решая характеристическое уравнение (6), мы отбрасываем лишние корни, не удовлетворяющие условию

$$0 \leq \arg \lambda^{1/3} < 2\pi / 3. \quad (5.7)$$

Устойчивость стационарного конвективного течения, как следует из решения уравнения (6), имеет место при условии

$$\bar{v}_{11}^2 / 2 - 6\pi^2 \geq t_0^2 (3\pi)^6 / 6. \quad (5.8)$$

Знаку равенства в формуле (8) соответствует критический режим, для которого декремент λ чисто мнимый

$$\lambda = i\omega, \quad \omega = 3^{-1/2} 2(\bar{v}_{11}^2 / 2 - 6\pi^2). \quad (5.9)$$

Для мантии Земли температуропроводность оценивается как $\kappa = 10^{-6} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$, а толщина мантии $d = 3 \times 10^6 \text{ м}$, тогда масштаб времени $d^2/\kappa = 10^{19} \text{ с}$, что составляет $3 \times 10^{11} \text{ лет}$, а масштаб скорости $\kappa/d = 3 \times 10^{-13} \text{ мс}^{-1}$. Характерной скорости конвективного движения в мантии 1 см/год ($3 \times 10^{-10} \text{ мс}^{-1}$) при таких масштабах соответствует $\bar{v}_{11} \cong 10^3$, а характерному времени стационарного конвективного движения $3 \times 10^8 \text{ лет}$ соответствует $t_0 \cong 10^{-3}$. Для $\bar{v}_{11} = 10^3$, $t_0 = 10^{-3}$, как следует из (8), имеет место устойчивость, а при решении характеристического уравнения (6) можно пренебречь вторым членом, линейным по λ , и легко найти четыре корня, среди которых только один удовлетворяет условию (7)

$$\lambda = 5,3 \times 10^3 (-1 + i). \quad (5.10)$$

Данному безразмерному λ соответствует период затухающих колебаний $T = 2\pi d^2/\kappa \times \omega = 4 \times 10^8 \text{ лет}$. Примерно такой же период колебаний получается при $\bar{v}_{11} = 10^3$ и из формулы (4.19), найденной для модели степенной жидкости, но затухание при такой реологии оказывается значительно слабее, чем для наследственной реологической модели.

6. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КОНВЕКТИВНОГО ПОГРАНСЛОЯ

При развитой стационарной конвекции, обусловленной подогревом слоя снизу, конвективная ячейка имеет следующую структуру: к верхней границе примыкает холодный погранслои, к нижней – горячий погранслои, вдоль одной из боковых границ ячейки поднимается горячий поток вещества, вдоль другой – опускается холодный поток, а центральную часть ячейки занимает почти изотермическое ядро, причем чем интенсивнее конвекция, тем тоньше погранслои и вертикальные потоки.

Стационарное течение в погранслое можно рассматривать как горизонтальное сдвиговое течение, при котором горизонтальная скорость зависит только от вертикальной координаты, т.е. поле скоростей определено как $\bar{v}_x(z)$. При этом единственная отличная от нуля компонента тензора дивергента скоростей деформаций и второй инвариант этого тензора имеют вид

$$\dot{\epsilon}_{xz} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad \dot{\epsilon} = 2 \left| \dot{\epsilon}_{xz} \right|. \quad (6.1)$$

Если считать, что зависимость $\bar{v}_x(z)$ – линейная (куэттовское течение), инвариант $\dot{\epsilon}$, а следовательно и эффективную вязкость стационарного течения $\bar{\eta}$, определяемую равенством (2.5), можно рассматривать как константы. При основном течении вида (1), как следует из (2.3), (2.12), (2.15), наложенные течения подчиняются

реологическому закону

$$2\bar{\eta}F(\lambda)\dot{\epsilon}'_{ij} = \sigma'_{ij}, \quad ij \neq xz, \quad (6.2)$$

$$2\frac{\bar{\eta}}{3}F(\lambda)\dot{\epsilon}'_{ij} = \sigma'_{ij}, \quad ij = xz.$$

Исследуя конвективную устойчивость погранслоя, будем сначала рассматривать вторичные конвективные течения в плоскости yz , т.е. анализировать устойчивость по отношению к конвективным валам, оси которых перпендикулярны основному стационарному конвективному течению.

Анализ устойчивости проводится на основе уравнений конвекции (3.1)–(3.5), причем в уравнении (3.4) отбрасываются нелинейные члены, координата x заменяется на y , а в равенстве (3.5), определяющем число Рэлея, в качестве масштабной вязкости используется $\bar{\eta}$. Рассматриваемое вторичное конвективное течение является изотропным (в yz плоскости) наложенным течением и описывается первым уравнением из системы (2). Добавляя к уравнениям конвекции это реологическое соотношение, предполагая границы погранслоя свободными и считая, что зависимость физических переменных от горизонтальной координаты и времени определяется множителем $\exp(iky + \lambda t)$, находим характеристическое уравнение

$$\lambda F(\lambda)\tilde{k}^4 + F(\lambda)\tilde{k}^6 - k^2 Ra = 0, \quad F(\lambda) = (t_0\lambda)^{-2/3}. \quad (6.3)$$

Критическому режиму неустойчивости, при котором $\text{Re}\lambda = 0$, $\text{Im}\lambda = \omega$, как следует из решения уравнения (3), соответствуют значения ω и Ra_{cr}

$$\omega = \pm\sqrt{3}\tilde{k}^2, \quad Ra_{cr} = 2\tilde{k}^6 / k^2 (t_0\omega)^{2/3}. \quad (6.4)$$

Знак "+" описывает конвективную волну, бегущую в направлении оси y , а знак "-" соответствует волне, бегущей в обратном направлении. Минимальное значение критического числа Рэлея, Ra_m , дающее порог неустойчивости (при $Ra < Ra_m$ имеет место устойчивость по отношению к возмущениям с любыми значениями k), достигается при $k = k_m = \sqrt{3}\pi/2$. В режиме пороговой неустойчивости $\omega = \omega_m \cong 30$, $Ra = Ra_m \cong 144/t_0^{2/3}$.

Теперь рассмотрим вторичное конвективное течение в плоскости xz , реология которого, как следует из (2), анизотропна. Подставляя (2) и (4.1) в (4.8), находим, что в качестве эффективной вязкости выступает $\bar{\eta}(1-b)$, где

$$b = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi^2 - k^2}{\pi^2 + k^2} \right)^2. \quad (6.5)$$

При $k = \sqrt{3}\pi/2$ параметр b оценивается как $b \cong 0,014$, и можно считать, что эффективная вязкость такая же, как и при вторичном конвективном течении в yz плоскости. Основное конвективное течение в погранслое будем приблизительно рассматривать как течение с постоянной по глубине скоростью, усредняя \bar{v}_x по z . Тогда для решения задачи устойчивости достаточно заметить, что в системе координат, движущейся вместе с погранслоем, рассматриваемое вторичное течение ничем не отличается (после замены x на y) от вторичного течения в yz плоскости, и, следовательно, в движущейся системе координат справедливы равенства (4). В движущейся системе координат физические переменные пропорциональны $\exp(ik\tilde{x} \pm \omega t)$, где \tilde{x} – координата в движущейся системе. Для перехода в исходную

неподвижную систему координат достаточно сделать замену $\tilde{x} = x - \bar{v}_x t$, применяя которую под знаком ехр нетрудно видеть, что в неподвижной системе координат частота определяется выражением

$$\omega = \pm \sqrt{3\tilde{k}^2 - k\bar{v}_x}. \quad (6.6)$$

В рамках реологической модели степенной жидкости в формулах (2), (3) следует положить $F(\lambda) \equiv 1$. Тогда, как следует из решения уравнения (3), $\omega = 0$, $Ra_{CT} = \tilde{k}^6 / k^2$, а в неподвижной системе координат частота, связанная со вторичным конвективным течением в xz плоскости, определяется как

$$\omega = -k\bar{v}_x. \quad (6.7)$$

Нижний горячий погранслои в мантии Земли ассоциируется с известным в сейсмологии слоем D'' [13–15]. Физические свойства этого слоя характеризуются следующими оценками: тепловое расширение $\alpha \approx 2 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, плотность $\rho \approx 5 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, ускорение тяготения $g \approx 10 \text{ m s}^{-2}$, температуропроводность $\kappa \approx 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, перепад температуры $\Delta T \approx 10^3 \text{ K}$, толщина погранслоя $\delta \approx 10^5 \text{ m}$. В соответствии с этими оценками в задаче об устойчивости погранслоя масштаб длины $\delta = 10^5 \text{ m}$, скорости $-\kappa/\delta = 10^{-11} \text{ m s}^{-1}$, времени $-\delta^2/\kappa = 10^{16} \text{ s}$ ($\approx 3 \times 10^8$ лет). При таких масштабах характерной скорости движения погранслоя $\approx 1 \text{ cm/год}$ соответствует безразмерная скорость $\bar{v}_x \approx 30$, а характерному времени существования стационарного конвективного течения $\approx 3 \times 10^8$ лет соответствует безразмерное время $t_0 \approx 1$. Эти значения \bar{v}_x и t_0 следует подставить в полученные выше формулы. Переходя к размерным оценкам, можно сказать, что в режиме пороговой неустойчивости конвективная волна, распространяющаяся вдоль оси y , имеет частоту $\omega_m \kappa / \delta^2 \approx 10^{-7} \text{ год}^{-1}$ (период $\approx 6 \times 10^7$ лет), а добавка к частоте, возникающая в случае, когда волна распространяется вдоль движения погранслоя, оценивается как $k\tilde{v}_x \kappa / \delta^2 \approx 3 \times 10^{-7} \text{ год}^{-1}$ (период $\approx 2 \times 10^7$ лет).

Для того, чтобы в погранслое мантии реализовывался режим пороговой неустойчивости, необходимо, чтобы число Рэлея для погранслоя удовлетворяло условию $Ra \approx 144$. Данное значение Ra (при введенных выше оценках физических параметров) характеризует погранслои только в том случае, когда $\bar{\eta} \approx 7 \times 10^{21} \text{ Па с}$, что вполне соответствует имеющимся оценкам усредненной по глубине эффективной вязкости погранслоя [12].

* * *

Неустойчивость стационарного крупномасштабного конвективного течения, охватывающего всю мантию, определяется неустойчивостью нижнего горячего погранслоя, образующегося около границы ядро – мантия. В рамках реологической модели степенной жидкости, как и ньютоновской, неустойчивость погранслоя имеет монотонный характер: погранслои разбивается на ячейки, горизонтальный размер которых L приблизительно равен толщине самого погранслоя, и вдоль одной из вертикальных границ ячейки постоянно происходит поднятие горячего вещества, а вдоль другой – опускание холодного. Таким образом, в системе координат, движущейся вместе с погранслоем, имеет место обычная картина конвективного течения, такая же, как и для крупномасштабной конвекции в мантии, но со значительно более мелкими ячейками. Когда горячий восходящий поток, существующий в маленькой ячейке погранслоя, достигает, двигаясь со скоростью v_x вместе с погранслоем, края большой мантийной ячейки, он сливается с восходящим потоком мантийной конвекции и

приводит к нарастанию интенсивности крупномасштабной конвекции и, в частности, к увеличению выноса тепла из недр на поверхность Земли. Когда через время L/\bar{v}_x границы мантийной ячейки достигает холодный поток, опускающийся вдоль другой вертикальной границы ячейки погранслоя, интенсивность крупномасштабной мантийной конвекции уменьшается. Таким образом, период T данного колебательного процесса определяется как $T = 2L/\bar{v}_x$, что полностью совпадает с формулой (6.7), если перейти в ней к размерным переменным, и оценивается как $T \approx 2 \times 10^7$ лет.

Физический механизм колебаний, возникающих при анализе устойчивости стационарной конвекции на основе уравнений Лоренца, тот же самый, но период колебаний, соответствующий формуле (4.19), $T \approx 4 \times 10^8$ лет. Метод Лоренца позволяет рассматривать только крупномасштабные конвективные ячейки, горизонтальный размер которых определяется толщиной конвективного слоя d (для мантии $d = 3 \times 10^3$ км). Поскольку d превышает толщину погранслоя δ в 30 раз, формула $T = 2L/\bar{v}_x$, и приводит к соответственному увеличению периода T . В методе Лоренца, основанном на представлении искомого решения в виде (3.6), погранслоем моделируется с помощью температуры $\theta_{02} \sin 2\pi z$, т.е. рассматривается только толстый погранслоем ($\delta \approx d/4$). Такой слабовыраженный погранслоем возникает при малоинтенсивной конвекции, а при развитой конвекции $\delta \ll d$, и соотношения (3.11), (3.12) уже несправедливы. Поэтому применение метода Лоренца при исследовании интенсивной конвекции, которая, по-видимому, имеет место в мантии, позволяет получить только чисто качественные результаты, например, позволяет говорить о колебательной неустойчивости, но не дает возможности точно оценить период колебаний.

Главный эффект введения наследственной реологической модели мантии состоит в том, что конвективная неустойчивость погранслоя приобретает колебательный характер. В случае, когда рассматривается вторичное конвективное течение в той же плоскости xz , что и основное конвективное течение, данный эффект частично "смазывается" за счет того, что добавка к частоте, связанная с движением погранслоя, оказывается в три раза больше, чем собственная частота колебаний погранслоя. Но, когда вторичное конвективное движение происходит в плоскости yz , перпендикулярной направлению основного течения (трехмерная конвекция), этот эффект отчетливо проявляется.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Birger B.J.* Rheology of the Earth's mantle and geodynamical processes // *Geophys. Res. Lett.* 1991. Vol. 18, N 11. P. 2031–2034.
2. *Birger B.J.* Linear and weakly nonlinear problems of the theory of thermal convection in the Earth's mantle // *Phys. Earth and Planet. Inter.* 1988. Vol. 50, N 1. P. 92–98.
3. *Karato S.* Rheology of the lower mantle // *Phys. Earth and Planet. Inter.* 1981. Vol. 24, N 1. P. 1–14.
4. *Рыжик И.М., Градштейн И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1963. 1100 с.
5. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
6. *Stewart C.A., Turcotte D.L.* The route to chaos in thermal convection at infinite Prandtl number // *J. Geophys. Res.* 1989. Vol. 94, N B10. P. 13707–13717.
7. *Jarvis G.T.* Time-dependent convection in the Earth's mantle // *Phys. Earth and Planet. Inter.* 1984. Vol. 36, N 3–4. P. 305–327.
8. *Hansen U., Ebel A.* Experiments with a numerical model related to mantle convection: boundary layer behaviour of small – and large-scale flows // *Phys. Earth and Planet. Inter.* 1984. Vol. 36, N 3–4. P. 374–390.
9. *Hansen U., Ebel A.* Time-dependent thermal convection – a possible explanation for a multiscale flow in the Earth's mantle // *Geophys. J.* 1988. Vol. 94, N 2. P. 181–191.
10. *Lennie T.B., McKenzie D.P., Moore D.R., Weiss N.O.* The breakdown of steady convection // *J. Fluid Mech.* 1988. Vol. 188. P. 47–86.
11. *Джозеф Д.* Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.

12. Christensen U. Convection with pressure- and temperature-dependent non-Newtonian rheology // *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 1984. Vol. 77, N 2. P. 343–384.
13. Yuen D.A., Peltier W.R. Mantle plumes and the thermal stability of the D'' layer // *Geophys. Res. Lett.* 1980. Vol. 7, N 9. P. 625–628.
14. Karato S. Low Q zone at the base of the mantle: evidence for lower mantle convection? // *Phys. Earth and Planet. Inter.* 1980. Vol. 22, N 2. P. 155–161.
15. Christensen U. Instability of a hot boundary layer and initiation of thermo-chemical plumes // *Ann. Geophys.* Vol. 2, N 3. P. 311–320.

УДК 550.311:551.24

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ОСАДОЧНОГО БАСЕЙНА В РЕЗУЛЬТАТЕ ОБРАЗОВАНИЯ И ПОСЛЕДУЮЩЕГО ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА МАГМАТИЧЕСКОЙ ЛИНЗЫ В ВЕРХНЕЙ МАНТИИ

А.Т. Исмаил-заде, Л.И. Лобковский, Б.М. Наймарк

A HYDRODYNAMIC MODEL OF SEDIMENTARY BASIN FORMATION BASED ON DEVELOPMENT AND SUBSEQUENT PHASE TRANSFORMATION OF A MAGMATIC LENS IN THE UPPER MANTLE

A.T. Ismail-zadeh, L.I. Lobkovsky and B.M. Naimark

We present a sedimentary basin formation mechanism based on the subsidence of an eclogite lens in the upper mantle. After the extension of the lithosphere a hot asthenospheric component is advected to the base of the lithosphere into the space created by that process. If the lithosphere/asthenosphere boundary prevents further magma uplift a magmatic lens concentrates due to its buoyancy at the roof of the asthenospheric bulge. We assume that basalt melt in the asthenospheric bulge has not been transported onto the surface and stays in the magmatic lens. According to experimental data, basalt melts turn into eclogite of an increased density during the process of general cooling and crystallization at pressures of 18–22 Kbar and temperatures of 1000–1200°C (at 60–80 km depth). Hence the eclogite lens causes crustal subsidence resulting in sedimentary basin formation. A bicubic spline finite element method is used for a quantitative analysis of the proposed subsidence mechanism. The model region comprises a cross section through the lithosphere and the upper part of the asthenosphere. We assume the Newtonian rheology with variable density and viscosity. An approximate topography is calculated from the normal stress at the free-slip surface boundary for several sample models. The model can be applied to study intracratonic sedimentary basin evolution.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важнейших задач современной геодинамики является выяснение механизмов образования осадочных бассейнов различного типа. Постоянное внимание многих ученых к этой проблеме обусловлено, помимо ее большой научной значимости, соображениями прикладного характера, так как с осадочными бассейнами, как известно, связаны основные нефтегазовые запасы и ресурсы Земли.

Несмотря на большое число работ, посвященных анализу причин и условий прогибания земной коры, сопровождаемого осадконакоплением и образованием осадочных бассейнов, в этой проблеме до сих пор остается много неясного. В частности, предметом оживленных дискуссий являются различные механизмы погружения осадочных бассейнов, модели их эволюции, движущие тектонические силы, приводящие к рифтогенезу, горообразованию и другим процессам, генетически связанным с формированием осадочных бассейнов соответствующего типа и т.д.

В зависимости от историко-геологических условий своего формирования, осадочные бассейны делятся на несколько категорий или типов, характеризующихся различными