УДК 532.5.514.83

О ГЛАВНЫХ МОДАХ ОПЕРАТОРА ПУАНКАРЕ В ШАРЕ

Е.Л. Резников, Л.М. Розенкноп

ON PRINCIPAL MODES OF POINCARE'S OPERATOR IN A SPHERE

E.L. Reznikov and L.M. Rozenknop

Even the simplest cases of rotating fluids in a sphere or a spherical shell, as in the earth's core, are not yet completely studied; in particular, this is the case of Poincare's operator. Namely, the following problem arizes: To choose most smooth, or least oscillatory, fields from a family of vector or tenzor fields in some space. We consider Dirichlet's integral as a functional defined on normalized fields and use it to compare their smoothness. Particulary, we used this functional to classify known principal modes of Poincare's operator in a sphere. It is also possible to use the functional in a more complicated problem where a spherical shell is taken instead of a sphere; it is possible to choose a basis, ordered in smoothness, in the space of smooth solenoidal fields, and to constract succesive Galerkin's subspaces in this basis.

В некоторых задачах (например, при поиске главных мод – собственных функций операторов) возникает следующая проблема: в семействе векторных (или тензорных) полей нужно выделить главные, наиболее простые, наиболее плавные поля. Если спектр оператора дискретен (в частности, в задаче Штурма–Лиувилля), то сравнение собственных значений часто позволяет заключить, какие моды более, а какие менее осциллируют в пространстве. Если спектр оператора плотен на отрезке, то для сравнения мод знания собственных чисел может быть недостаточно.

В евклидовом пространстве с декартовыми координатами самые простые (наиболее плавные) – постоянные поля, получаемые параллельным переносом. В криволинейных координатах такие поля называются ковариантно постоянными. В работе предлагается использовать нормированный интеграл Дирихле в качестве функционала на векторных полях, позволяющий сравнивать поля по "плавности", по степени их отклонения в этом смысле от постоянного поля. Этот функционал использован для классификации известных собственных мод оператора Пуанкаре в шаре. Его можно также применить в более сложной задаче поиска главных мод оператора Пуанкаре в шаровом слое: в пространстве гладких бездивергентных полей можно выбрать базис, упорядоченный по "плавности" и строить последовательность галеркинских подпространств, используя этот базис.

1. Напомним определение ковариантной производной (контравариантного) векторного поля $\mathbf{q}$ [1]. Рассмотрим в R^3 область Ω с координатами $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ и поле $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ в ней ($\mathbf{x}$ – радиус-вектор точки в Ω). Векторы $\mathbf{e}_i = \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha^i}$, $i = 1, 2, 3$, образуют локальный базис в касательном пространстве T_x и $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = q^i \mathbf{e}_i$. Величины $g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ – компоненты метрического тензора G. В криволинейной системе координат $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ векторы репера $\mathbf{e}_i$ различны в разных точках, поэтому

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha^k} = \frac{\partial q^i}{\partial \alpha^k}\mathbf{e}_i + q^i \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \alpha^k} = \frac{\partial q^i}{\partial \alpha^k}\mathbf{e}_i + \Gamma^m_{ik} q^i \mathbf{e}_m,$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha^k} = \left(\frac{\partial \mathbf{q}^m}{\partial \alpha^k} + \Gamma^m_{ik} q^i\right)\mathbf{e}_m.$$

Величины $q^m_{;k} = \dfrac{\partial q^m}{\partial \alpha^k} + \Gamma^m_{ik} q^i$ являются компонентами тензора ковариантной производной контравариантного вектора $\mathbf{q}$. Величины Γ^m_{ik} называются символами Кристоффеля 2-го рода. Они симметричны по нижним индексам и их можно выразить через производные от компонент метрического тензора g_{ij}.

2. В декартовых координатах все $\Gamma^m_{ik} = 0$, и $(q^m_{;k})$ – матрица Якоби отображения: $\mathbf{x} \to \mathbf{q}(\mathbf{x})$. Норма этой матрицы характеризует растяжение поля $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}$. Нам удобнее рассматривать квадрат нормы матрицы Якоби Q:

$$|Q|^2 = Sp(Q^*Q) = \sum_{m,k} |q^m_{;k}|^2$$

(знак "*" означает для чисел и для матриц комплексное сопряжение). В криволинейных координатах $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ этой величине соответствует

$$B = g^{ik}(q^m_{;k})^* g_{mn} q^n_{;i}.$$

Здесь g^{ik} – компоненты матрицы G^{-1}. Очевидно, что B – числовой инвариант (свертка) тензора ковариантной производной $q^m_{;k}$. В матричной записи B имеет вид

$$B = Sp(G^{-1}Q^*GQ) = Sp(G^{-1/2}G^{-1/2}Q^*G^{1/2}G^{1/2}Q) =$$
$$= Sp(G^{-1/2}Q^*G^{1/2}G^{1/2}QG^{-1/2}) = Sp(D^*D),$$

где $D = G^{1/2}QG^{-1/2}$.

Введем функционал

$$R(\mathbf{q}) = \left[\frac{\int_\Omega B\,d\upsilon}{\int_\Omega |\mathbf{q}|^2\,d\upsilon}\right]^{1/2}. \tag{1}$$

Нормировка нужна, чтобы умножение поля $\mathbf{q}$ на число не изменяло R. Очевидно, что $R \geqslant 0$ и $R(\mathbf{q}) = 0$, если поле $\mathbf{q}$ ковариантно постоянно. Величина R характеризует, таким образом, среднюю по области Q "изменчивость" поля $\mathbf{q}$, или ухудшение "плавности" поля $\mathbf{q}$ по сравнению с постоянным полем.

Замечание. С помощью ковариантной производной, свертки и усреднения аналогичный функционал можно ввести для любых гладких тензорных полей. Для гладкой функции f, например, функционал имеет вид

$$R \boxminus [\int|\nabla f|^2 d\upsilon / \int|f^2| d\upsilon]^{1/2}.$$

Используем функционал R для классификации собственных мод, возникающих в следующей известной спектральной задаче.

3. Рассмотрим задачу о спектре оператора Пуанкаре:

$$\begin{cases} \lambda\mathbf{q} = K\mathbf{q} = i[\mathbf{1}_z, \mathbf{q}] - \nabla\Phi, \quad \operatorname{div}\mathbf{q} = 0, & (2) \\ (\mathbf{q}, \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0. & (3) \end{cases}$$

Здесь $\mathbf{q}$ – поле скорости идеальной несжимаемой жидкости в области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$; $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности $\partial\Omega$; $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ – векторное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$; $\mathbf{1}_z$ – единичный вектор, параллельный оси z; Φ – соответствующий $\mathbf{q}$ скалярный потенциал, такой, что $\operatorname{div}(K\mathbf{q}) = 0$; λ – спектральный параметр; i – мнимая единица. Оператор K называется оператором Пуанкаре. Такой оператор возникает, в частности, в линеаризованной задаче о вращении резервуара Ω, заполненного идеальной несжимаемой жидкостью [2].

Приведем некоторые свойства оператора Пуанкаре [2], [3]:

а. K – ограниченный самосопряженный оператор на бездивергентных векторных полях, $\|K\| \leqslant 1$.

б. Спектр оператора K заполняет весь отрезок $[-1, 1]$. Точки -1 и 1 не принадлежат точечному спектру оператора K.

4. Спектральная задача (2), (3) сводится (преобразованием Пуанкаре) к скалярному уравнению для потенциала Φ

$$-\lambda^2\nabla\mathbf{\Phi} + (\mathbf{1}_z, \nabla)^2\mathbf{\Phi} = 0 \tag{4}$$

с граничным условием

$$-\lambda^2(\nabla\mathbf{\Phi}, \mathbf{n}) + (\mathbf{1}_z, \mathbf{n})(\nabla\mathbf{\Phi}, \mathbf{1}_z) - i\lambda(\nabla\mathbf{\Phi}, \mathbf{n}\times\mathbf{1}_z)\Big|_{\partial\Phi} = 0. \tag{5}$$

Выражение

$$2(1-\lambda^2)\mathbf{q} = [\mathbf{1}_z, \nabla\mathbf{\Phi}] - i\lambda\nabla\mathbf{\Phi} - \frac{1}{i\lambda}\mathbf{1}_z(\mathbf{1}_z, \nabla\mathbf{\Phi}), \tag{6}$$

полученное из (2), позволяет вычислить $\mathbf{q}$ по найденному Φ. Системы (2), (3) и (4), (5) эквивалентны.

5. Для сферического резервуара задача была решена более ста лет назад [4]. Изложим коротко это решение. Для простоты будем считать, что радиус шара Ω равен единице. В цилиндрических координатах s, φ, z система (4), (5) имеет вид

$$\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2\mathbf{\Phi}}{\partial\varphi^2} + \left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)\frac{\partial^2\mathbf{\Phi}}{\partial z^2} = 0, \tag{7}$$

$$s\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial s} + \frac{1}{i\lambda}\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\varphi} + \left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)z\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial z} = 0\Big|_{\partial\Omega}. \tag{8}$$

Ищем решение этой задачи в виде

$$\mathbf{\Phi}(s,\varphi,z) = \tilde{\mathbf{\Phi}}(s,z)e^{ik\varphi}, \qquad k = 0, \pm 1, \ldots$$

Можно ограничиться неотрицательными значениями k: индексу $-k$ соответствует собственное значение $-\lambda$. Подстановка Φ в (7), (8) дает систему для $\tilde{\mathbf{\Phi}}$:

$$\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial\tilde{\mathbf{\Phi}}}{\partial s}\right) - \frac{k^2\tilde{\mathbf{\Phi}}}{s^2} + \left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{\Phi}}}{\partial z^2} = 0, \tag{9}$$

$$s\frac{\partial\tilde{\mathbf{\Phi}}}{\partial s} + \frac{k}{\lambda}\tilde{\mathbf{\Phi}} + \left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)z\frac{\partial\tilde{\mathbf{\Phi}}}{\partial z} = 0\Big|_{\partial Y}, \tag{10}$$

$$Y = \{(s, z)\colon s^2 + z^2 \leqslant 1,\ s \geqslant 0\}.$$

Брайен предложил замену переменных:

$$\begin{cases} s = \left(\dfrac{1}{1-\lambda^2}\right)^{1/2}(1-u^2)^{1/2}(1-\upsilon^2)^{1/2} \\ z = \left(\dfrac{1}{\lambda^2}-1\right)^{1/2}u\upsilon \end{cases} \tag{11}$$

Здесь $|\lambda| < 1$.

Замена (11) переводит (9) в уравнение, в котором переменные u и υ разделяются, решение факторизуется и может быть записано в виде

$$\tilde{\mathbf{\Phi}} = P_n^k(u)P_n^k(\upsilon),$$

где $P_n^k(x) = (1-x^2)^{k/2}\dfrac{d^k}{dx^k}P_n(x)$ – присоединенный полином Лежандра, $P_n(x)$ – полином

Лежандра n-й степени. В переменных s, z:

$$\tilde{\Phi}(s,z) = P_n^k(u(s,z,\lambda))P_n^k(\upsilon(s,z,\lambda)).$$

Граничное условие (10), преобразованное с помощью (11) (в этом смысл замены), позволяет написать дисперсионное уравнение для спектрального параметра λ:

$$kP_n^k(\lambda) = (1-\lambda^2)\frac{d}{d\lambda}P_n^k(\lambda),$$

или

$$k\frac{d^k}{d\lambda^k}P_n(\lambda) = (1-\lambda)\frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}}P_n(\lambda). \tag{12}$$

З а м е ч а н и е. Уравнение (12) имеет решения только при $n > k$: отличные от единицы решения возможны только при $n \geqslant 2$.

Таким образом, λ_{knm} – m-й корень уравнения (12) – собственное значение оператора K, а

$$\Phi(s, \varphi, z) = P_n^k(u(s, z, \lambda_{knm}))P_n^k(\upsilon(s, z, \lambda_{knm}))e^{ik\varphi} \tag{13}$$

– собственная функция (потенциал) системы (9), (10), соответствующая λ_{knm}.

6. Представим присоединенный полином Лежандра в виде

$$P_n^k(y) = \prod_{j=1}^{L_{nk}}(y^2 - y_j^2)Y^{e_{nk}}, \tag{14}$$

где y_j – j-й нуль P_n^k на (0, 1); L_{nk} – число этих нулей; $e_{nk} = 0$, если четность k и n одинакова, $e_{nk} = 1$, если разная. Используя (13) и (14), получаем

$$\Phi_{knm}(s,\varphi,z) = z^{e_{nk}}s^kH(s,z,\lambda_{knm})e^{ik\varphi}, \tag{15}$$

где

$$H = \prod_{j=1}^{L_{nk}}\{y_j^2(1-\lambda_{knm}^2)s^2 + \lambda_{knm}^2(1-y_j^2)z^2 + y_j^2(y_j^2-1)\}. \tag{16}$$

Формула (6) позволяет записать после скорости $\mathbf{q} = \{A_s, A_\varphi, A_z\}$ в виде

$$\begin{cases} A_s = -\dfrac{1}{1-\lambda^2}\left(\dfrac{1}{s}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + i\lambda\dfrac{\partial\Phi}{\partial s}\right) \\ A_\varphi = \dfrac{1}{1-\lambda^2}\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial s} - \dfrac{i\lambda}{s}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right) \\ A_z = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}. \end{cases} \tag{17}$$

Подставив в (17) Φ и λ_{knm}, получим $\mathbf{q}_{knm}$ – собственные функции задачи (4), (5), соответствующие λ_{knm}.

7. Посмотрим, как ведет себя $R(\mathbf{q})$ на собственных полях изложенной задачи. Матрица D (см. п. 2) в цилиндрических координатах для поля $\mathbf{q} = \{A_s, A_\varphi, A_z\}$ имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_s}{\partial s} & \dfrac{1}{s}\dfrac{\partial A_s}{\partial\varphi} - \dfrac{1}{s}A_\varphi & \dfrac{\partial A_s}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_\varphi}{\partial s} & \dfrac{1}{s}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \dfrac{1}{s}A_s & \dfrac{\partial A_\varphi}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_z}{\partial s} & \dfrac{1}{s}\dfrac{\partial A_z}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Формула (1) в нашем случае приобретает вид:

$$R^2(\mathbf{q}) = \frac{\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_Y s\left(\sum\limits_{i,j=1}^{3} |d_{ij}|^2\right) ds dz}{\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_Y s(|A_s|^2 + |A_\varphi|^2 + |A_z|^2) ds dz}. \tag{18}$$

$Y = \{(s, z):\ s^2 + z^2 \leqslant 1,\ s \geqslant 0\}.$

8. Ниже приведен набор величин λ_{knm} и $R_a = R^2_{knm}$ для всех k и n, для которых есть значения $R_a \leqslant 200$. Величина R_a выбрана для удобства: некоторые значения R^2 оказываются целыми и выражаются следующими формулами:

$$R^2_{0,n,1} = \frac{1}{3} n(n-1)(2n+5) - 1,$$

$$R^2_{k,k+1,1} = k(2k+3).$$

Набор пар $\begin{pmatrix} \lambda_{knm} \\ R^2_{knm} \end{pmatrix}$ для некоторых собственных мод оператора Пуанкаре в шаре.

$k = 0 \quad n = 2 \quad \begin{pmatrix} 0. \\ 5. \end{pmatrix}$

$n = 3 \quad \begin{pmatrix} -0.447 \\ 21. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.447 \\ 21. \end{pmatrix}$

$n = 4 \quad \begin{pmatrix} -0.654 \\ 51. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0 \\ 51. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.654 \\ 51. \end{pmatrix}$

$n = 5 \quad \begin{pmatrix} -0.765 \\ 99. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.285 \\ 99. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.285 \\ 99. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.765 \\ 99. \end{pmatrix}$

$n = 6 \quad \begin{pmatrix} -0.830 \\ 169. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.468 \\ 169. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0 \\ 169. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.468 \\ 169. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.830 \\ 169. \end{pmatrix}$

$k = 1 \quad n = 2 \quad \begin{pmatrix} 0.5 \\ 5. \end{pmatrix}$

$n = 3 \quad \begin{pmatrix} -0.088 \\ 18.233 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.754 \\ 23.767 \end{pmatrix}$

$n = 4 \quad \begin{pmatrix} -0.410 \\ 44.436 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.305 \\ 49.715 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.854 \\ 58.847 \end{pmatrix}$

$n = 5 \quad \begin{pmatrix} -0.591 \\ 86.681 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.034 \\ 95.078 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.522 \\ 99.230 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.902 \\ 115.01 \end{pmatrix}$

$n = 6 \quad \begin{pmatrix} -0.702 \\ 148.45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.268 \\ 161.82 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.220 \\ 166.45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.653 \\ 171.31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.930 \\ 196.96 \end{pmatrix}$

$k=2\ \ n=3\ \ \begin{pmatrix}0.333\\14.\end{pmatrix}$

$n=4\ \ \begin{pmatrix}-0.115\\37.425\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.615\\43.574\end{pmatrix}$

$n=5\ \ \begin{pmatrix}-0.381\\75.280\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.233\\87.109\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.748\\90.610\end{pmatrix}$

$n=6\ \ \begin{pmatrix}-0.546\\130.79\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}-0.050\\150.73\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.442\\156.98\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.821\\159.48\end{pmatrix}$

$k=3\ \ n=4\ \ \begin{pmatrix}0.25\\27.\end{pmatrix}$

$n=5\ \ \begin{pmatrix}-0.126\\62.632\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.526\\69.368\end{pmatrix}$

$n=6\ \ \begin{pmatrix}-0.359\\113.51\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.188\\133.65\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.670\\129.83\end{pmatrix}$

$n=7\ \ \begin{pmatrix}-0.511\\183.33\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}-0.060\\218.02\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.386\\225.72\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.755\\212.91\end{pmatrix}$

$k=4\ \ n=5\ \ \begin{pmatrix}0.2\\44.\end{pmatrix}$

$n=6\ \ \begin{pmatrix}-0.130\\93.856\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.463\\101.14\end{pmatrix}$

$n=7\ \ \begin{pmatrix}-0.340\\159.12\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.158\\189.44\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.610\\176.43\end{pmatrix}$

$k=5\ \ n=6\ \ \begin{pmatrix}0.166\\65.\end{pmatrix}$

$n=7\ \ \begin{pmatrix}-0.131\\131.09\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.417\\138.90\end{pmatrix}$

$k=6\ \ n=7\ \ \begin{pmatrix}0.142\\90.\end{pmatrix}$

$n=8\ \ \begin{pmatrix}-0.131\\174.35\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0.381\\182.64\end{pmatrix}$

$k=7\ \ n=8\ \ \begin{pmatrix}0.125\\119.\end{pmatrix}$

$k=8\ \ n=9\ \ \begin{pmatrix}0.111\\152.\end{pmatrix}$

$k=9\ \ n=10\ \begin{pmatrix}0.1\\189.\end{pmatrix}$

Для каждой пары (k, n) $m = 1,..., M_{kn}$, где M_{kn} – число корней уравнения (12). Из приведенных данных видно, что:

а. При каждом k величина R растет с ростом n.

б. При фиксированных (k, n), в общем случае, нет монотонной зависимости R от величины λ_{knm}. Исключение составляет случай $k = 0$: для любого n значение функционала R одинаково для всех собственных чисел $\lambda_{0,n,m}$, $m = 1, 2,...$

в. Первые 10 главных (наиболее плавных) мод, например, имеют наборы индексов: (0, 2, 1), (1, 2, 1), (2, 3, 1), (1, 3, 1), (0, 3, 1), (0, 3, 2), (1, 3, 2), (3, 4, 1), (2, 4, 1), (2, 4, 2).

Замечания

а. В этой задаче при расчете $R(\mathbf{q})$ компьютер нужен только для вычисления корней дисперсионных уравнений и нулей присоединенных полиномов Лежандра. Все остальное может быть сделано точно.

б. В данной задаче, имея явные выражения для Φ_{knm}, зависимость R от k и n можно было бы угадать. Связь R с λ_{knm} угадать гораздо сложнее.

в. При каждом фиксированном k самыми "плавными" оказываются поля, соответствующие $n = k + 1$. В этих случаях $m = 1$ и существует единственное $\lambda_{k,k+1,1} = \frac{1}{k+1}$. Этим полям соответствует потенциал $\Phi = zs^k e^{ik\varphi}$. В п. 9 показано, что такие поля – единственные тороидальные собственные поля в этой задаче.

9. Векторное поле $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ называется тороидальным, если существует такая скалярная функция $T(\mathbf{x})$, что

$$\mathbf{q} = \operatorname{rot}(\mathbf{x}T(\mathbf{x})) = [\nabla T, \mathbf{x}]. \tag{19}$$

Тороидальное поле не имеет радиальной компоненты, поэтому в цилиндрических координатах $\mathbf{q} = \{A_s, A_\varphi, A_z\}$ удовлетворяет условию

$$sA_s + zA_z = 0 \tag{20}$$

в каждой точке Ω.

Пусть $k > 0$ фиксировано и $\lambda \neq 0$ – собственное значение, являющееся корнем, возможно, нескольких уравнений (12), отвечающих значениям $n_1, n_2,...$ Произвольный собственный потенциал, соответствующий этому значению λ, имеет вид:

$$\Phi(s, \varphi, z) = s^k\Psi(s, z, \lambda)e^{ik\varphi}, \tag{21}$$

где $\Psi = \sum c_i z^{e_i} H_i(s, z, \lambda)$, e_i и $H_i(s, z, \lambda)$ определяются парами (k, n_i) и формулой (16); c_i – произвольные коэффициенты. Пользуясь (17), (20), (21) и сокращая на $e^{ik\varphi}$, получим:

$$\frac{k\lambda(1+\lambda)}{1-\lambda^2}s^k\Psi + s^k\,\frac{\lambda^2 s\Psi_s' - (1-\lambda^2)z\Psi_z'}{1-\lambda^2} = 0,$$

или

$$\frac{k\lambda}{1-\lambda} + \frac{\lambda^2 s\Psi_s' - (1-\lambda^2)z\Psi_z'}{(1-\lambda^2)\Psi} = 0. \tag{22}$$

Второе слагаемое не зависит от s и z и отлично от нуля, так как $k > 0$, $\lambda \neq 0$. Рассматривая коэффициенты при старших степенях s и z в Ψ, нетрудно показать что (22) выполняется лишь в том случае, когда $\Psi = \alpha s + \beta z$, где α и β – некоторые числа. Но Ψ содержит s только в четных степенях, поэтому $\alpha = 0$ и второе слагаемое в (22) равно –1. Отсюда $\lambda = \frac{1}{k+1}$ и $n = k + 1$. Таким образом, единственные собственные поля, удовлетворяющие условию (20), имеют потенциал $\Phi = zs^k e^{ik\varphi}$ и собственное значение $\lambda = \dfrac{1}{k+1}$. Эти поля имеют вид $\mathbf{q} = \{A_s, A_\varphi, A_z\}$, где

$$A_s = -\frac{i(k+1)}{s}\Phi, \quad A_\varphi = \frac{(k+1)}{s}\Phi, \quad A_z = \frac{i}{z}(k+1)\Phi.$$

Они тороидальны, так как удовлетворяют (19) с $T = -\dfrac{k+1}{k} s^k e^{ik\varphi}$.

Постановка задачи о главных модах оператора Пуанкаре принадлежит М.М. Вишику. Авторы использовали его советы и неопубликованные лекции по гидродинамике и выражают М.М. Вишику глубокую благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: МГУ, 1986. 263 с.
2. *Гринспен Х.П.* Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеоиздат, 1975. 303 с.
3. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. М.: Наука, 1989. 416 с.
4. *Bryan G.H.* The waves on a rotating liquid spheroid of finite ellipticity // Phil. Trans. Roy. Soc. 1889. Vol. A180. P. 187–219.