IV. ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ СЕЙСМОЛОГИИ

УДК 550.3:519.2

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО АКУСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Р.Г. Новиков

INVERSE SCATTERING PROBLEM FOR THE TWO-DIMENSIONAL ACOUSTIC EQUATION

R.G. Novikov

In this article the procedure to solve the inverse scattering problem for two-dimensional acoustic equation is proposed. The method to construct a scatterer with the given scattering amplitude at fixed frequency ω is presented. The hypothesis about convergence for $\omega \to \infty$ is proposed.

Хорошо известно, что обратные задачи рассеяния в одномерном случае могут быть успешно решены на основе методов, восходящих к работам Гельфанда, Крейна, Левитана, Марченко. В процессе развития теории солитонов возникли чрезвычайно удачные обобщения этих методов на двумерный случай (отметим здесь ключевые для нас работы [1, 2]).

В настоящей статье эти и другие новые идеи применены в обратной задаче для акустического уравнения. В результате обратная задача рассеяния для двумерного акустического уравнения сведена к решению линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. (По мнению автора предложенная схема может быть успешно реализована на ЭВМ.)

Основу настоящей статьи составляют некоторые результаты, выделенные из [3], с целью применения их к обратной задаче рассеяния для двумерного акустического уравнения. В смысле этих результатов работа [3] является, в первую очередь, продолжением работ [4, 5].

Кроме того, в этой статье формулируется гипотеза 1. В случае, если эта гипотеза верна, обратная задача для двумерного акустического уравнения допускает особенно эффективное решение.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Колебания давления вида $p(x, t) = \varphi(x)\exp(-i\omega t)$ в жидкой изотропной среде с плотностью $\rho(x)$ и скоростью распространения звука $c(x)$ удовлетворяют акустическому уравнению

$$-\Delta\varphi(x) + \frac{\nabla\rho(x)}{\rho(x)}\nabla\varphi(x) = \frac{\omega^2}{c^2(x)}\varphi(x). \tag{1.1a}$$

Калибровочным преобразованием $\varphi(x) = \Psi(x)\sqrt{\rho(x)}$ уравнение (1.1а) сводится к уравнению

$$-\Delta\Psi + m(x)\Psi = \omega^2 n(x)\Psi, \tag{1.1б}$$

где

$$n(x) = 1/c^2(x), \tag{1.2}$$

$$m(x) = \sqrt{\rho(x)}\,\Delta(1/\sqrt{\rho(x)}\,). \tag{1.3}$$

В этой статье исследуется обратная задача рассеяния для уравнения (1.1а) в двумерном случае $x \in \mathbb{R}^2$. Будем считать, что $c(x) \to 1$, $\rho(x) \to \rho_0$ достаточно быстро при $|x| \to \infty$. В этом случае акустическое уравнение удобно записать в виде уравнения Шредингера с потенциалом, зависящем от энергии

$$\Delta\Psi + \upsilon(x, E)\Psi = E\Psi, \tag{1.1в}$$

где $E = \omega^2$, $\upsilon(x, E) = m(x) - Eu(x)$, $u(x) = n(x) - 1$.

Пусть $c(x)$ и $\rho(x)$ обладают такими свойствами, что

$$|m(x)| < \frac{q}{(1 + |x|)^{2+\varepsilon}}, \quad |u(x)| < \frac{q}{(1 + |x|)^{2+\varepsilon}}, \tag{1.4}$$

$0 < \varepsilon$, $0 \leqslant q$, где ε – фиксировано, q – некоторое число.

При этих условиях для любого вектора $k \in \mathbb{R}^2$, $k^2 = E$ уравнения (1.1б), (1.1в) имеют единственное решение со следующей асимптотикой при $|x| \to \infty$:

$$\Psi^+(x,k) = e^{ikx} - i\pi\sqrt{2\pi}e^{-i\pi/4}\,\frac{e^{i|k||x|}}{\sqrt{|k||x|}}\,f\left(k, |k|\frac{x}{|x|}\right) + \bar{o}(1/\sqrt{|x|}). \tag{1.5}$$

(Уравнение (1.1а) имеет единственное решение $\varphi^+(x, k)$ с точно такой же асимптотикой.) Функция $f(k, l)$ из (1.5), где $k, l \in \mathbb{R}^2$, $k^2 = l^2 = E$, называется амплитудой рассеяния.

Пусть коэффициенты $c(x)$ и $\rho(x)$ уравнения (1.1а) не известны, но известна соответствующая им амплитуда рассеяния $f(k, l)$ (при всех $k, l \in \mathbb{R}^2$, $k^2 = l^2$ или при дополнительных ограничениях). Тогда задачу о восстановлении функций $c(x)$ и $\rho(x)$ по амплитуде рассеяния f будем называть обратной задачей рассеяния для двумерного акустического уравнения.

Прежде чем перейти к п. 2, рассмотрим обратную задачу рассеяния в борновском приближении, т.е. когда в (1.1в), $m(x) \ll 1$, $\omega^2 u(x) \ll 1$. В этом приближении

$$f(k,l) \approx \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int e^{i(k-1)x}(m(x) - Eu(x))dx = \hat{\upsilon}(p,E) = \hat{m}(p) - E\hat{u}(p),$$

где $m(\hat{p})$ и $u(\hat{p})$ – преобразования Фурье от $m(x)$ и $u(x)$. Отметим, что

$$\hat{m}(p) = \frac{E_2\hat{\upsilon}(p,E_1) - E_1\hat{\upsilon}(p,E_2)}{E_2 - E_1},$$

$$\hat{u}(p) = \frac{\hat{\upsilon}(p,E_1) - \hat{\upsilon}(p,E_2)}{E_2 - E_1}.$$

В борновском приближении амплитуда рассеяния (полностью известная) при фиксированной частоте ω определяет функцию $\hat{\upsilon}(p,E)$, $E = \omega^2$ при всех p в круге $|p| \leqslant 2\omega$.

При условиях борновского приближения амплитуда рассеяния (полностью известная) при двух фиксированных частотах ω_1 и ω_2, $\omega_1 < \omega_2$ определяет функции $\hat{u}(p)$ и $\hat{m}(p)$ при всех p в круге $|p| \leqslant 2\omega_1$.

Перейдем к решению обратной задачи рассеяния для двумерного акустического уравнения в общем случае.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Пусть f – амплитуда рассеяния для уравнения (1.1в). Для восстановления функции $u(x)$ из (1.1в) здесь предлагается метод, который основан на некоторых результатах, установленных в [3] и некоторых гипотезах. (Отмеченные результаты из [3] основаны, в частности, на работе [4] и являются развитием [5].)

Будем считать, что амплитуда рассеяния $f(k, l)$, $k^2 = l^2 = \omega^2$ полностью известна при некоторой достаточно большой фиксированной частоте ω. Работа [3] предоставляет линейные интегральные уравнения для нахождения по f функции $q(x, E)$, такой, что f является амплитудой рассеяния для уравнения

$$-\Delta\Psi + q(x, E)\Psi = E\Psi, \tag{2.1}$$

где $E = \omega^2$ при фиксированном ω.

Сделаем две замены переменных:

a) $z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2,$

б) $\lambda = \dfrac{k_1 + ik_2}{\sqrt{E}}, \quad \lambda' = \dfrac{l_1 + il_2}{\sqrt{E}}$

и запишем f и q в виде $f = f(\lambda, \lambda', E)$, $q = q(z, \bar{z}, E)$.

Схема нахождения функции q состоит в следующем:

$f \to h\pm \to \sigma\pm \to \rho \to \Psi \to q.$

$$h\pm(\lambda,\lambda') - \pi i \int_{|\lambda''|=1} h\pm(\lambda,\lambda'')\theta\left[\pm\frac{1}{i}\left(\frac{\lambda''}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda''}\right)\right] f(\lambda'',\lambda')|d\lambda''| = f(\lambda,\lambda'), \tag{2.2}$$

$$\sigma\pm(\lambda,\lambda') = \theta\left[-\frac{1}{i}\left(\frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda'}\right)\right] h\pm(\lambda,\lambda') - \theta\left[\frac{1}{i}\left(\frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda'}\right)\right] h\pm(\lambda'). \tag{2.3}$$

$$\rho(\lambda,\lambda') + \pi i \int_{|\lambda''|=1} \rho(\lambda,\lambda'')\theta\left[\pm\frac{1}{i}\left(\frac{\lambda'}{\lambda''} - \frac{\lambda''}{\lambda'}\right)\right]\sigma\pm(\lambda'',\lambda')|d\lambda''| = -\pi i\sigma\pm(\lambda,\lambda')\cdot \tag{2.4}$$

$$\Psi(z,\bar{z},\lambda,E) - \left[\int_{|\xi|=1} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda'|=1} \frac{\rho(\lambda,\lambda')}{\xi - \lambda'(1+0)} \exp\left[\frac{i\sqrt{E}}{2}(\lambda'\bar{z} + z/\lambda')\right]\times\right.$$

$$\left.\times|d\lambda'|\exp\left[-\frac{i\sqrt{E}}{2}(\xi\bar{z} + z/\xi)\right]\Psi(z,\bar{z},\xi,E)d\xi\right] =$$

$$= \int_{|\lambda'|=1} \rho(\lambda,\lambda')\exp\left[\frac{i\sqrt{E}}{2}(\lambda'\bar{z} + z/\lambda')\right]|d\lambda'|, \tag{2.5}$$

$$q(z,\bar{z},E) = -\frac{\sqrt{E}}{\pi}\int_{|\xi|=1} i\xi\frac{\partial}{\partial z}\left(\Psi(z,\bar{z},\xi,E)\exp\left[-\frac{i\sqrt{E}}{2}(\xi\bar{z} + x/\xi)\right]\right)|d\xi|. \tag{2.6}$$

Пусть функция $f(\lambda, \lambda')$ обладает свойствами унитарности и взаимности (2.7), (2.8).

(Это хорошо известные необходимые свойства амплитуды рассеяния.)

$$f(\lambda,\lambda')-\overline{f(\lambda',\lambda)}=\frac{\pi}{i}\int_{|\lambda''|=1} f(\lambda,\lambda'')\overline{f(\lambda',\lambda'')}|d\lambda''|, \tag{2.7}$$

$$f(\lambda,\lambda')=f(-\lambda',-\lambda). \tag{2.8}$$

Пусть, кроме того,

$$\left(\int_{|\lambda|=1}|d\lambda|\int_{|\lambda'|=1}|d\lambda'||f(\lambda,\lambda')|^2\right)^{1/2}\leqslant\frac{1}{3\pi}. \tag{2.9}$$

Тогда в работах [3], [4] с использованием результатов [5] установлено, что потенциал $q(z,\bar{z},E)$, построенный по $f(\lambda, \lambda')$, в силу (2.2)–(2.6) является ограниченной (вещественно-аналитической), вещественной, убывающей на бесконечности функцией и $f(\lambda, \lambda')$ является амплитудой рассеяния для уравнения (2.1) при фиксированном E.

Наши гипотезы состоят в следующем.

Гипотеза 0. Линейные интегральные уравнения (2.3)–(2.5) могут быть, как правило, успешно решены, даже если амплитуда рассеяния не обладает свойством малости нормы (2.9). В качестве примера формулировка может быть дана более точно: для открытого всюду плотного подмножества в пространстве непрерывных функций f со свойствами (2.7), (2.8) уравнения (2.3), (2.4) однозначно разрешены при всех значениях параметров. При этом уравнение (2.5) однозначно разрешимо при почти всех $(z,\bar{z})$.

Гипотеза 1. Пусть в уравнении (1.1в) $u(x)$ и $m(x)$ – фиксированные гладкие функции (со свойством (1.4)). Пусть $f(\lambda, \lambda', E)$ – соответствующая амплитуда рассеяния и функция $q(x, E)$ построена по $f(\lambda, \lambda', E)$ в силу (2.2)–(2.6).

Тогда

$$q(x, E)/E \to u(x), \quad \text{при} \quad E\to\infty$$

(например, на любом фиксированном круге).

Гипотеза 1 возникла под влиянием [6] и связанных с ней работ. В случае, если гипотеза 1 верна, уравнения (2.2)–(2.6) приводят к эффективному решению двумерной обратной задачи рассеяния для уравнения (1.1a). (Под решением обратной задачи здесь понимается (приближенное) нахождение коэффициента $c(x)$ в уравнении (1.1a) по амплитуде рассеяния f, полностью известной при одной фиксированной достаточно высокой частоте.)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Manakov S.V.* The inverse scattering transform for the timedependent Schrodinger equation and Kadomtsev-Petviashvili equation // Physica. 1981. Vol. 3D. P. 420–427.
2. *Ablovitz M.J., Bar Yaacov, Fokas A.S.* On the inverse scattering transform for the Kadomtsev-Petviashvili equation // Study in Appl. Math. 1983. Vol. 69. P. 135–143.
3. *Novikov R.G.* Two dimensional inverse scattering problem for Schrodinger equation at a fixed energy // J. Functional Analysis. 1992. Vol. 103. P. 409–463.
4. *Гриневич П.Г., Новиков Р.Г.* Аналоги многосолитонных потенциалов для двумерного оператора Шредингера и нелокальная задача Римана // ДАН СССР. 1986. Т. 286, № 1. С. 19–22.
5. *Новиков Р.Г.* Построение двумерного оператора Шредингера с данной амплитудой рассеяния при фиксированной энергии // Теор. и мат. физика. 1986. Т. 66, вып. 2. С. 234–240.
6. *Маркушевич В.М., Новикова Н.Н., Повзнер Т.А. и др.* Метод восстановления акустического разреза по нормальным монохроматическим волнам // Математические методы в сейсмологии и геодинамике. М.: Наука. 1986. С. 134–145. (Вычисл. сейсмология: вып. 19).