УДК 550.310:517.984.54

МАТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ВОЛН РЭЛЕЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИ ОДНОРОДНЫХ ТЕЛАХ

С.Г.Киселев, В.М. Маркушевич, А.С. Цемахман

THE MATRIX STURM–LIOUVILLE PROBLEM FOR RAYLEIGH WAVES IN CYLINDRICALLY LAYERED BODIES

S.G. Kiselev, V.M. Markushevich and A.S. Tsemahman

Rayleigh-type vibrations are usually studied in geophysics for various cases of plane-stratified media. However, such vibrations exist in elastic media with other types of symmetry, as in cylindrical axially symmetric bodies with properties varying with radius. This type of symmetry is typical of well logging measurements and can often be found in engineerng problems, such as the ultrasonic nondestructive testing of cables, pipes, and optical fibers. We show here that vibrations in a cylindrical body can be described by solutions of a matrix Sturm–Liouville problem. The matrix potential in such problem has the same structure as in the case of usual Rayleigh waves in a plane–stratified body. The two cases differ in the analytical form of the symmertic matrices D specifying the potentials and in the boundary conditions at the surface. We derive the matrix D and the boundary conditions for the case of the cylindrical symmetry.

В работах [1–3] задача о распространении рэлеевских волн в горизонтально однородных средах была сведена к матричной краевой задаче Штурма–Лиувилля с матричным потенциалом специальной структуры, которая очень близка к симплектической матрице [4]. Разнообразные следствия такой редукции изучались в статьях [5–7] и мы продолжаем работать над этим кругом вопросов.

Горизонтально однородная модель упругой среды чаще других встречается в задачах сейсмологии. Однако в инженерной практике не менее часто возникает необходимость исследовать прохождение волн в цилиндрически однородных телах. К таким телам относятся прямолинейные участки кабелей, трубы, стержни и проволока, оптические волноводы и т.д. В сейсмологии цилиндрическая симметрия возникает в задачах каротажа в скважинах. Поэтому мы решили выяснить, возможно ли свести систему уравнений, описывающую прохождение волн аналогичных рэлеевским в цилиндрически симметричном теле, к матричной задаче Штурма–Лиувилля с такой же, как и для горизонтально однородных сред, симплектической структурой потенциала. Ответ оказался положительным, а процедура такого сведения описывается в этой статье. (Мы используем обычный шрифт для скалярных величин, жирный – для векторных и матричных. Величины с нижним индексом нуль относятся к свободной поверхности. Верхний индекс "т" означает транспонирование.)

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В любой осесимметричной среде можно выделить колебания со смещениями, лежащими в меридиональной, т.е. проходящей через ось симметрии, плоскости [8]. Свойства таких волн похожи на рэлеевские. Рассматривая в цилиндрической системе координат уравнения движения упругой среды, тензор деформаций и закон Гука [9–10], приходим к следующим уравнениям для смещений u_r, u_z:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left((\lambda+2\mu)\frac{\partial u_r}{\partial r}+\lambda\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{u_r}{r}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\right)+\frac{2\mu}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r}\right)=\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left((\lambda+2\mu)\frac{\partial u_z}{\partial z}+\lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}\right)\right)+\frac{\mu}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)=\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \qquad (1)$$

с краевыми условиями при $r = r_0$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r}\right) = 0,$$

$$\mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) = 0. \tag{2}$$

Эти условия следует дополнить при $z \to \pm\infty$ условиями излучения Зоммерфельда для непрерывного спектра. Что касается требований к дискретному спектру, то они сводятся к неотрицательности групповой скорости каждой из мод. Это условие иногда приводит к отрицательному знаку фазовой скорости, т.е. к появлению так называемой обратной волны [11–12].

Если в (1) положить $\mu = \mu(r)$, $\lambda = \lambda(r)$ и $\rho = \rho(r)$, то получим

$$\frac{\partial}{\partial r}\left((\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r}\right)\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \frac{2}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2u_r}{r^2}\right) = \rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\right) + \lambda\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}\right) + \mu\left(2\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) = \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \tag{3}$$

Пусть

$$u_r(t, z, r) = i\int_0^\infty e^{i\omega t}d\omega\int_0^\infty \upsilon(\omega, \xi, r)e^{i\xi z}d\xi,$$

$$u_z(t, z, r) = i\int_0^\infty e^{i\omega t}d\omega\int_0^\infty w(\omega, \xi, r)e^{i\xi z}d\xi, \tag{4}$$

тогда подстановка (4) в (3) и (2) дает

$$\frac{d}{dr}\left((\lambda + 2\mu)\frac{d\upsilon}{dr} + \lambda\left(\frac{\upsilon}{r} + \xi w\right)\right) + \mu\left(\frac{2}{r}\frac{d\upsilon}{dr} + \xi\frac{dw}{dr}\right) + \left(\omega^2\rho - \left(\xi^2 + \frac{2}{r^2}\right)\mu\right)\upsilon = 0,$$

$$\frac{d}{dr}\left(\mu\left(\frac{dw}{dr} - \xi\upsilon\right)\right) + \frac{\mu}{r}\frac{dw}{dr} - \xi\lambda\frac{d\upsilon}{dr} - \xi(\lambda + \mu)\frac{\upsilon}{r} + (\omega^2\rho - \xi^2(\lambda + 2\mu))w = 0 \tag{5}$$

с краевыми условиями при $r = r_0$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{d\upsilon}{dr} + \lambda\left(\frac{\upsilon}{r} + \xi w\right) = 0,$$

$$\frac{dw}{dr} - \xi\upsilon = 0. \tag{6}$$

Систему (5) мы собираемся привести к матричному оператору типа Штурма–Лиувилля с помощью двух последовательностей подстановок. Получающиеся операторы оказываются взаимно сопряженными. Те же подстановки, примененные к (6), дают в результате сопряженные краевые условия.

Невозможно привести все выкладки, однако будет описана последовательность преобразований и приведены промежуточные результаты, что позволит восстановить недостающие звенья. Полезно также сравнить эти преобразования с приведенными в [1] и [2] для горизонтально однородных сред.

2. ПОДСТАНОВКА ПИКЕРИСА

Всюду в дальнейшем будем обозначать $\dfrac{d}{dr} \equiv (\dot{\ })$.

Положим в (5)

$$\upsilon = h + \dot{\chi}, \quad w = -\xi\chi. \tag{7}$$

При этом в одном из уравнений (7) возникнет $\dddot{\chi}$, которую можно устранить, продифференцировав другое и составив из первого уравнения и производной второго линейную комбинацию с подходящими коэффициентами. В результате получим

$$\begin{aligned}
&\ddot{h} - \xi^2 h = -\frac{1}{\mu}\left(\omega^2\rho - \ddot{\mu} - \frac{\dot{\mu}}{r} - \frac{\mu}{r^2} + (\nu - \dot{\mu})\zeta\right)h + \frac{1}{\mu}(\omega^2\dot{\rho} - \omega^2\rho\zeta)\chi - \\
&-\frac{1}{\mu}\left(\frac{\mu}{r} + (\lambda+\mu)\zeta\right)\dot{h} + \frac{1}{\mu}\left(2\ddot{\mu} + \frac{2\dot{\mu}}{r} - \beta\zeta\right)\dot{\chi}, \\
&\ddot{\chi} - \xi^2\chi = -\frac{\nu - \dot{\mu}}{\lambda + 2\mu}h - \frac{\omega^2\rho}{\lambda+2\mu}\chi - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\dot{h} - \frac{\beta}{\lambda+2\mu}\dot{\chi},
\end{aligned} \tag{8}$$

где $\beta = 2\dot{\mu} + \dfrac{\lambda+2\mu}{r}, \quad \nu = 2\dot{\mu} + \dfrac{\lambda+2\mu}{r}, \quad \zeta = 2\dot{\mu} + \dfrac{2\dot{\mu}}{\lambda+2\mu}.$

Положив теперь в (8)

$$\chi = \frac{\mu_0}{\mu}\chi_1, \quad h = \frac{r_0}{r}h_1 + \frac{\mu_0}{\mu}\left(2\frac{\dot{\mu}}{\mu} - \frac{1}{r}\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\right)\chi_1, \tag{9}$$

получим

$$\begin{aligned}
&\ddot{h}_1 - \xi^2 h_1 = \left[\left(-\omega^2\frac{\rho}{\mu} + \frac{\ddot{\mu}}{\mu}\right) + \frac{1}{r}\frac{\lambda\dot{\mu}}{\mu(\lambda+\mu)}\right]h_1 + \frac{r\mu_0}{r_0}\left[\left(\omega^2\dot{\left(\frac{\rho}{\mu^2}\right)} + 2\dddot{\overline{\mu^{-1}}} + 2\frac{\dot{\mu}}{\mu}\ddot{\overline{\mu^{-1}}}\right) + \right. \\
&+\frac{1}{r}\left(\ddot{\overline{3\mu^{-1}}} + \ddot{\overline{(\lambda+\mu)^{-1}}} - \frac{2}{\mu}\dot{\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}\right)} + \dot{\overline{2\mu^{-1}}}\frac{\dot{\mu}}{\lambda+\mu} + \omega^2\frac{\rho}{\mu^2}\right) + \\
&\left.+\frac{1}{r^2}\left(\dot{\overline{-(\mu^{-1} + (\lambda+\mu)^{-1})}} - (\mu^{-1} + (\lambda+\mu^{-1}))\frac{\lambda(\lambda+\mu)\dot{\mu} + \mu^2\dot{\lambda}}{\mu(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}\right)\right]\chi_1 + \\
&+2\left[-\frac{r}{r_0}d + \frac{1}{2r_0}\dot{\overline{c^{-1}}} - \frac{c^{-1}}{4r_0 r}\right]\dot{\chi}_1, \\
&\ddot{\chi}_1 - \xi^2 h_1 = -\frac{r_0}{r}\frac{\mu\dot{\mu}}{(\lambda+2\mu)}h_1 + \\
&+\left[\left(-\omega^2\frac{\rho}{\lambda+2\mu} + \frac{\ddot{\mu}\mu - 2\mu^2}{\mu^2} - 2\frac{\ddot{\mu}}{\mu}\frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)} + 4\frac{(\dot{\mu})^2(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}\right) - \right. \\
&\left.-\frac{1}{r}\frac{2\lambda(\lambda+\mu)\dot{\mu} + \mu^2\dot{\lambda}}{\mu(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}\right]\chi_1 - \frac{2r_0}{r}c\dot{h}_1,
\end{aligned} \tag{10}$$

где функции c, d определяются, как и в [1], формулами

$$c = \frac{\mu(\lambda+\mu)}{2\mu_0(\lambda+2\mu)}, \quad d = -\mu_0 \ddot{\overline{\mu^{-1}}}. \tag{11}$$

Введем функции

$$c_c = \frac{r_0}{r} c, \qquad d_c = \frac{r}{r_0} d - \frac{1}{2r_0} \dot{c}^{-1} + \frac{c^{-1}}{4r_0 r}, \tag{12}$$

которые облегчат сравнение цилиндрического случая с горизонтально однородным.

Для того чтобы избавиться от оставшихся первых производных в (10), сделаем матричную замену

$$H_1 = \tilde{G}_c H_2, \tag{13}$$

где $H_j = \begin{Vmatrix} h_j \\ \chi_j \end{Vmatrix}$. Определим также матрицы – функции

$$L_c = \begin{Vmatrix} 0 & c_c \\ d_c & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{L}_c = \begin{Vmatrix} 0 & -d_c \\ -c_c & 0 \end{Vmatrix} = -L_c^T. \tag{14}$$

Тогда (10) записывается в виде

$$\ddot{H}_1 - \xi^2 H_1 = \tilde{K} H_1 + 2\tilde{L}_c \dot{H}_1. \tag{15}$$

Определив $\tilde{G}_c$ соотношениями

$$\dot{\tilde{G}}_c = \tilde{L}_c \tilde{G}_c, \quad \tilde{G}_c(0) = E, \tag{16}$$

где E – единичная матрица, и подставив (13) в (15), получим

$$\ddot{H}_2 - \xi^2 H_2 = \tilde{A}_c H_2, \tag{17}$$

где

$$\tilde{A}_c = \tilde{G}_c^{-1} \tilde{B}_c \tilde{G}_c, \tag{18}$$

$$\tilde{B}_c = \tilde{K} + \tilde{L}_c^2 - \dot{\tilde{L}}_c. \tag{19}$$

3. АЛЬТЕРНАТИВНАЯ ПОДСТАНОВКА

Заметим, что первая подстановка (7) в ряде подстановок из п. 2 не изменилась по сравнению с описанной в [2] задачей для горизонтально однородного тела. В альтернативной серии подстановок, аналогичной [1], ситуация оказывается другой: первая подстановка в этой серии отличается от использования для горизонтально однородного тела [1]. Именно, положим в (5)

$$w = \dot{f} + \frac{f}{r} + \varphi, \quad \upsilon = -\xi f. \tag{20}$$

После преобразований, сходных с отмеченными в п. 2, получим

$$\ddot{f}-\xi^2 f=\left(-\frac{\omega^2\rho}{\mu}+\frac{1}{r^2}\right)f+\frac{\dot{\lambda}}{\mu}\varphi-\left(2\frac{\dot{\mu}}{\mu}+\frac{1}{r}\right)\dot{f}+\frac{\lambda+\mu}{\mu}\dot{\varphi},$$

$$\ddot{\varphi}-\xi^2\varphi=\left[\omega^2\left(\frac{\dot{\rho}}{\lambda+2\mu}-2\frac{\rho\dot{\mu}}{\mu(\lambda+2\mu)}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{2\dot{\mu}}{\lambda+2\mu}\right]f+$$

$$+\left(-\omega^2\frac{\rho}{\lambda+2\mu}+\frac{2}{\mu}\frac{\dot{\lambda}\dot{\mu}-\ddot{\lambda}\mu}{\mu(\lambda+2\mu)}-\frac{\dot{\lambda}}{r(\lambda+2\mu)}\right)\varphi+$$

$$+2\frac{\ddot{\mu}\mu-2(\dot{\mu})^2}{\mu(\lambda+2\mu)}\dot{f}+\left(2\frac{\dot{\mu}\lambda-\dot{\lambda}\mu}{\mu(\lambda+2\mu)}-\frac{1}{r}\right)\dot{\varphi}. \qquad (21)$$

Положив в (21)

$$f=\frac{\mu_0}{\mu}f_1,\quad \varphi=\frac{r_0}{r}\frac{\mu}{(\lambda+2\mu)}\varphi_1+\frac{\mu_0}{r(\lambda+\mu)}f_1, \qquad (22)$$

получим

$$\ddot{f}_1-\xi^2 f_1=\left(-\omega^2\frac{\rho}{\mu}+\frac{\ddot{\mu}}{\mu}+\frac{1}{r}\frac{\dot{\mu}\lambda}{\mu(\lambda+\mu)}\right)f_1+$$

$$+\frac{r_0}{r\mu_0}\left(\frac{\dot{\lambda}\mu^2}{(\lambda+2\mu)^2}+\frac{\dot{\mu}\lambda(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)^2}-\frac{\mu(\lambda+\mu)}{r(\lambda+2\mu)}\right)\varphi_1+2c_c\dot{\varphi}_1,$$

$$\ddot{\varphi}_1-\xi^2\varphi_1=\frac{\mu_0}{r_0}\left[r\left(\omega^2\left(\frac{\dot{\rho}}{\mu^2}\right)+2\frac{\ddot{\mu}}{\mu}\overset{\cdot\cdot}{\overline{\mu^{-1}}}\right)+\left(\omega^2\frac{\rho}{\mu^2}+\frac{\ddot{\lambda}}{(\lambda+\mu)^2}-\frac{\ddot{\mu}\lambda(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)^2}-\right.\right.$$

$$(23)$$

$$\left.\dot{\lambda}^2\frac{2\mu}{\mu(\lambda+\mu)^3}-2(\dot{\mu})^2\frac{\lambda^2+2\mu\lambda+2\mu^2}{\mu^2(\lambda+\mu)^3}-\dot{\lambda}\dot{\mu}\frac{4}{(\lambda+\mu)^3}\right)-\frac{1}{r}\frac{\lambda(\lambda+\mu)\dot{\mu}+\mu^2\dot{\lambda}}{\mu^2(\lambda+\mu)^2}-$$

$$\left.-\frac{1}{r^2}\frac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)}\right]f_1+\left[\left(-\omega^2\frac{\rho}{\lambda+2\mu}+\frac{\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\overset{\cdot\cdot}{\overline{\mu^{-1}}}\right)-\frac{1}{r}\frac{2\lambda(\lambda+\mu)\dot{\mu}+\mu^2\dot{\lambda}}{\mu(\lambda+2\mu)^2}\right]\varphi_1+2d_c\dot{f}_1,$$

где c_c и d_c определены в (12).

Матричная замена

$$F_1=G_cF_2, \qquad (24)$$

где $F_1=\left\|\begin{matrix} f_1\\ \varphi_1\end{matrix}\right\|$, G_c – решение задачи Коши

$$\dot{G}_c=L_cG_c,\quad G_c(0)=E \qquad (25)$$

и L_c определено в (14), приводит к следующей матричной системе Штурма–Лиувилля, не содержащей первых производных функций f_2 и φ_2:

$$\ddot{F}_2-\xi^2F_2=A_cF_2, \qquad (26)$$

где

$$A_c = G_c^{-1} B_c G_c, \tag{27}$$

$$B_c = K + L_c^2 - \dot{L}_c, \tag{28}$$

а K является матрицей коэффициентов при f_1 и φ_1 в системе (23).

Непосредственное вычисление показывает, что

$$A_c^T = \tilde{A}_c. \tag{29}$$

где $\tilde{A}_c$ введено и определено в (17)–(19).

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

Опишем преобразование краевых условий (6). При подстановке (7) они переходят в

$$\begin{gathered} h + 2\dot{\chi} = 0, \\ -\left(\dot{\mu} + \frac{\mu}{r}\right)h + (2\mu\xi^2 - \omega^2\rho)\chi + \mu\dot{h} - 2\left(\dot{\mu} + \frac{\mu}{r}\right)\dot{\chi} = 0. \end{gathered} \tag{30}$$

Подстановка (9) трансформирует систему (30) в

$$\begin{gathered} h_1 - \frac{1}{r}\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\chi_1 + 2\dot{\chi}_1 = 0, \\ -\left(\dot{\mu} + 2\frac{\mu}{r}\right)h_1 + \left[\mu\left(2\xi^2 - \omega^2\frac{\rho}{\mu} - 2\mu\ddot{\overline{\mu^{-1}}}\right) + \frac{1}{r}\frac{(2\lambda^2 + 5\lambda\mu + 4\mu^2)\dot{\mu} + \mu^2\dot{\lambda}}{(\lambda+\mu)^2} + \right. \\ \left. + \frac{2}{r^2}\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)}\right]\chi_1 + \mu\dot{h}_1 - \frac{\mu}{r}\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+\mu}\dot{\chi}_1 = 0. \end{gathered} \tag{31}$$

В матричной форме (31) можно записать так

$$RH_1 + S\dot{H}_1 = 0. \tag{32}$$

Подстановка (13) с учетом (16) преобразует (32) в

$$H_2 + \tilde{\theta}H_2 = 0, \quad \text{где} \quad \tilde{\theta} = S^{-1}R - \tilde{L}_c. \tag{33}$$

Матрица $\tilde{\theta}$ имеет следующий вид:

$$\tilde{\theta} = \left\| \begin{matrix} -\dfrac{\dot{\mu}}{\mu} - \dfrac{1}{2r}\dfrac{\lambda}{(\lambda+\mu)} & 2\xi^2 - \omega^2\dfrac{\rho}{\mu} - 2\mu\ddot{\overline{\mu^{-1}}} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)}\dot{\mu} - \dfrac{1}{2r^2}\dfrac{\mu(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)^2} \\ \dfrac{\mu}{2(\lambda+2\mu)} & -\dfrac{1}{2r}\dfrac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \end{matrix} \right\| . \tag{34}$$

При альтернативной подстановке (20) получаем

$$\begin{gathered} \left(2\xi^2 - \omega^2\frac{\rho}{\mu}\right)f + \frac{\dot{\lambda}}{\mu}\varphi - 2\frac{\dot{\mu}}{\mu}\dot{f} + \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\dot{\varphi} = 0, \\ \lambda\varphi - 2\mu\dot{f} = 0. \end{gathered} \tag{35}$$

Подстановка (22) преобразует (35) в

$$\left[\left(2\xi^2-\omega^2\frac{\rho}{\mu}+2\left(\frac{\dot\mu}{\mu}\right)^2\right)-\frac{1}{r}\frac{(\lambda+2\mu)\dot\mu+\mu\dot\lambda}{(\lambda+\mu)^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\right]f_1+$$

$$+\left[\frac{\dot\mu\lambda}{\mu(\lambda+2\mu)}-\frac{1}{r}\right]\varphi_1+\left[-2\frac{\dot\mu}{\mu}+\frac{1}{r}\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\right]\dot f_1+\dot\varphi_1=0, \tag{36}$$

$$\left(2\dot\mu+\frac{1}{r}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right)f_1+\frac{\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\varphi_1-2\mu\dot f_1=0.$$

Как и при подстановке Пикериса, систему (36) можно переписать в матричном виде. После перехода к новым переменным с помощью (24) получаем

$$\dot F_2+\theta F_2=0,\quad \text{где}\quad \theta^T=\tilde\theta. \tag{37}$$

5. СТРУКТУРА ПОТЕНЦИАЛА A_c

Итак, уравнения для волн Рэлея в цилиндрически однородном теле, так же как и в горизонтально однородном, двумя последовательностями подстановок могут быть сведены к двум взаимно сопряженным матричным задачам Штурма–Лиувилля (см. (29) и (37)). Первая описывается уравнениями (17)–(19) с краевыми условиями (33)–(34), а вторая – уравнениями (25)–(28) с краевыми условиями (37). Решения этих задач связаны соотношением

$$H(r)=P(r)\begin{pmatrix}\dfrac{d^2}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}-\dfrac{1}{r^2}-\xi^2 & \dfrac{d}{dr}\\ -\left(\dfrac{d}{dr}+\dfrac{1}{r}\right) & -1\end{pmatrix}Q(r)F(r), \tag{38}$$

где

$$Q(r)=\begin{pmatrix}\dfrac{\mu_0}{\mu} & 0\\ \dfrac{\mu_0}{r(\lambda+\mu)} & \dfrac{r_0}{r}\dfrac{\mu}{(\lambda+2\mu)}\end{pmatrix}G_c, \tag{39}$$

$$P(r)=G_c^T\begin{pmatrix}\dfrac{r_0}{r} & \dfrac{r_0}{r}\left(2\mu\overline{\mu^{-1}}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)}\right)\\ 0 & \dfrac{\mu_0}{\mu}\end{pmatrix}. \tag{40}$$

Формулы (38)–(40) аналогичны приведенным в [3]. Проводя рассуждения, которые мало отличаются от [3], получаем, что матричный потенциал A представим в виде

$$A=C\dot D-\det DE,$$

где

$$C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

а D – симметричная матрица,

$$D=G_c^T\Delta_c G_c. \tag{41}$$

В формуле (41) Δ_c является симметрической матрицей:

$$\Delta_c = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_0 \\ \delta_0 & \delta_2 \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Некоторую сложность представляет определение структуры симметричной матрицы Δ_c. Из-за более сложных соотношений в задаче для цилиндрического тела примененный в [3] способ становится очень трудоемким. Однако оказалось, что формулы, приведенные в [3], позволяют просто найти внедиагональный элемент δ_0. После этого остальные элементы находятся без труда из выражения для $\det D = \det \Delta_c$. В результате вместо (42) получаем

$$\Delta_c = \begin{pmatrix} r\left(-\omega^2\mu_0\dfrac{\rho}{\mu^2} + d\right) + \\ + \dfrac{\mu_0(4(\lambda^3+7\lambda^2\mu+14\lambda\mu^2+9\mu^3)\dot{\mu}+\mu^3\dot{\lambda})}{\mu^2(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)(\lambda+3\mu)} - \\ - \dfrac{\mu_0(\lambda+2\mu)(3\lambda+5\mu)}{2\mu(\lambda+\mu)^2} & \dfrac{\dot{\mu}}{\mu} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \\ \dfrac{\dot{\mu}}{\mu} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} & -\dfrac{1}{r}\dfrac{\mu(\lambda+3\mu)}{2\mu_0(\lambda+2\mu)} \end{pmatrix},$$

где d определено формулой (11).

* * *

Эквивалентность уравнений для рэлеевских волн в цилиндрически однородных телах матричной задаче Штурма–Лиувилля со специальной структурой потенциала открывает много возможностей для изучения этих волн. По аналогии с тем, что уже сделано для волн в горизонтально однородных средах, можно исследовать среды с просто устроенными, например, постоянными матрицами D. Кусочная аппроксимация такими средами позволяет эффективно моделировать распространение волн в более сложных цилиндрических структурах. Можно исследовать обращение модальных составляющих в стационарных полях колебаний этих сред для определения их упругих свойств. Это, как можно надеяться, позволит разработать новые методы каротажа и ультразвуковой дефектоскопии.

Однако наиболее важным следствием настоящей работы является то, что открывается единообразный подход к изучению рэлеевских волн или колебаний рэлеевского типа в телах с различной симметрией, инвариантных относительно разного типа групп движений. Не остается почти никаких сомнений, что эти колебания описываются матричной задачей Штурма–Лиувилля с потенциалом, который определяется D-матрицей, хотя вид D-матрицы зависит от типа симметрии. Поэтому в одной из следующих статей мы собираемся исследовать рэлеевские колебаний в произвольной системе координат для упругих тел со свойствами, зависящими только от одной координаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркушевич В.М.* Вынужденные гармонические колебания рэлеевского типа и матричная задача рассеяния // Математические методы в сейсмологии и геодинамике. М.: Наука, 1986. С. 119–135. (Вычисл. сейсмология: вып. 19).
2. *Маркушевич В.М.* Подстановка Пикериса и некоторые спектральные свойства задачи Рэлея // Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука, 1989. С. 117–127. (Вычисл. сейсмология; вып. 22).
3. *Маркушевич В.М.* Представление матричных потенциалов в уравнении для волн Рэлея через симметричную матрицу // Компьютерный анализ геофизических полей. М.: Наука, 1990. С. 227–234. (Вычисл. сейсмология; вып. 23).

4. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.
5. *Маркушевич В.М., Цемахман А.С.* *D*-постоянные среды и рэлеевские волны в них на характерных частотах. I. Пуассоновы среды. // Современные методы интерпретации сейсмологических данных. М.: Наука, 1991. С. 149–157. (Вычисл. сейсмология; вып. 24).
6. *Маркушевич В.М., Стеблов Г.М., Цемахман А.С.* Аналитическое описание волн Рэлея в некоторых средах непуассонова типа. Ibid. С. 158–171.
7. *Маркушевич В.М., Стеблов Г.М., Цемахман А.С.* Быстрый метод матричного пропагатора для градиентных сред // Геодинамика и прогноз землетрясений. Наст. вып.
8. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: ГТТИ, 1955. 492 с.
9. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 687 с.
10. *Мак–Коннел А.Дж.* Введение в тензорный анализ. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.
11. *Зильберглейт А.С., Копилевич Ю.И.* Спектральная теория регулярных волноводов. Л.: ЛФТИ АН СССР, 1983. 301 с.
12. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.

УДК 512.3+517.5+550.34

РАЦИОНАЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ, УСТОЙЧИВЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ И РАССЛОЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ПОИСКА САМОГО ШИРОКОГО ВОЛНОВОДА

М.Л. Гервер

RATIONAL APPROXIMANTS, STABLE POLYNOMIALS AND FIBERINGS IN THE SEARCH FOR THE WIDEST WAVEGUIDE

M.L. Gerver

A complete mathematical study is presented for an extremum problem that has arisen in the development of the fast search algorithm yielding the widest waveguide.

Предлагаемая работа – продолжение [1–3]. Так же, как в [1–3], знаки « » выделяют начало и конец доказательств. Ссылки типа ⟨1⟩ отсылают к комментариям и примечаниям в конце статьи.

Поиск скоростной функции с самым широким волноводом среди функций, имеющих один и тот же годограф, приводит к задаче о верхней грани функционала $h(f)$, точно сформулированной в п. 1.1. Геофизическая интерпретация дана в п. 1.2. В статье проведено полное математическое исследование задачи.

Развитые методы и полученные результаты применяются в [4] к исследованию более общей экстремальной задачи. Решения обеих задач используются в разработке быстрых алгоритмов для определения границ неединственности при обращении годографа.

Забегая вперед, опишем (в самых общих чертах) основной результат статьи. Точная формулировка и доказательство даны в разд. 11.

Задачу о верхней грани $h(f)$ удастся сформулировать следующим образом. В $\boldsymbol{R}^N$ вводится отношение частичной упорядочности $X^* \prec X$; Ω – многомерная область: $\Omega \subset \boldsymbol{R}^N$; в замыкании $\overline{\Omega}$ задана функция h. Для каждой точки $X \in \Omega$ нужно найти $\sup h(X^*)$ по всем $X^* \in \overline{\Omega}$, $X^* \prec X$.

Решение получено в следующей форме. Указано *множество максимумов* $\mathcal{M} \subset \overline{\Omega}$;