4. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.
5. *Маркушевич В.М., Цемахман А.С.* D-постоянные среды и рэлеевские волны в них на характерных частотах. I. Пуассоновы среды. // Современные методы интерпретации сейсмологических данных. М.: Наука, 1991. С. 149–157. (Вычисл. сейсмология; вып. 24).
6. *Маркушевич В.М., Стеблов Г.М., Цемахман А.С.* Аналитическое описание волн Рэлея в некоторых средах непуассонова типа. Ibid. С. 158–171.
7. *Маркушевич В.М., Стеблов Г.М., Цемахман А.С.* Быстрый метод матричного пропагатора для градиентных сред // Геодинамика и прогноз землетрясений. Наст. вып.
8. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: ГТТИ, 1955. 492 с.
9. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 687 с.
10. *Мак–Коннел А.Дж.* Введение в тензорный анализ. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.
11. *Зильберглейт А.С., Копилевич Ю.И.* Спектральная теория регулярных волноводов. Л.: ЛФТИ АН СССР, 1983. 301 с.
12. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.

УДК 512.3+517.5+550.34

РАЦИОНАЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ, УСТОЙЧИВЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ И РАССЛОЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ПОИСКА САМОГО ШИРОКОГО ВОЛНОВОДА

М.Л. Гервер

RATIONAL APPROXIMANTS, STABLE POLYNOMIALS AND FIBERINGS IN THE SEARCH FOR THE WIDEST WAVEGUIDE

M.L. Gerver

A complete mathematical study is presented for an extremum problem that has arisen in the development of the fast search algorithm yielding the widest waveguide.

Предлагаемая работа – продолжение [1–3]. Так же, как в [1–3], знаки « » выделяют начало и конец доказательств. Ссылки типа ⟨1⟩ отсылают к комментариям и примечаниям в конце статьи.

Поиск скоростной функции с самым широким волноводом среди функций, имеющих один и тот же годограф, приводит к задаче о верхней грани функционала $h(f)$, точно сформулированной в п. 1.1. Геофизическая интерпретация дана в п. 1.2. В статье проведено полное математическое исследование задачи.

Развитые методы и полученные результаты применяются в [4] к исследованию более общей экстремальной задачи. Решения обеих задач используются в разработке быстрых алгоритмов для определения границ неединственности при обращении годографа.

Забегая вперед, опишем (в самых общих чертах) основной результат статьи. Точная формулировка и доказательство даны в разд. 11.

Задачу о верхней грани $h(f)$ удастся сформулировать следующим образом. В $\boldsymbol{R}^N$ вводится отношение частичной упорядочности $X^* \prec X$; Ω – многомерная область: $\Omega \subset \boldsymbol{R}^N$; в замыкании $\overline{\Omega}$ задана функция h. Для каждой точки $X \in \Omega$ нужно найти $\sup h(X^*)$ по всем $X^* \in \overline{\Omega}$, $X^* \prec X$.

Решение получено в следующей форме. Указано *множество максимумов* $\mathcal{M} \subset \overline{\Omega}$;

© М.Л. Гервер, 1994

для разности $G = \Omega \backslash \mathcal{M}$ построено расслоение G *маркированными полупрямыми:* через каждую точку $X \in G$ проходит ровно одна полупрямая $\mathcal{L}$; на каждой полупрямой $\mathcal{L}$ отмечена начальная точка (*маркер*); все маркеры составляют множество $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$. Полупрямую $\mathcal{L}$ с маркером X_0, содержащую X, обозначим $\mathcal{L}(X_0, X)$. Тогда искомая верхняя грань равна $h(X)$ при $X \in \Omega \cap \mathcal{M}$ и равна $h(X_0)$ при $X \in \mathcal{L}(X_0, X) \cap G$.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Задача о верхней грани $h(f)$. Рассмотрим множество $\mathcal{F}$ положительных неубывающих ступенчатых функций с интегралом 1. Множество $\mathcal{F}$ естественно разбивается на подмножества $\{f\}_n$ функций с n ступеньками. Пусть $f \in \{f\}_n$ принимает значения f_j на отрезках длины h_j:

$$0 < f_1 < \ldots < f_n; \quad h_j > 0, \ 1 \leqslant j \leqslant n; \ f_1h_1 + \ldots + f_nh_n = 1. \tag{1.1}$$

Положим $a_j = f_jh_j$, $s_j = f_j^2$, так что

$$0 < s_1 < \ldots < s_n; \ a_j > 0, \ \ 1 \leqslant j \leqslant n; \ a_1 + \ldots + a_n = 1. \tag{1.2}$$

Набор из $2n$ параметров a_j, s_j, удовлетворяющих соотношениям (1.2), обозначим (a, s), а множество таких наборов назовем $\mathfrak{R}_n$:

$$(a,s) = \{a_1, \ldots ,a_n, \ s_1, \ \ldots ,s_n\} \in \mathfrak{R}_n. \tag{1.3}$$

Функции из $\{f\}_n$ можно характеризовать как параметрами (1.1), так и параметрами (1.2.), т.е. $\{f\}_n$ и $\mathfrak{R}_n$ – одно и то же множество, только заданное в разных координатах.

Сопоставим каждому набору (1.3) рациональную функцию

$$g(z) = g(z, \ a, \ s) = a_1 / (z + s_1) + \ldots + a_n / (z + s_n), \quad z \in [0,1], \tag{1.4}$$

и определим на $\mathcal{F}$ следующее *отношение частичной упорядоченности* (его геофизический смысл раскрывается в п. 1.2, геометрическая интерпретация дана в разд. 8). Пусть

$$f^* \in \{f\}_q \Leftrightarrow (a^*, \ s^*) \in \mathfrak{R}_q \Leftrightarrow g^*(z) = a_1^* / (z + s_1^*) + \ldots + a_q^* / (z + s_q^*). \tag{1.5}$$

Тогда f^* *предшествует* f ($f^* \prec f$), если $g^*(z) \leqslant g(z)$ при $0 \leqslant z \leqslant 1$.

Множество всех функций $f^* \in \mathcal{F}$, предшествующих f, обозначим $\Pi(f)$:

$$\Pi(f) = \left\{ f^* \in \mathcal{F} \middle| f^* \prec f \Leftrightarrow g^*(z) \leqslant g(z), \ z \in [0, \ 1] \right\}. \tag{1.6}$$

Сумму длин ступенек h_j в (1.1) назовем $h(f)$. С учетом (1.2)

$$h = h(f) = h(a, \ s) = a_1 / \sqrt{s_1} + \ldots + a_n / \sqrt{s_n}. \tag{1.7}$$

Аналогично: $h^* = h(f^*) = h(a^*, \ s^*) = a_1^* / \sqrt{s_1^*} + \ldots + a_q^* / \sqrt{s_q^*}$.

При разработке алгоритма быстрого поиска самого широкого волновода [1, 2] возникает *задача отыскания верхней грани*

$$\sup h(f^*), \ \ f^* \in \Pi(f). \tag{1.8}$$

Кратко напомним ее физический смысл.

1.2. Геофизическая интерпретация задачи. Рассмотрим скоростную функцию $u(y)$, $y \geqslant 0$, имеющую ровно один волновод $Y < y < Y + h$ (если волноводов несколько, последующее построение нужно провести в каждом из них). Положим $1/u(Y) = Q$.

Пусть $u(y)$ кусочно-постоянна в волноводе и принимает там n значений u_j на отрезках длины h_j, $h_1 + \ldots + h_n = h$. Занумеровав значения u_j в порядке убывания ($1/Q >$

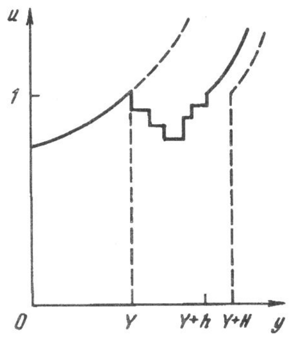


Рис. 1

$> u_1 > \ldots > u_n > 0$) и положив $f_j = \sqrt{u_j^{-2} - Q^2}$, сопоставим $u(y)$, $y \in (Y, Y + h)$, положительную неубывающую ступенчатую функцию f со значениями f_j на ступеньках длины h_j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Положим $f_1h_1 + \ldots + f_nh_n = \sigma$.

Нормировка $u(y)$. Выберем масштабы на осях u, y так, чтобы

$$Q = \sigma = 1. \tag{1.9}$$

Множество так нормированных кусочно-постоянных функций, задающих скорость в волноводе, обозначим $\{u\}_n$; объединение $\{u\}_1 \cup \{u\}_2 \cup \ldots$ назовем $\mathcal{U}$. Нормировка (1.9) приводит к отображению

$$\mathcal{U} \to \mathcal{F}: \; u^* \in \{u\}_q \to f^* \in \{f\}_q, \; u \in \{u\}_n \to f \in \{f\}_n.$$

По определению $u^* \prec u$, если $f^* \prec f$. Таким образом, на $\mathcal{U}$ возникает отношение предшествования

$$u^* \prec u, \text{ где } u^* = u^*(y), \; Y < y < Y + h^*; \; u = u(y), \; Y < y < Y + h. \tag{1.10}$$

Согласно [1, 2] у него следующий геофизический смысл: *пусть скоростная функция $u(y)$, $y \geqslant 0$, с волноводом* $(Y, Y + h)$ *имеет годограф* Г, *тогда любую функцию* $u^*(y)$, *удовлетворяющую условию* (1.10), *можно однозначно продолжить до скоростной функции на всей полуоси $y \geqslant 0$ с тем же самым годографом* Г (нужно взять $u^*(y)$ равной $u(y)$ при $y < Y$ и доопределить ее при $y > Y + h^*$ по формуле Гервера–Маркушевича).

Подчеркнем: если условие (1.10) не выполнено, то $u^*(Y)$, вообще говоря, *нельзя доопределить* с интервала $(Y, Y + h^*)$ на всю полуось до скоростной функции, имеющей тот же годограф Г, что и $u(y)$.

Если $u(y)$ кусочно-постоянна не только в волноводе, но и при $y > Y + h$, то (1.10) является *необходимым и достаточным* условием продолжимости $u^*(y)$ на всю полуось $y \geqslant 0$ до скоростной функции с годографом Г.

Схематически изобразим плоское множество $\mathcal{G}$, образуемое графиками всех скоростных функций, которые имеют такой же годограф Г, как и функция $u(y)$. На рис. 1 границы $\mathcal{G}$ изображены пунктиром, а график $u(y)$ – сплошной линией.

Левая граница устойчиво определяется известными методами. Интерес представляет определение правой границы, в частности, – числа H – максимального расстояния между границами вдоль прямых $u = \text{const}$.

В общем случае задача отыскания верхней грани (1.8) есть *задача оценки H снизу*; если $u(y)$ кусочно-потоянна при $y > Y$, верхняя грань (1.8) *в точности равна H*.

О других приложениях будет рассказано в [4] – после того, как новые теоремы о $\sup h(f^*)$, $f^* \in \Pi(f)$ будут сформулированы, доказаны и обобщены.

Перейдем к этим теоремам.

2. ТЕОРЕМА О ЧИСЛЕ СТУПЕНЕК

Положим

$$T_q(f) = \Pi(f) \cap \{f\}_q = \left\{ f^* \in \{f\}_q \middle| f^* \prec f \right\},$$

$$\Pi_n(f) = T_1(f) \cup T_2(f) \cup \ \ldots \ \cup T_n(f), \tag{2.1}$$

так что (2.1) – подмножество (1.6), состоящее из функций $f^* \prec f$, имеющих не более n ступенек.

В [2] доказана

Т е о р е м а 1. *Для любой функции $f \in \{f\}_n$ существует такая функция $f^0 \in \Pi_n(f)$, что $h(f^0) \geqslant h(f^*)$ для всех $f^* \in \Pi_n(f)$, т.е.*

$$h^0 = h(f^0) = \max h(f^*), \quad f^* \in \Pi_n(f). \tag{2.2}$$

В этой статье и в [4] теорема 1 будет уточнена и обобщена в нескольких направлениях. Одно из таких обобщений – следующая теорема о числе ступенек.

Т е о р е м а 2 . *Для f^0 в* (2.2) *неравенство $h^0 \geqslant h(h^*)$ выполняется не только для* $f^* \in \Pi_n(f)$, но и для всех $f^* \in \Pi(f)$, *т.е. верхняя грань* (1.8) *достигается для любой $f \in \mathcal{F}$; при $f \in \{f\}_n$ она равна максимуму* (2.2):

$$h^0 = h(f^0) = \sup h(f^*), \quad f^* \in \Pi(f). \tag{2.3}$$

Более того, если $f \in \{f\}_n$ и $f^* \in T_q(f)$, где $q > n$, то выполняется строгое неравенство

$$h^0 > h(f^*). \tag{2.4}$$

Другими словами, *для любой $f \in \{f\}_n$ функция f^0, на которой верхняя грань* (2.3) *достигается, имеет не более n ступенек* ⟨1⟩.

С л е д с т в и е . Задачу отыскания верхней грани (1.8) для $f \in \{f\}_n$ можно ставить как задачу поиска максимума (2.2): *f^0 следует искать не по всему* $\Pi(f)$, *а только среди функций $f^* \in \Pi_n(f)$.*

3. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

При $n = 1$ задача поиска f^0 тривиальна:

$$\text{если } f \in \{f\}_1, \text{ то } f^0 = f^{\langle 2 \rangle}. \tag{3.1}$$

При $n = 2$ задача относительно проста и полностью решена в [2]: доказано, что для любой $f \in \{f\}_2$ функция f^0 определяется по f *однозначно*, и указан быстрый алгоритм ее построения. В частности, доказано, что f^0 обязательно имеет *две ступеньки: $f^0 \in \{f\}_2$*.

При $n > 2$ ситуация сложнее – для части $f \in \{f\}_n$ функция f^0 имеет *n ступенек:*

$$f^0 \in T_n(f) \subset \{f\}_n, \tag{3.2}$$

для части $f \in \{f\}_n$ она имеет *менее n ступенек:*

$$f^0 \in T_m(f) \subset \{f\}_m, \quad m < n \ ^{\langle 3 \rangle}. \tag{3.3}$$

В обоих случаях верна, однако,

Т е о р е м а единственности. *функция f^0 определяется по f однозначно.*

Объединяя ее с теоремой 2, приходим к одному из главных результатов статьи:

Т е о р е м а 3. *Для любой $f \in \mathcal{F}$ существет и единственна функция f^0, на которой достигается верхняя грань* (2.3) *функционала $h(f^*)$, $f^* \in \Pi(f)$; при этом f^0 имеет не больше ступенек, чем f.*

В разд. 4 анализируются некоторые следствия теоремы единственности и приводится план ее доказательства.

4. МНОЖЕСТВО МАКСИМУМОВ. ЗОНЫ ВЛИЯНИЯ. ПЛАН ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ

Если теорема единственности верна, в $\mathcal{F}$ можно выделить *множество максимумов* $\mathcal{F}^0$ и рассмотреть *отображение*

$$W: \mathcal{F} \to \mathcal{F}^0, \tag{4.1}$$

сопоставляющее каждой функции $f \in \mathcal{F}$ функцию $f^0 \in \mathcal{F}^0$, на которой достигается максимум функционала $h(f^*)$, $f^* \in \Pi(f)$.

В соответствии с (4.1) для каждой функции $f^0 \in \mathcal{F}^0$ можно определить ее *зону влияния* – множество

$$I(f^0) = \left\{ f \in \mathcal{F} \middle| W(f) = f^0 \right\}. \tag{4.2}$$

Вследствие теоремы единственности множества (4.2) попарно не пересекаются:

$$I(f_1^0) \cap I(f_2^0) = 0 \ \text{ для } \ f_1^0, \ f_2^0 \in \mathcal{F}^0, \ \text{ если } \ f_1^0 \neq f_2^0. \tag{4.3}$$

В разд. 5 будет дано не опирающееся на (4.1), (4.2) коструктивное описание множеств $\mathcal{F}^0$ и $I(f^0)$, обладающих свойством (4.3) и удовлетворяющих следующей теореме о строгом максимуме.

Т е о р е м а 4. *Если $f \in I(f^0)$, то*

$$h^0 = h(f^0) > h(f^*) \ \ \textit{для любой функции } f^* \in \Pi(f), \ \ f^* \neq f^0. \tag{4.4}$$

После этого для доказательства теоремы единственности останется проверить, что *каждая функция $f \in \mathcal{F}$ входит в зону влияния хоть одной* (и значит, вследствие (4.3), ровно одной) *функции $f^0 \in \mathcal{F}^0$*:

$$f \in I(f^0). \tag{4.5}$$

5. ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО 1-АППРОКСИМАЦИЙ. КОНСТРУКТИВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗОН ВЛИЯНИЯ. ТЕОРЕМА О СТРОГОМ МАКСИМУМЕ

Доказательство (4.4) основано на следующем *экстремальном свойстве* рациональных 1-аппроксимаций $r(s)$ функции $1/\sqrt{s}$. Согласно [3] *по каждому множеству* $\{s_1,\ldots,s_m\}$, $0 < s_1 < \ldots < s_m$ (а следовательно, по каждому набору $(a, s) = \{a_1, \ldots, a_m, s_1, \ldots s_m\} \in \mathfrak{N}_m$ и, тем самым, по каждой функции $f \in \{f\}_m$) *однозначно* *определяются 2m положительных чисел* $d_0, d_1, d_2, \dots d_m, w_2, \dots, w_m$,

$$0 = w_1 < w_2 < \dots < w_m, \tag{5.1}$$

для которых функция

$$r(s) = d_0 + d_1 / s + \sum_{k=2}^{m} d_k / (s + w_k) \tag{5.2}$$

совпадает с $1/\sqrt{s}$ *при* $s = s_1, \dots, s_m$ *и строго больше* $1/\sqrt{s}$ *при любом* $s > 0$, $s \neq s_1, \dots, s_m$ ⟨4⟩.

Введем *отображение* χ, сопоставляющее функции $f \in \{f\}_m$ множество (5.1), $m \geqslant 1$ произвольно. Таким образом, условие $w_k \in \chi(f)$ означает, что $-w_k$ является полюсом соответствующей f функции $r(s)$.

Определение 1. Отнесем функцию $f^0 \in \mathcal{F}$ к множеству $\mathcal{F}^0$, если $\chi(f^0) \subset \subset [0,1]$ в частности, $f^0 \in \mathcal{F}^0_m = \mathcal{F}^0 \cap \{f\}_m$, если

$$\chi(f^0) = \left\{w_1^0,\ w_2^0,\ \dots,\ w_m^0\right\},\quad 0 = w_1^0 < w_2^0 < \ \dots\ < w_m^0 \leqslant 1 \ ⟨5⟩.$$

Определение 2. Для $f^0 \in \mathcal{F}^0$ определим на $\mathcal{F}$ наряду с отношением предшествования $f^* \prec f$ (см. (1.6)) еще одно отношение частичной упорядоченности $f^0 \prec\!\prec f$. Пусть $f^0 \in \mathcal{F}^0$, $f \in \mathcal{F}$; $f^0 \Leftrightarrow g^0(z), f \Leftrightarrow g(z)$ (см. (1.5), (1.4)). Тогда $f^0 \prec\!\prec f$, если

1) $f^0 \prec f \Leftrightarrow g^0(z) \leqslant g(z),\quad z \in [0,1]$,

2) $g^0(w_k^0) = g(w_k^0)$ при любом $w_k^0 \in \chi(f^0)$. (5.3)

Определение 3. Зону влияния функции $f^0 \in \mathcal{F}^0$ определим (не опираясь на (4.1), (4.2)) как множество всех $f \in \mathcal{F}$, для которых $f^0 \prec\!\prec f$:

$$I(f^0) = \{f \in \mathcal{F} \,|\, f^0 \prec\!\prec f\}. \tag{5.4}$$

Докажем, что определения 1–3 приводят к (4.4) и (4.3).

«Пусть $f^0 \in \mathcal{F}^0_m = \mathcal{F}^0 \cap \{f\}_m$, $f \in I_n(f^0) = I(f^0) \cap \{f\}_n$, $f^* \in T_q(f) \subset \Pi(f)$. Рассмотрим наборы $(a^0, s^0) \in \mathfrak{N}_m$, $(a, s) \in \mathfrak{N}_n$ и $(a^*, s^*) \in \mathfrak{N}_q$, соответствующие f^0, f и f^*, и положим (см. (1.4), (1.5)) $g^0(z) = g(z, a^0, s^0)$, $g(z) = g(z, a, s)$, $g^*(z) = g(z, a^*, s^*)$; функцию вида (5.2), соответствующую f^0, обозначим $r^0(s)$:

$$r^0(s) = d_0^0 + \sum_{k=1}^{m} d_k^0 / (s + w_k^0) = 1/\sqrt{s} \ \text{ при } s = s_1^0, \ \dots, s_m^0,$$

$$r^0(s) > 1/\sqrt{s} \ \text{ при } \ s > 0,\ s \neq s_1^0,\ \dots, s_m^0. \tag{5.5}$$

Тогда в соответствии с (1.7)

$$h^0 = \sum_{j=1}^{m} a_j^0 / \sqrt{s_j^0} = \sum_{i=1}^{m} a_j^0 r^0(s_j^0) = \sum_{i=1}^{m} a_j^0 \left(d_0^0 + \sum_{k=1}^{m} d_k^0 / (s_j^0 + w_k^0) \right).$$

Меняя порядок суммирования и учитывая, что ввиду (1.2), (1.5) и (5.3)

$$\sum_{j=1}^{m} a_j^0 = 1,\ \ \sum_{i=1}^{m} a_j^0 / (s_j^0 + w_k^0) = g^0(w_k^0) = g(w_k^0),\ \ 1 \leqslant k \leqslant m,$$

получаем

$$h^0 = d_0^0 + \sum_{j=1}^{m} d_k^0 \left(\sum_{j=1}^{m} a_j^0 / (s_j^0 + w_k^0) \right) = d_0^0 + \sum_{k=1}^{m} d_k^0 g^0(w_k^0) = d_0^0 + \sum_{k=1}^{m} d_k^0 g(w_k^0). \tag{5.6}$$

Для $h^* = h(f^*)$, учитывая (5.5) и (1.6), имеем

$$h^* = \sum_{j=1}^{q} a_j^* / \sqrt{s_j^*} \leq \sum_{j=1}^{q} a_j^* r^0(s_j^*) = \sum_{j=1}^{q} a_j^* \left(d_0^0 + \sum_{k=1}^{m} d_k^0 / (s_j^* + w_k^0) \right) =$$

$$= d_0^0 + \sum_{k=1}^{m} d_k^0 \left(\sum_{j=1}^{q} a_j^* / (s_j^* + w_k^0) \right) = d_0^0 + \sum_{k=1}^{m} d_k^0 g^*(w_k^0) \leq d_0^0 + \sum_{k=1}^{m} d_k^0 g(w_k^0),$$

так что согласно (5.6) $h^* \leq h^0$. Докажем, что для $f^* \neq f^0$ неравенство – строгое:

$$h^* < h^0. \tag{5.7}$$

Это могло бы быть не так в единственном случае: если

$$\sum_{j=1}^{q} a_j^* / \sqrt{s_j^*} = \sum_{j=1}^{q} a_j^* r^0(s_j^*) \text{ и } \sum_{k=1}^{m} d_k^0 g^*(w_k^0) = \sum_{k=1}^{m} d_k^0 g(w_k^0),$$

т.е., ввиду (5.5), (1.6) и (5.3), если

$$\left\{ s_1^*, \ \ldots, \ s_q^* \right\} \subseteq \left\{ s_1^0, \ \ldots, \ s_m^0 \right\} \tag{5.8}$$

и

$$g^*(w_k^0) = g^0(w_k^0) \text{ при всех } k = 1, \ \ldots, m. \tag{5.9}$$

Положив

$$c^*(z) = \prod_{j=1}^{q} (z + s_j^*), \quad c^0(z) = \prod_{j=1}^{m} (z + s_j^0),$$

запишем функции $g^*(z)$ и $g^0(z)$ в виде отношений полиномов:

$$g^*(z) = \sum_{j=1}^{q} a_j^* / (z + s_j^*) = b^*(z) / c^*(z),$$

$$g^0(z) = \sum_{j=1}^{q} a_j^0 / (z + s_j^0) = b^0(z) / c^0(z), \tag{5.10}$$

степени $b^*(z)$ и $b^0(z)$ равны $q - 1$ и $m - 1$ соответственно.

Вследствие (5.8) $q \leq m$ и $c^0(z)/c^*(z) = a(z)$ – полином степени $m - q$ (в частности, $a(z) \equiv 1$ при $m = q$). Ввиду (5.9) и (5.10), уравнению

$$b^0(z) - a(z)b^*(z) = 0 \tag{5.11}$$

удовлетворяют m корней w_k^0, $1 \leq k \leq m$, т.е. (5.11) – тождество (поскольку степень полинома в левой части не превосходит $m - 1$). Отсюда $g^*(z) \equiv g^0(z)$, т.е. $q = m$ и

$$a_j^* = a_j^0, \ s_j^* = s_j^0 \text{ при всех } j = 1, \ \ldots, m. \tag{5.12}$$

Равенства (5.12) означают, что (вопреки предположению) $f^* = f^0$. Неравенство (5.7) доказано.»

Вместе с (5.7), очевидно, доказана и теорема 4 о строгом максимуме, а значит, установлено и свойство (4.3). «Предположив, что оно не выполняется и существует функция f, для которой $f_1^0 \prec\prec f$, $f_2^0 \prec\prec f$, приходим к противоречащим друг другу строгим неравенствам: $h(f_1^0) > h(f_2^0)$, $h(f_2^0) > h(f_1^0)$.»

6. ТЕОРЕМЫ О ЗОНАХ ВЛИЯНИЯ

Начнем изучение зон влияния (5.4) с важного замечания к определению 2: вследствие (5.3) не только сами функции $g^0(z)$ и $g(z)$ равны при $z = w_k^0 \in \chi(f^0) \subset [0,1]$, но (поскольку $g^0(z) \leqslant g(z)$ на [0, 1]) и *их первые производные по z совпадают в тех точках* $w_k^0 \in \chi(f^0)$, *которые лежат внутри* (0, 1). В частности, для $f^0 \in \mathcal{F}_m^0 = \mathcal{F}^0 \cap \{f\}_m$

$$g^0(z) = g(z) \text{ при } z = w_k^0 \in \chi(f^0),\ 1 \leqslant k \leqslant m,$$

$$dg^0(z)/dz = g'(z) \text{ при } z = w_k^0,\ 1 < k < m; \tag{6.1}$$

кроме того,

$$dg^0(w_m^0)/dz = g'(w_m^0), \text{ если } w_m^0 < 1. \tag{6.2}$$

Ввиду (6.1), (6.2) верны следующие теоремы о зонах влияния $I(f^0)$.

Теорема 5. *Если $f \in \{f\}_n$ входит в зону влияния $I(f^0)$ функции $f^0 \in \mathcal{F}_m^0 = \mathcal{F}^0 \cap \{f\}_m$, то $m \leqslant n$.*

«Положив (сравним с (5.10))

$$c^0(z) = \prod_{j=1}^{m}(z + s_j^0), \quad c(z) = \prod_{j=1}^{n}(z + s_j),$$

запишем $g^0(z)$ и $g(z)$ в виде отношений полиномов:

$$g^0(z) = \sum_{j=1}^{m} a_j^0/(z + s_j^0) = b^0(z)/c^0(z),$$

$$g(z) = \sum_{j=1}^{m} a_j/(z + s_j) = b(z)/c(z), \tag{6.3}$$

степени $b^0(z)$ и $b(z)$ равны $m - 1$ и $n - 1$ соответственно. Степень полинома

$$b(z)c^0(z) - b^0(z)c(z) \tag{6.4}$$

не выше $m + n - 2$, а сумма кратностей его корней (ввиду (6.1), (6.3)) не меньше, чем $2m - 2$. Отсюда $n \geqslant m$.»

Теорема 6. *Если $f^0 \in \mathcal{F}_m^0 = \mathcal{F}^0 \cap \{f\}_m$ и $\chi(f^0) \subset [0, 1])$, т.е. $w_m^0 < 1$, то $I_m(f^0) = I(f^0) \cap \{f\}_m$ не содержит ни одной функции, кроме f^0:*

$$I_m(f^0) \ni f \Rightarrow f \equiv f^0. \tag{6.5}$$

«Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 5, приходим к выводу, что степень полинома (6.4) не выше $2m - 2$, а сумма кратностей его корней (ввиду (6.2), (6.3)) не меньше $2m - 1$, т.е. полином (6.4) тождественно равен нулю. Отсюда $g(z) \equiv g^0(z)$, что доказывает (6.5).»

Свойство (6.5) допускает обобщение: в условиях теоремы 6

$$I(f^0) \ni f \Rightarrow f = f^0. \tag{6.6}$$

С учетом теорем 5,6 для доказательства (6.6) достаточно проверить, что при $f^0 \in \mathcal{F}_m^0$, $w_m^0 < 1$ и $n > m$ множество $I_n(f^0) = I(f^0) \cap \{f\}_n$ пусто:

$$f^0 \in \mathcal{F}_m^0,\ w_m^0 < 1,\ n > m \ \Rightarrow\ I_n(f^0) = 0. \tag{6.7}$$

В разд. 9 будет доказано, что (ввиду непрерывности отображения χ) свойство (6.7) следует из (4.4). Тем самым, будет получена.

Теорема 7. *Если $\chi(f^0) \in [0, 1)$, то зона влияния $I(f^0)$ является одноточечной – не содержит ни одной функции, кроме f^0.*

Остальные $I(f^0)$ будем называть *основными* в соответствии со следующим определением, дополняющим определения 1–3 из разд. 5.

Определение 4. Разобьем $\mathcal{F}_n^0 = \mathcal{F}^0 \cap \{f\}_n$ (при любом $n \geqslant 1$) на два подмножества:

$$\mathcal{F}_n^0 = \mathcal{F}_n^1 \cup \mathcal{F}_n^2,\quad \mathcal{F}_n^1 \cap \mathcal{F}_n^2 = 0, \tag{6.8}$$

выберем их так, чтобы для самой правой точки w_n^0 множества $\chi(f^0)$, $f^0 \in \mathcal{F}_n^0$ выполнялась альтернатива

$$w_n^0 < 1 \ \text{ при } f^0 \in \mathcal{F}_n^1;\ \ w_n^0 = 1 \ \text{ при } f^0 \in \mathcal{F}_n^2; \tag{6.9}$$

Зона влияния $I(f^0)$ называется *основной*, если $f^0 \in \mathcal{F}_m^0$ (при каком-нибудь $m \geqslant 1$).

Доказанную выше теорему 6 можно, используя (6.9), сформулировать следующим образом:

$$I_n(f^0) \ni f,\ \ f^0 \in \mathcal{F}_n^1 \Rightarrow f \equiv f^0. \tag{6.10}$$

Определение 5. Объединение $I_n(f^0) = I(f^0) \cap \{f\}_n$ по всем $f^0 \in \mathcal{F}^0$ обозначим D_n. Положим

$$\mathcal{M}_n^k = \mathcal{F}_1^k \cup \ldots \cup \mathcal{F}_n^k,\ \ k = 0,\ 1,\ 2. \tag{6.11}$$

По теореме 5

$$D_n = \bigcup I_n(f^0),\ \ f^0 \in \mathcal{M}_n^0 = \mathcal{M}_n^1 \cup \mathcal{M}_n^2. \tag{6.12}$$

Ввиду теоремы 7 можно было бы дать равносильное (6.12) определение D_n, не симметричное по отношению к $\mathcal{M}_n^1$ и $\mathcal{M}_n^2$:

$$D_n = \bigcup I_n(f^0),\ \ f^0 \in \mathcal{F}_n^1 \cup \mathcal{M}_n^2. \tag{6.13}$$

Согласно (6.10) объединение $I_n(f^0)$ по всем $f^0 \in \mathcal{F}_n^1$ совпадает с $\mathcal{F}_n^1$. Разности $D_n \backslash \mathcal{F}_n^0$, $\{f\}_n \backslash \mathcal{F}_n^0$ обозначим (соответственно) B_n и G_n:

$$B_n = D_n \setminus \mathcal{F}_n^0,\ \ G_n = \{f\}_n \setminus \mathcal{F}_n^0; \tag{6.14}$$

эквивалентные определения: B_n – объединение $I_n(f^0) \backslash f^0$ по всем $f^0 \in \mathcal{M}_n^0$ (с учетом (6.13) в B_n входят функции только из *основных* зон влияния: $f^0 \in \mathcal{M}_n^2$); $f \in G_n$, если самая правая точка $w_n = w_n(f)$ множества $\chi(f)$ *больше* 1, т.е. $G_n = \{f \in \{f\}_n \,|\, w_n(f) > 1\}$.

В разд. 9 будет доказана

Теорема о совпадении. *При любом* $n \geqslant 1$

$$D_n \equiv \{f\}_n, \ B_n \equiv G_n. \tag{6.15}$$

Тождества (6.15) эквивалентны между собой ввиду (6.14).

Сформулированная в разд. 3 теорема 3 является следствием (6.15). «С учетом определений 4,5 совпадение D_n и $\{f\}_n$ означает (сравним с теоремой 5), что любая функция $f \in \{f\}_n$ входит в зону влияния одной из функций $f^0 \in \mathcal{M}_n^0$. Поэтому (ввиду (4.5) и теоремы 4) тождество (6.15) влечет за собой и теорему единственности, и теорему 2 о числе ступенек, а значит, и теорему 3.»

Чтобы доказать все анонсированные теоремы, перейдем к новым координатам, в которых рассматриваемые вопросы допускают простое геометрическое истолкование. План действий:

в разд. 7, следуя [1], опишем биективное соответствие $\{f\}_n \Leftrightarrow \Omega_n$ между $\{f\}_n$ и областью $\Omega_n \subset \boldsymbol{R}^{2n-1}$;

В разд. 8, следуя [1, 2], напомним геометрический смысл отношения предшествования $f^* \prec f$, а потом, следуя [2, 3], уточним теорему 1.

Это позволит, трактуя B_n и G_n как подмножества Ω_n, доказать в разд. 9 тождество (6.15) и теорему 7. Затем в разд. 10 будет рассказано о строении и расположении зон влияния. Наконец, в разд. 11 будет сформулирована и доказана описанная во введении теорема о расслоении.

Переходя к выполнению намеченного плана, прежде всего напомним, как в [1] устанавливается биективное соответствие между ступенчатыми функциями и устойчивыми многочленами и каким образом, вследствие этого, множество $\{f\}_n$ вкладывается в $\boldsymbol{R}^{2n-1}$.

7. СТУПЕНЧАТЫЕ ФУНКЦИИ И УСТОЙЧИВЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

При любом n сопоставим каждой точке

$$X = (x_0, \ x_1, \ \dots, \ x_{2n-2}) \in \boldsymbol{R}^{2n-1} \tag{7.1}$$

многочлен

$$\mathcal{P}(r) = \mathcal{P}(X, \ r) = r^{2n} + r^{2n-1} + x_0 r^{2n-2} + x_1 r^{2n-3} + \ \dots \ + x_{2n-2} \tag{7.2}$$

и рациональную функцию

$$g(z) = g(X, z) = b(z)/c(z), \tag{7.3}$$

где

$$b(z) = b(X, \ z) = z^{n-1} + x_1 z^{n-2} + x_3 z^{n-3} + \ \dots \ + x_{2n-3},$$

$$c(z) = c(X, \ z) = z^n + x_0 z^{n-1} + x_2 z^{n-2} + \ \dots \ + x_{2n-2}. \tag{7.4}$$

По определению $X \in \Omega_n$, если многочлен (7.2) *устойчив* (т.е. все корни $\mathcal{P}(X, r)$ лежат в полуплоскости $Re\ r < 0$); $(2n-1)$-мерная область Ω_n называется *областью устойчивости.*

По теореме Эрмита–Билера об устойчивых многочленах $X \in \Omega_n$ *тогда и только тогда, когда нули* $(-z_1, \dots, -z_{n-1})$ *и полюса* $(-s_1, \dots, -s_n)$ *функции* $g(X, z)$ *отрицательны и чередуются:*

$$0 < s_1 < z_1 < \ \dots \ < s_{n-1} < z_{n-1} < s_n. \tag{7.5}$$

Легко проверить (см. [1. С. 185]), что нули и полюса функции $g(z) = g(z, a, s)$ из (1.4) обладают этим свойством: условия (7.5) и (1.2) *эквивалентны*. Это позволяет, следуя [1], установить биективное соответствие

$$f \in \{f\}_n \Leftrightarrow (a,\ s) \in \mathfrak{R}_n \Leftrightarrow X \in \Omega_n, \tag{7.6}$$

в котором функции f (набору (a, s)) отвечает такая точка X, что функции $g(z)$ в (1.4) и (7.3) совпадают:

$$g(z, a, s) = g(X, z). \tag{7.7}$$

З а м е ч а н и е . Согласно (7.6), (7.7) формулу (6.3) в доказательстве теоремы 5 можно трактовать как отображение

$$\{f\}_m \in f^0 \to X^0 \in \Omega_m \subset \boldsymbol{R}^{2m-1},\ \{f\}_n \in f \to X \in \Omega_n \subset \boldsymbol{R}^{2n-1}. \tag{7.8}$$

Ввиду (7.8) множества $\{f\}_m$ и $\{f\}_n$ оказываются вложенными в $\boldsymbol{R}^{2m-1}$ и $\boldsymbol{R}^{2n-1}$; трактуя $\boldsymbol{R}^{2m-1}$ при $m < n$ как подпространство $\boldsymbol{R}^{2n-1}$ получаем, что все $\{f\}_m$, $m \leqslant n$, вложены в $\boldsymbol{R}^{2n-1}$.

Область Ω_n (биективный образ $\{f\}_n$ при отображении (7.8)) располагается в *первом ортанте* (все $x_j > 0$, $0 \leqslant j \leqslant 2n{-}2$) и описывается полиномиальными неравенствами

$$H_j(X) > 0,\ \ 2 \leqslant j \leqslant 2n, \tag{7.9}$$

где $H_j = H_j(X)$ – главные миноры *матрицы Гурвица* $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_n(X)$. Напомним, что $\mathcal{H}_n$ – квадратная матрица порядка $2n$, столбцы которой составлены из коэффициентов (7.4) и из нулей, как в следующих примерах:

$$\mathcal{H}_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_0 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 & x_1 & x_0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 \end{Vmatrix}, \quad \mathcal{H}_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_0 & 1 & 1 \\ 0 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 \end{Vmatrix};$$

миноры $H_j(X)$ называются *определителями Гурвица* многочлена (7.2), $1 \leqslant j \leqslant 2n$; по критерию Рауса–Гурвица *их положительность необходима и достаточна для того, чтобы* $X \in \Omega_n$; это дает описание Ω_n неравенствами (7.9).

П р и м е р . При $n = 2$ область Ω_2 (биективный образ $\{f\}_2$) лежит в первом октанте R^3 и описывается неравенствами

$$x_0 - x_1 > 0,\ \ (x_0 - x_1)x_1 > x_2 > 0;$$

область Ω_1 (биективный образ $\{f\}_1$) – полуось $x_0 > 0$.

Условия (7.5) и (7.9) позволяют понять, как устроена граница $\partial\Omega_n$ области устойчивости Ω_n. При выходе точки $X \in \Omega_n$ на границу $\partial\Omega_n$ в (7.5) либо s_1 обращается в 0 (при этом и $x_{2n-2} = s_1 \ldots s_n$ обращается в 0), либо соседние нуль и полюс $g(X, z)$ сливаются. Поэтому граница $\partial\Omega_n$ естественно разбивается на две части:

1) кусок гиперплоскости $x_{2n-2} = 0$,

2) гиперповерхность Γ_n – границу Ω_n в полупространстве $x_{2n-2} > 0$, на которой равен нулю результант полиномов (7.4) (совпадающий по абсолютной величине с определителем Гурвица H_{2n-1}).

Так как $H_{2n}(x) = x_{2n-2}H_{2n-1}(X)$, то $H_{2n} = 0$ на всей границе $\partial\Omega_n$.

Обозначим F_k замыкание Ω_k в полупостранстве $x_{2k-2} > 0$:

$F_k = \Omega_k \cup \Gamma_k \subset \boldsymbol{R}^{2k-1}, \; k \geqslant 1.$

Следуя [1], рассмотрим (при каждом $k \geqslant 1$) отображение Γ_{k+1} на F_k:

$$\Gamma_{k+1} \to F_k, \tag{7.10}$$

в (7.10) прообразом точки $Y = (y_0, \ldots, y_{2k-2}) \in F_k$ является принадлежащая Γ_{k+1} полупрямая $\overline{Y} = \overline{Y}(t), \; t > 0,$ уравнение которой строится в соответствии с равенством дробей

$$\frac{z^k + \overline{y}_1 z^{k-1} + \ldots + \overline{y}_{2k-1}}{z^{k+1} + \overline{y}_0 z^k + \ldots + \overline{y}_{2k-2} z + \overline{y}_{2k}} = \frac{z^{k-1} + y_1 z^{k-2} + \ldots + y_{2k-3}}{z^k + y_0 z^{k-1} + \ldots + y_{2k-2}} \; \frac{z+t}{z+t}, \tag{7.11}$$

так что

$$\begin{aligned} &\overline{Y} = \overline{Y}(t) = (\overline{y}_0(t), \; \ldots, \; \overline{y}_{2k-2}(t), \; \overline{y}_{2k-1}(t), \; \overline{y}_{2k}(t)) = \\ &= (y_0, \; \ldots, \; y_{2k-2}, 0, 0) + t(1, 1, y_0, \; \ldots, \; y_{2k-2}). \end{aligned} \tag{7.12}$$

Множество точек $\overline{Y}(t)$ в (7.12) при $t = 0$ ("стык" Γ_{k+1} и гиперплоскости $x_{2k} = 0$) естественно отождествить с F_k: вершине луча (7.12) $(y_0, \ldots, y_{2k-2}, 0, 0)$ соответствует точка

$$(y_0, \ldots, y_{2k-2}) \in F_k. \tag{7.13}$$

Соглашение. Ввиду (7.7) и (7.11) условимся говорить, что *вся полупрямая* (7.12) *изображает одну ступенчатую функцию* $f \in \{f\}_1 \cup \ldots \cup \{f\}_k$ – *ту же, что изображается точкой* (7.13).

Пример. При $n = 2$ граница Γ_2 – часть гиперболического параболоида $x_2 = (x_0 - x_1)x_1$ – линейчатая поверхность, составленная из лучей

$$(y_0, 0, 0) + t(1, 1, y_0), \; t > 0; \tag{7.14}$$

весь луч (7.14) изображает ту же ступенчатую функцию $f \in \{f\}_1$, что и его вершина $(y_0, 0, 0)$, отождествленная с $y_0 \in \Omega_1 = F_1$.

Принятое соглашение дает (по индукции) *стратификацию* Γ_n:

$$\Gamma_n = \bigcup_{1 \leqslant m < n} \Gamma_{nm}, \tag{7.15}$$

точки страта Γ_{nm} в (7.15) изображают ступенчатые функции $f \in \{f\}_m$, так что возникает отображение

$$\Gamma_{nm} \to \{f\}_m. \tag{7.16}$$

Пояснение. Как правило, при подходе точки $X \in \Omega_n$ к границе Γ_n в (7.5) сливаются *один нуль и один полюс* $g(X, z)$; этот (*общий*) случай соответствует подходу X к страту $\Gamma_{n,\, n-1}$. Иногда, однако, происходит одновременное слияние p пар нулей и полюсов $g(X, z)$; этот (*особый*) случай соответствует подходу X к страту $\Gamma_{n,\, n-p}$, $1 < p < n$.

По индукции легко проверяются следующие утверждения: 1) размерность $\dim \Gamma_{nm}$ страта Γ_{nm} равна $n + m - 1$; 2) при отображении (7.16) каждая функция $f_0 \in \{f\}_m$ имеет прообраз размерности $n-m$; в каждой точке Y этого прообраза вследствие (7.11) выполняется тождество

$$g(Y,z)=g(Y_0,z), \text{ где } \quad Y_0 \in \Omega_m, \; Y_0 \Leftrightarrow f_0 \in \{f\}_m. \tag{7.17}$$

П р и м е р. Граница Γ_4 включает шестимерный страт Γ_{43}, составленный из полупрямых – одномерных прообразов $f \in \{f\}_3$, пятимерный страт Γ_{42}, составленный из двумерных прообразов $f \in \{f\}_2$, и четырехмерный страт Γ_{41}, составленный из трехмерных пообразов $f \in \{f\}_1$.

8. ГЕОМЕТРИЯ ОТНОШЕНИЯ ПРЕДШЕСТВОВАНИЯ

Матрица $M_n(X)$ и многочлен $P(X, X^*, z)$. Так же, как в [1, 2], сопоставим каждой точке $X \in \boldsymbol{R}^{2n-1}$ матрицу $M_n = M_n(X)$ – квадратную матрицу порядка $2n–1$, которая получается из матрицы Гурвица $\mathcal{H}_n(X)$ отбрасыванием последней строки и последнего столбца и умножением столбцов с четными номерами на –1; каждой паре точек $X, X^* \in \boldsymbol{R}^{2n-1}$ сопоставим многочлен

$$P(X,X^*,z)=b(X,\ z)c(X^*,z)-b(X^*,z)c(X,z), \tag{8.1}$$

так что, учитывая (7.3), (7.4),

$$g(X,z)-g(X^*,x)=P(X,X^*,z)/[c(X,z)c(X^*,z)], \tag{8.2}$$

Так как старшие коэффициенты в (7.4) равны 1, то степень $P(X, X^*, z)$ не выше $2n–2$:

$$P(X,X^*,z)=P_0z^{2n-2}+\ \dots\ +P_{2n-3}z+P_{2n-2}. \tag{8.3}$$

В [1] показано, что вектор $P = (P_0, \dots, P_{2n-2})$, составленный из коэффициентов (8.3), получается применением $M_n(X)$ к вектору $X^* – X$:

$$P = M_n(X^* - X). \tag{8.4}$$

Например, при $n = 2$

$$\begin{Vmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ x_1 & -x_0 & 1 \\ 0 & -x_2 & x_1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_0^* - x_0 \\ x_1^* - x_1 \\ x_2^* - x_2 \end{Vmatrix}.$$

Отношение $X^* \prec X$ и конусы $K(X)$. Используя (8.1), определим отношение предшествования $X^* \prec X$ в $\boldsymbol{R}^{2n-1}$:

$$X^* \prec X \Leftrightarrow P(X,\ X^*,\ z) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad z \in [0,\ 1]. \tag{8.5}$$

Положим $\tilde{F}_n = \Omega_n \cup \overline{\Gamma}_n$ ($\overline{\Gamma}_n$ – замыкание Γ_n). Полиномы (7.4) положительны при $z > 0$, если $X \in \tilde{F}_n$. Поэтому (ввиду (8.2)) из (8.5) следует, что

$$X^* \prec X \quad \text{при} \quad X^*,\ X \in \tilde{F}_n \Leftrightarrow g(X^*,z) \leqslant g(X,\ z) \quad \text{на} \quad [0,\ 1]. \tag{8.6}$$

Таким образом, если $X^* \Leftrightarrow f^*, X \Leftrightarrow f$, то $X^* \prec X \Leftrightarrow f^* \prec f$. Вне первого ортанта определения (8.5), (8.6), разумеется, не совпадают.

Следуя [1], дадим геометрическую интерпретацию (8.5).

Рассмотрим пространство коэффициентов многочленов (8.3). Его точками являются векторы $P \in \boldsymbol{R}^{2n-1}$ с координатами $P_0, \dots, P_{2n-2}$. Неотрицательным на [0, 1] многочленам соответствует *выпуклый конус* K в пространстве коэффициентов.

Пусть в точке X матрица $M_n = M_n(X)$ невырождена:

$$|M_n(X)| \neq 0, \tag{8.7}$$

так что существует обратная матрица $(M_n)^{-1}$; рассмотрим *конус $K(X)$ с вершиной X – аффинный образ конуса K*, состоящий из точек

$$X^* = X + (M_n)^{-1} P, \quad P \in K. \tag{8.8}$$

Тогда, вследствие (8.4),

$$X^* \prec X \Leftrightarrow X^* \in K(X). \tag{8.9}$$

При $X \in \Omega_n$ условие (8.7) заведомо выполняется, так как определитель $M_n(X)$ равен по модулю определителю Гурвица $H_{2n-1}(X)$. Итак, выяснен *геометрический смысл отношения предшествования $f^* \prec f$*: ввиду (8.6), (8.9), для $X^* \Leftrightarrow f^*$, $X \Leftrightarrow f$ оно означает, что

$$X^* \in K(X) \cap \tilde{F}_n = \Pi_n(X). \tag{8.10}$$

Введенное в (8.10) обозначение $\Pi_n(X)$ согласуется с (2.1): если $X \Leftrightarrow f \in \{f\}_n$, $X^* \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f^* \in \Pi_n(f)$, то $X^* \in \Pi_n(X)$. Ввиду (7.17) $\Pi_n(X)$ содержит вместе с каждой точкой $Y_0 \in \Omega_m$, $Y_0 \Leftrightarrow f \in \{f\}_m$, все точки $Y \in \Gamma_{nm}$, являющиеся прообразами $f^0 \Leftrightarrow X^0$ при отображении (7.16).

Строение и расположение конусов $K(X)$. По теореме Карлина–Шепли (см. [6. С. 75] и [2. С. 107]) любой положительный на [0, 1] многочлен

$$P_0 z^{2k} + P_1 z^{2k-1} + \ldots + P_{2k}, \quad (P_0, P_1, \ldots, P_{2k}) \in \boldsymbol{R}^{2k+1}$$

однозначно представляется в виде суммы двух многочленов

$$\alpha(z-\zeta_1)^2 \ldots (z-\zeta_k)^2 \tag{8.12}$$

и

$$\beta z(z-\eta_1)^2 \ldots (z-\eta_{k-1})^2(1-z) \tag{8.12}$$

с чередующимися нулями $0 < \zeta_1 < \eta_1 < \ldots < \eta_{k-1} < \zeta_k < 1$ и положительными коэффициентами α, β. При $k = n - 1$ многочлены вида (8.11), (8.12) образуют в пространстве коэффициентов $P_0, \ldots, P_{2n-2}$ *конусы γ' и γ* размерности n и $n - 1$ соответственно; *конус K является выпуклой оболочкой замыканий γ и γ'.*

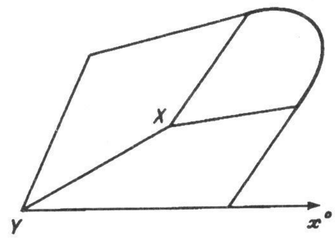
Так как при любом $X \in \Omega_n$ конус $K(X)$ получается из K линейным невырожденным преобразованием (8.8), то он является выпуклой оболочкой замыканий $\gamma(X)$ и $\gamma'(X)$ – образов γ и γ' при отображении (8.8).

В [2] доказаны следующие теоремы о расположении конусов $\gamma(X)$ и $\gamma'(X)$ относительно Ω_n.

Теорема о $\gamma'(X)$. *При любом n и любом $X \in \Omega_n$ замыкание конуса $\gamma'(X)$ не пересекается с границей Ω_n.* Иными словами, любой луч с вершиной X, принадлежащий замыканию $\gamma'(X)$, целиком располагается внутри области Ω_n.

Теорема о $\gamma(X)$. *При любом $n > 1$ и любом $X \in \Omega_n$ каждый луч с вершиной X, принадлежащий замыканию $\gamma(X)$, пересекается с замыканием Ω_n по отрезку XY, конец Y отрезка XY принадлежит подпространству $x_{2n-3} = x_{2n-2} = 0$, так что $Y = (y_0, \ldots, y_{2n-4}, 0, 0)$, при этом координата y_{2n-4} положительна: $y_{2n-4} > 0$.*

П р и м е р. При $n = 2$ луч $\gamma(X)$, выходя из Ω_2, пересекает в точке $Y = Y(X)$ ось $x_0 > 0$; полуоткрытый отрезок $[XY)$ обозначим $\gamma_1(X)$. Граница $K(X)$ при $n = 2$ содержит наряду с X, $\gamma(X)$ и $\gamma'(X)$ две плоских грани, которые касаются $\gamma'(X)$, а к $\gamma(X)$ примыкают как к ребру двугранного угла (рис.2). Одна из граней (содержащая ось x_0) состоит из таких точек X^*, что $P(X, X^*, 0) = 0$, на другой (содержащей луч (7.14)) $P(X, X^*, 1) = 0$.



Р и с. 2

На частях граней, расположенных в области Ω_2 и примыкающих к отрезку $\gamma_1(X)$, ввиду (8.2), $g(X^*, 0) = g(X, 0)$ и, соответсвенно, $g(X^*, 1) = g(X, 1)$. Поэтому в каждой точке $X^* \in \gamma_1(X)$ градиенты $\nabla_0 = \nabla g(X^*, 0)$ и $\nabla_1 = \nabla g(X^*, 1)$ ортогональны $\gamma_1(X)$.

Гипотеза о max h. Для $X \Leftrightarrow f \in \{f\}_n$ функционал $h(f)$ в (1.7) превращается в функцию $h(X)$, $X \in \Omega_n$; по непрерывности она продолжается на $\tilde{F}_n = \Omega_n \cup \overline{\Gamma}_n$. Ввиду (8.10), максимум (2.2) равен

$$h(X^0) = \max h(X^*), \quad X^* \in \Pi_n(X). \tag{8.13}$$

Согласно [2] он достигается на границе $\partial\Pi_n(X)$:

$$X^0 \in \partial\Pi_n(X) = \partial_n^1 \cup \partial_n^2, \quad \partial_n^1 = \overline{\Gamma}_n \cap K(X), \quad \partial_n^2 = \partial K(X) \cap \Omega_n,$$

причем для $n \leqslant 2$ точка максимума X^0 обязательно принадлежит ∂_n^2, а для $n > 2$ – в согласии с (3.1), (3.2) – возможны оба случая: $X^0 \in \partial_n^2$ и $X^0 \in \partial_n^1$ <6> .

Следуя [2], обозначим $\mathring{\gamma}_{n-1}(X)$ пересечение конуса $\gamma(X)$ с Ω_n; объединение $\mathring{\gamma}_{n-1}(X)$ с точкой X обозначим $\gamma_{n-1}(X)$. В [2] доказана

Л е м м а. *К* $\mathring{\gamma}_{n-1}(X)$ *относятся те и только те точки* $X^* \in \Pi_n(X)$, *для которых уравнение*

$$g(X^*, z) = g(X, z) \tag{8.14}$$

имеет на [0, 1] *ровно n корней; для* $X^* \in \Pi_n(X) \backslash \gamma_{n-1}(X)$ *уравнение* (8.14) *имеет менее n корней.*

Фиксируем $X^* \in \mathring{\gamma}_{n-1}(X)$. Корни (8.14), упорядоченные по возрастанию, в соответствии с (8.12) назовем

$$z = \eta_j, \quad 0 \leqslant j \leqslant n-1, \quad \eta_0 = 0, \quad \eta_{n-1} = 1. \tag{8.15}$$

П р и м е р. При $n = 3$ и $X^* \in \mathring{\gamma}_{n-1}(X)$ уравнение (8.14) имеет три корня: 0, η и 1, так что отрезки, составляющие по теореме о $\gamma(X)$ множество $\gamma_2(X)$, естественно параметризовать числом $\eta \in (0, 1)$ и обозначать $\ell(X, \eta)$:

$$\gamma_2(X) = \bigcup \ell(X, \eta), \quad \eta \in (0,1).$$

Аналогично в общем случае

$$\gamma_{n-1}(X) = \bigcup \ell(X, \eta_1, \ \dots, \eta_{n-2}), \quad 0 < \eta_1 < \ \dots \ < \eta_{n-2} < 1. \tag{8.16}$$

Если произвольно фиксировать в (8.16) отрезок ℓ, то при всех $X^* \in \ell$ уравнение (8.14) имеет, очевидно, одни и те же корни (8.15). Содержащие ℓ гиперплоскости $P(X, X^*, \eta_{k-1}) = 0$ являются (сравним с рис. 2) *опорными для конуса* $K(X)$. В любой точке $X^0 \in \ell$ градиенты $\nabla_k = \nabla g(X^0, \eta_{k-1})$, $1 \leqslant k \leqslant n$, служат внешними нормалями к этим опорным гиперплоскостям.

В [2] на основании леммы о корнях (8.14) была высказана

Гипотеза. *Если максимум (8.13) достигается на* ∂_n^2, *то*

$$X^0 \in \gamma_{n-1}(X). \tag{8.17}$$

Ее уточнения в [2] и доказательство в [3] связаны с разложением градиента ∇h по градиентам ∇_k.

Градиенты ∇h и ∇g. Пусть точка максимума (8.17) не совпадает с вершиной конуса: $X^0 \neq X$. Тогда X^0 принадлежит одному из отрезков ℓ в (8.16). В этом случае (см. [2]) градиент $\nabla h = \nabla h(X^0)$ является линейной комбинацией соответствующих отрезку ℓ градиентов $\nabla_k = \nabla g(X^0, \eta_{k-1})$, $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\nabla h = \sum_k d_k \nabla_k. \tag{8.18}$$

Следуя [2], выпишем формулы для градиентов ∇h и ∇g в координатах (a, s). С учетом равенства $a_n = 1 - (a_1 + \ \dots \ + a_{n-1})$ оператор ∇ можно записать в виде $\nabla = \{\partial / \partial s_1, \ \dots, \ \partial / \partial s_n, \ \partial / \partial a_1, \ \partial / \partial a_{n-1}\}$. Для любых пар j, k положим

$$f_{jk} = \frac{1}{f_j f_k (f_j + f_k)}, \quad g_{jk} = g_{jk}(z) = \frac{1}{(z + s_j)(z + s_k)}. \tag{8.19}$$

Тогда

$$\nabla h = -\{a_1 f_{11}, \ \dots, \ a_n f_{nn}, \ (s_1 - s_n) f_{1n}, \ \dots, \ (s_{n-1} - s_n) f_{n-1,n}\},$$

$$\nabla g = \nabla g(z) \ = \ -\{a_1 g_{11}, \ \dots, \ a_n g_{nn}, \ (s_1 - s_n) g_{1n}, \ \dots, \ (s_{n-1} - s_n) g_{n-1,n}\},$$

Наряду с ∇ в [2] введен оператор $\tilde{\nabla}$. В обозначениях (8.19)

$$\tilde{\nabla} h(f) = \{f_{11}, \ \dots, \ f_{nn}, f_{1n} \ \dots, \ f_{n-1,n}\}, \tag{8.20}$$

$$\tilde{\nabla} g = \tilde{\nabla} g(z, a, s) = \{g_{11}, \ \dots, \ g_{nn}, g_{1n}, \ \dots, \ g_{n-1,n}\}.$$

Положим

$$w_k = \eta_{k-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{8.21}$$

Используя (8.19), (8.20) и (8.21), перепишем (8.18) в следующей (эквивалентной) форме:

$$\tilde{\nabla} h(f^0) = \sum_k d_k \tilde{\nabla} g(w_k, a^0, s^0) \Leftrightarrow \frac{1}{f_i^0 f_j^0 (f_i^0 + f_j^0)} = \sum_k \frac{1}{(w_k + s_i^0)(s_j^0 + w_k)}. \tag{8.22}$$

В [2] было высказано предположение, что представление (8.22) возможно тогда и только тогда, когда

$$(a^0, s^0) \in \mathfrak{M}_n, \tag{8.23}$$

где $\mathfrak{M}_n$ – некоторое (точно описанное в [2]) подмножество $\mathfrak{N}_n$; в терминах, введенных в данной статье (см. начало разд. 5 и примеч. 5), услове (8.23) равносильно следующему:

$$\{\eta_0 = 0,\ \eta_1,\ \ldots,\ \eta_{n-2},\ \eta_{n-1} = 1\} = \{w_1,\ \ldots,\ w_n\} = \chi(f^0). \tag{8.24}$$

Назовем отрезок ℓ в (8.16) *особым,* если он содержит точку $X^0 \Leftrightarrow f^0$, для которой выполняется (8.24). Используя данное определение, можем полностью сформулировать гипотезу (8.17) следующим образом:

Пусть max $h(X^*)$ на $\Pi_n(X)$ достигается в точке $X^0 \in \partial_n^2 = \partial K(X) \cap \Omega_n$. Тогда $X^0 \in \gamma_{n-1}(X)$. Если при этом $X^0 \neq X$, то среди отрезков (8.16) есть особый и $X^0 \Leftrightarrow f^0$ – точка такого отрезка, удовлетворяющая условию (8.24) <7>.

Эта гипотеза получила подтверждение в [3]. С учетом леммы о корнях (8.14) и определений 1–4 (разд. 5, 6) из [3] следует, что *представления (8.18) и (8.22) возможны тогда и только тогда, когда*

$$f^0 \in \mathcal{F}_n^2, \quad f^0 \prec\prec f, \tag{8.25}$$

а числа d_k, w_k в (8.22) совпадают с d_k^0, w_k^0 в (5.5), $1 \leqslant k \leqslant n$.

З а м е ч а н и е . В частности, из [3] вытекает, что *все коэффициенты в линейной комбинации (8.18) положительны*:

$$d_k > 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{8.26}$$

Уточнения теоремы 1. Ввиду (8.25), верны следующие утверждения, уточняющие теорему 1 из разд. 2.

У т в е р ж д е н и е 1 . *Если максимум (2.2) достигается на $f^0 \in T_n(f)$ и $f^0 \neq f$, то $f^0 \in \mathcal{F}_n^2$ и $f^0 \prec\prec f$*⟨8⟩.

У т в е р ж д е н и е 2 . *В случае (3.2) для f выполняется условие (4.5): $f \in I(f^0)$, так что функция $f^0 \in T_n(f)$ определяется по f однозначно.*

Из уточненной теоремы 1 вытекает

С л е д с т в и е . Для доказательства теоремы о совпадении достаточно разобрать случай (3.3).

9. ТЕОРЕМА О СОВПАДЕНИИ

Зоны влияния $I_n(X^0)$ и $J_n(X^0)$. Используя биективное соответствие $\Omega_n \Leftrightarrow \{f\}_n$ (см. разд. 7), дополним определения 1–5 из разд. 5, 6.

При каждом $n \geqslant 1$ обозначим Ω_n^k подмножество Ω_n, находящееся в биективном соответствии с $\mathcal{F}_n^k$, $k = 0, 1, 2$; согласно (6.8) $\Omega_n^0 = \Omega_n^1 \cup \Omega_n^2$, $\Omega_n^1 \cap \Omega_n^2 = 0$. Так же, как в разд. 7, отождествим $\Omega_m^k \subseteq \boldsymbol{R}^{2m-1}$ при $m \leqslant n$ с подмножеством $\boldsymbol{R}^{2n-1}$. Для объединений Ω_m^k по всем m, $1 \leqslant m \leqslant n$, сохраним обозначение $\mathcal{M}_n^k$ из (6.11):

$$\mathcal{M}_n^k = \Omega_1^k \cup \ldots\ \Omega_n^k \subset \boldsymbol{R}^{2n-1}, \quad k = 0,\ 1,\ 2. \tag{9.1}$$

Для множества $\{w_1^0, w_2^0, \ldots, w_m^0\}$ из определения 1 при $f^0 \Leftrightarrow X^0 \in \Omega_m^0 \subset \mathcal{M}_n^0$ будем использовать (наряду с $\chi(f^0)$ обозначение $\chi(X^0)$.

В согласии с (8.5) и определением 2 введем в $\boldsymbol{R}^{2n-1}$ отношение частичной упорядоченности $X^0 \prec\prec X$. Пусть $X^0 \in \Omega_m^0 \subset \boldsymbol{R}^{2n-1}$, $X \in \boldsymbol{R}^{2n-1}$, тогда $X^0 \prec\prec X$, если

$$1) \quad X^0 \prec X \Leftrightarrow P(X, X^0, z) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad z \in [0,\ 1],$$

$$2) \quad P(X,\ X^0, w^0)/(w^0)^{n-m} = 0 \quad \text{при} \quad w^0 \in \chi(X^0). \tag{9.2}$$

Из (9.2) следует, что в точках $w^0 \in \chi(X^0)$, лежащих внутри (0, 1), многочлен $P(X, X^0, z)$ обращается в нуль вместе с производной по z:

$$X^0 \prec\prec X \Rightarrow P'(X, X^0, z) = 0 \quad \text{при всех} \quad w^0 \in \chi(X^0) \cap (0,1). \tag{9.3}$$

Точка $z = 0$ является корнем $P(X, X^0, z)$ кратности $n - m + 1$ ⟨9⟩.

Дополняя определение 3, назовем зонами влияния точек $X^0 \in \mathcal{M}_m^0$ множества

$$I_n(X^0) = \{X \in \Omega_n \mid X^0 \prec\prec X\} \tag{9.4}$$

$$J_n(X^0) = \{X \in \boldsymbol{R}^{2n-1} \mid X^0 \prec\prec X\} \tag{9.5}$$

J-зона (9.5) является расширением I-зоны (9.4), находящейся в биективном соответствии с $I_n(f^0)$ (см. (5.4)):

$$I_n(f^0) \Leftrightarrow I_n(X^0) = J_n(X^0) \cap \Omega_n. \tag{9.6}$$

Для объединений $I_n(X^0)$ и $I_n(X^0) \setminus X^0$ по всем $X^0 \in \mathcal{M}_m^0$ сохраним обозначения D_n и B_n из (6.12) и (6.14). Соответствия $\{f\}_n \Leftrightarrow \Omega_n$ и $I_n(f^0) \Leftrightarrow I_n(X^0)$ позволяют трактовать D_n и B_n, а также G_n из (6.14) и как подмножества $\{f\}_n$, и как подмножества Ω_n:

$$B_n = D_n \setminus \Omega_n^0 \subseteq G_n = \Omega_n \setminus \Omega_n^0 \subset \Omega_n. \tag{9.7}$$

После проверки теоремы 7 можно будет утверждать (сравним с (6.13)), что

$$B_n = \bigcup (I_n(X^0) \setminus X^0), \quad X^0 \in \mathcal{M}_n^2. \tag{9.8}$$

Замечание. В несимметричности (6.13) по отношению к $\mathcal{M}_n^1$ и $\mathcal{M}_n^2$ отражается различие между одноточечными и основными зонами влияния. Соотношение (9.6) раскрывает истинную подоплеку этого различия, она – в расположении J-зон относительно Ω_n: *J-зоны влияния точек $X^0 \in \mathcal{M}_{n-1}^1$ лежат вне Ω_n при $k = 1$ и пересекаются с Ω_n при $k = 2$.* Подробнее об этом – в разд. 10.

Лемма о максимуме и теорема 7. Убедимся в том, что верна следующая лемма (она понадобится при доказательстве (6.7) и (6.15)).

Лемма о максимуме. *Пусть*

$$X^0 \prec X, \quad X \in \Omega_n, \quad X^0 \in \Omega_m \subset \partial_n^1, \quad h(X^0) = \max h(X^*), \quad X^* \in \Pi_n(X). \tag{9.9}$$

Тогда не может случиться, чтобы

$$X^0 \in \Omega_m^1. \tag{9.10}$$

«Предположим, что (вопреки лемме) для некоторых n и $m < n$ существуют X и X^0, удовлетворяющие условиям (9.9) и (9.10), и пусть n – *минимальный индекс*, для которого (9.9) и (9.10) совместимы. Вследствие (8.9)

$$X^0 \prec Y \prec X \quad \text{для любой точки} \quad Y \in (X^0, X]. \tag{9.11}$$

Ввиду *минимальности* n полуинтервал $(X^0, X]$ не пересекается с $\partial\Omega_n$, т.е. $(X^0 X] \in \Omega_n$ Вследствие (9.9), (9.11) для любой точки $Y \in (X^0, X]$

$$h(X^0) = \max h(Y^*), \quad Y^* \in \Pi_n(Y). \tag{9.12}$$

Для точек $Y \in (X^0, X]$, близких к X^0, из (9.10) следует (ввиду непрерывности отображения χ), что $Y \in \Omega_n^1$. Отсюда по теореме о строгом максимуме (применимой, так как $Y \in I(Y)$, $X^0 \in \Pi_n(Y)$ и $X^0 \neq Y$) получаем: $h(X^0) < h(Y)$. Противоречие с (9.12) доказывает лемму .»

Из леммы, очевидно, следует свойство (6.7), так что попутно (вместе с леммой о максимуме) доказана теорема 7, а значит, – и соотношение (9.8).

Доказательство теоремы о совпадении. Докажем (6.15) по индукции. Тождество $B_1 \equiv G_1$ очевидно. «Область Ω_1 совпадает с Ω_1^1 (так как любой функции $f \in \{f\}_1$ множества $\chi(f)$ содержит одну – единственную точку $w = 0$). Следовательно, согласно (9.7) $B_1 \equiv G_1$ – пустое множесто.» Допустим, что

$$B_m \equiv G_m \quad \text{при} \quad m < n, \tag{9.13}$$

и докажем, что тогда $B_n \equiv G_n$. Согласно следствию, завершающему разд. 8, достаточно рассмотреть эквивалентный (3.2) случай (9.9). Ввиду (9.13) в этом случае $X^0 \in \Omega_m^0 = \Omega_m^1 \cup \Omega_m^2$. «Если бы $X^0 \in G_m \equiv B_m$, то (по определению B_m) нашлась бы точка $Y^0 \prec\prec X^0 \prec X$, , в которой $h(Y^0) > h(X^0)$, – а это противоречит (9.9).» По лемме о максимуме случай (9.10) исключается, т.е.

$$X^0 \in \Omega_m^2, \tag{9.14}$$

и остается проверить, что

$$X^0 \prec\prec X. \tag{9.15}$$

Согласно (9.2) утверждение (9.15) могло бы быть неверным в единственном случае: если бы в какой-нибудь точке $w_j \in \chi(X^0)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, выполнялось строгое неравенство

$$g(X^0, w_j) < g(X, \ w_j). \tag{9.16}$$

Покажем, что (9.16) и (9.9) несовместимы. «Для малой окрестности $\Delta_j = (w_j - \delta, \ w_j + \delta) = (w_j^-, \ w_j^+)$ точки wj согласно (9.16)

$$g(X^0, z) < g(X, \ z) \quad \text{при} \ z \in \Delta_j. \tag{9.17}$$

Возьмем $\delta > 0$ столь малым, чтобы $w_k \notin \Delta_j$ при $k \neq j$, и рассмотрим многочлен

$P(z) = P_0 z^{2m-2} + \ldots + P_{2m-2}$, равный

$$z \prod_{\substack{1<k<m \\ k\neq j}} (z-w_k)^2 (z-w_m^-)(z-w_m^+)(1-z) \quad \text{при} \quad 1<j<m,$$

$$(z-w_1^+) \prod_{k=2}^{m} (z-w_k)^2 (1-z) \quad \text{при} \quad j=1, \quad z\prod_{k=1}^{m-1} (z-w_k)^2 \ (w_m^- - z) \quad \text{при } j=m.$$

Для вектора-столбца P,составленного из его коэффициентов P_k, $0 \leqslant k \leqslant 2m-2$, и для матрицы $M = M_m(X^0)$ рассмотрим луч

$$Y(t) = X^0 + te, \quad \text{где} \quad e = M^{-1}P, \quad t>0. \tag{9.18}$$

По построению вектор e принадлежит пересечению гиперплоскостей

$$\{Y \in \boldsymbol{R}^{2m-1} \mid P(X^0, Y, w_k) = 0\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \quad k \neq j.$$

Поэтому его скалярные произведения с градиентами $\nabla_k = \nabla g(X^0, w_k)$ равны нулю при $k \neq j$:

$$(e, \nabla_k) = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \quad k \neq j. \tag{9.19}$$

В δ-окрестности w_j многочлен $P(z)$ отрицателен, так что

$$g(X^0, w_j) < g(Y(t), w_j) \quad \text{при} \quad 0 < t < t^0. \tag{9.20}$$

Следовательно,

$$(e, \nabla_j) > 0. \tag{9.21}$$

Ввиду (9.14), (8.18) и (8.26)

$$\nabla = \nabla h(X^0) = \sum_{k=1}^{m} d_k \nabla_k, \quad d_k > 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{9.22}$$

Из (9.19), (9.21) и (9.22) следует, что

$$(e, \nabla) = d_j (e, \nabla_j) > 0. \tag{9.23}$$

Пусть δ в определении Δ_j и t^0 в (9.20) достаточно малы. Тогда (сравним с (9.17) и (9.20))

$$g(X^0,\ z) < g(Y(t),\ z) < g(X,\ z) \quad \text{при} \quad z \in \Delta_j \quad \text{и} \quad 0 < t < t^0.$$

Вне Δ_j (при $0 < z < 1$) многочлен $P(z)$ положителен, т.е.

$$g(Y(t),\ z) < g(X^0,\ z) \leqslant g(X,\ z) \quad \text{при} \quad z \in (0,1),\ z \notin \Delta_j \quad \text{и} \quad 0 < t < t^0.$$

Итак, при малых $t > 0$ точка (9.18) предшествует X:

$$Y = Y(t) \prec X \tag{9.24}$$

Вместе с тем, вследствие (9.23), $h(Y) > h(X^0)$, что (в сочетании с (9.24)), очевидно, противоречит (9.9) и, следовательно, доказывает теорему о совпадении.»

10. СТРОЕНИЕ И РАСПОЛОЖЕНИЕ ЗОН ВЛИЯНИЯ

По теореме о совпадении и вытекающей из нее теореме 3 каждая функция $f \in \{f\}_n \subset \mathcal{F}$ принадлежит ровно одной зоне влияния $I(f^0)$: существует и единственна $f^0 \in \mathcal{M}_n^0 = \mathcal{M}_n^1 \cup \mathcal{M}_n^2$ для которой

$$f^0 \prec\prec f \Leftrightarrow f \in I(f^0). \tag{10.1}$$

При этом, если $f \in \mathcal{F}_n^0 \subset \mathcal{M}_n^0$, то $f^0 = f$, если же $f \in G_n$, то $f^0 \in \mathcal{M}_n^2$.

Биективное соответствие $\{f\}_n \Leftrightarrow \Omega_n$ позволяет дать эквивалентную (10.1) формулировку: *для каждой точки $X \in \Omega_n$ существует и единственна такая точка $X^0 \in \mathcal{M}_n^0$, что*

$$X^0 \prec\prec X \Leftrightarrow X \in I_n(X^0) \subseteq J_n(X^0). \tag{10.2}$$

Переход от I-зон (9.6) к их расширениям – J-зонам (9.5) – приводит к следующему геометрическому описанию зон влияния. Множество $J_n(X^0)$ в (10.2) – это *выпуклый конус* с вершиной X^0. Его *размерность* зависит от того, какому подмножеству (9.1) принадлежит X^0:

$$\text{если } X^0 \in \Omega_m^1 \subset \mathcal{M}_n^1 \quad (1 \leqslant m \leqslant n), \text{ то } \dim J_n(X^0) = 2(n-m), \tag{10.3}$$

$$\text{если } X^0 \in \Omega_m^2 \subset \mathcal{M}_n^2 \quad (1 < m \leqslant n), \text{ то } \dim J_n(X^0) = 2(n-m)+1, \tag{10.4}$$

Таким образом $J_n(Y)$ – это *точка* Y при $Y \in \Omega_n^1$ (в согласии с теоремой 6), *луч* YX при $Y \in \Omega_n^2$, *двумерный* (или *трехмерный*) *конус с вершиной* Y, если $Y \in \Omega_{n-1}^1$ (или $Y \in \Omega_{n-1}^2$) и т.д. При этом (см. замечание к (9.8)) *нечетномерные конусы с вершинами* $X^0 \in \mathcal{M}_n^2$ *дают в пересечении с* Ω_n *основные зоны влияния* $I_n(X^0) = J_n(X^0) \cap \Omega_n$, *а четномерные конусы с вершинами* $X^0 \in M_{n-1}^1$ *не пересекают* Ω_n (это следует из теоремы 7, утверждающей, что $I_n(X^0) = J_n(X^0) \cap \Omega_n = 0$ при $X^0 \in M_{n-1}^1$).

Докажем, что J_n – выпуклые конусы, а затем объясним, как проверить (10.3) и (10.4). Фиксируем $Y \in \Omega_m^0 \subset \boldsymbol{R}^{2m-1}$ и возьмем $X^0 \Leftrightarrow Y$, $X^0 \in \mathcal{M}_n^2 \subset \boldsymbol{R}^{2n-1}$ (так же, как в примеч. 9, точка X^0 получается из Y добавлением $2(n-m)$ координат $x_k^0 = 0$, $2m-1 \leqslant k \leqslant 2n-2$). Положим

$$M_n^0 = M_n(X^0) \tag{10.5}$$

и (подобно (8.4)) представим (9.5) в виде

$$J_n(X^0) = \{X \in \boldsymbol{R}^{2n-1} \mid M_n^0(X^0 - X) = P\}, \tag{10.6}$$

векторы-столбцы P в правой части составляются из коэффициентов $P_0, \ldots, P_{2n-2}$ всевозможных многочленов $P(z)$, удовлетворяющих условиям (9.2). Выпишем эти условия еще раз:

$$P(z) = P_0 z^{2n-2} + \ldots + P_{2n-2} \geqslant 0 \quad \text{при } z \in [0,1],$$

$$P(w_k)/w_k^{n-m} = 0 \quad \text{при } w_k \in \chi(X^0) = \chi(Y), \quad 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{10.7}$$

Векторы P, для которых выполняется (10.7), очевидно, образуют выпуклый конус K^0 с вершиной в начале координат. Поэтому из (10.6) следует, что $J_n(X^0)$ – выпуклый конус с вершиной X^0:

если $X_{1,2} \in J_n(X^0)$, $\alpha_{1,2} > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, то $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \in J_n(X^0)$, (10.8)

если $X \in J_n(X^0)$, $\alpha > 0$, то $X^0 + \alpha(X - X^0) \in J_n(X^0)$, (10.9)

«Докажем, например, (10.8): если $M_n^0(X^0 - X_j) \in K^0$, $j = 1, 2$, то $M_n^0[X^0 - (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2)] = \alpha_1 M_n^0(X^0 - X_1) + \alpha_2 M_n^0(X^0 - X_2) \in K^0$; (10.9) доказывается аналогично.»

Как проверить (10.4), объясним на следующем примере.

Пусть $n = 5$, $m = 3$, $Y = (y_0, y_1, y_2, y_3, y_4) \in \Omega_3^2$, $\chi(Y) = \{0, \eta, 1\}$. Тогда $X^0 = (y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, 0, 0, 0, 0,)$. Согласно (10.7) (см. также (9.3))

$$P(X, X^0, z) = z^2[z(z-\eta)^2(1-z)](A_0 z^2 + A_1 z + A_2),$$

$$A(z) = A_0 z^2 + A_1 z + A_2 \geqslant 0 \quad \text{на} \quad [0, 1], \tag{10.10}$$

т.е. (A_0, A_1, A_2) образуют трехмерный конус K_3 в пространстве параметров A_j, $0 \leqslant j \leqslant 2$. Матрица (10.5) в рассматриваемом примере равна

$$M_5^0 = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & -y_0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_3 & -y_2 & y_1 & -y_0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -y_4 & y_3 & -y_2 & y_1 & -y_0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y_4 & y_3 & -y_2 & y_1 & -y_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_4 & y_3 & -y_2 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_4 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Сопоставим ей невырожденную квадратную матрицу

$$M^* = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & -y_0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ y_3 & -y_2 & y_1 & -y_0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -y_4 & y_3 & -y_2 & y_1 & -y_0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -y_4 & y_3 & -y_2 & -y_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_4 & -y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_4 \end{Vmatrix}$$

и перепишем систему уравнений (10.6), определяющую $J_n(X^0)$, в виде

$$M^* \begin{Vmatrix} y_0 - x_0 \\ y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ y_3 - x_3 \\ y_4 - x_4 \\ -x_5 \\ -x_7 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Vmatrix} + x_6 \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ y_1 \\ y_3 \\ 0 \end{Vmatrix} + x_8 \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ y_1 \\ y_3 \end{Vmatrix} \tag{10.11}$$

В правой части (10.11) $P_k = P_k(A_0, A_1, A_2)$ – коэффициенты многочлена $P(z)/z^2 = z(z-\eta)^2(1-z)(A_0z^2 + A_1z + A_2)$. Следовательно, они связаны четырьмя линейными соотношениями

$$0 = P_6 = P_0 + P_1 + \ldots + P_5 = P_0\eta^5 + P_1\eta^4 + \ldots + P_5 = 5P_0\eta^4 + 4P_0\eta^3 + \ldots + P_4. \tag{10.12}$$

В трехмерном подпространстве (10.12) условие (10.10) выделяет конус, аффинно эквивалентный $K_3 = \{A_0,\ A_1,\ A_2\}$. Кроме того, в (10.11) – еще два независимых параметра x_6 и x_8 .Остальные $x_k(0 \leqslant k \leqslant 5$ и $k = 7)$ ввиду невырожденности M^* определяются по A_0, A_1, A_2, x_6 и x_8 однозначно. Итак, в данном примере $\dim J_n(X^0) = 5$ в согласии с (10.4).

В общем случае подсчет числа независимых параметров проводится по той же схеме; (10.3) проверяется аналогично.

11. ТЕОРЕМА О РАССЛОЕНИИ

Подведем итоги и точно сформулируем теорему о расслоении, описанную в общих чертах в начале статьи.

В $\boldsymbol{R}^N$, $N = 2\,n - 1$, построены две системы конусов, задающие два отношения частичной упорядоченности: $X \prec X^*$ и $X^0 \prec\prec X$.

Каждой точке $X = (x_0, x_1, \ldots, x_{2n-2})$, $\in \boldsymbol{R}^N$, соответствует конус $K(X)$ с вершиной X; точка $X^* \in \boldsymbol{R}^N$ предшествует $X(X^* \prec X)$, если $X^* \in K(X)$.

В первом ортанте $\boldsymbol{R}^N$ расположена область Ω_n; Γ_n – ее граница в полупространстве $x_{2n-2} > 0$; $\overline{\Gamma}_n$ – замыкание Γ_n. В $\tilde{F}_n = \Omega_n \cup \overline{\Gamma}_n$ задана функция h. Для каждой точки $X \in \Omega_n$ нужно найти

$$S(X) = \sup h(X^*), \quad X^* \in K(X) \cap \tilde{F}_n. \tag{11.1}$$

A priori не ясны ни существование, ни (тем более) единственность точки X^0, в которой верхняя грань (11.1) достигается ⟨10⟩.

Область Ω_n находится в биективном соответствии с множеством $\mathfrak{R}_n$ наборов $(a, s) = \{a_1, \ldots, a_n, s_1, \ldots, s_n\}$, удовлетворяющих соотношениям

$$0 < s_1 < \ldots < s_n; \quad a_j > 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n; \quad a_1 + \ldots + a_n = 1. \tag{11.2}$$

В координатах (11.2) при $X \in \Omega_n \Leftrightarrow (a,s) \in \mathfrak{R}_n$

$$h(X) = h(a,s) = a_1/\sqrt{s_1} + \ldots + a_n/\sqrt{s_n}. \tag{11.3}$$

Аналогично при $Y^0 \in \Omega_m \Leftrightarrow (a^0, s^0) \in \mathfrak{R}_n,\ m < n$

$$h(Y^0) = h(a^0, s^0) = a_1^0/\sqrt{s_1^0} + \ldots + a_m^0/\sqrt{s_m^0}. \tag{11.4}$$

Добавляя к координатам $Y^0 = (y_0^0, y_1^0, \ldots, y_{2m-2}^0)$ еще $2(n-m)$ нулевых координат, получаем из Y^0 точку $X^0 \in \overline{\Gamma}_n$:

$$X^0 = (y_0^0, y_1^0, \ldots, y_{2m-2}^0, 0, \ldots, 0) \Leftrightarrow (a^0, s^0) \in \mathfrak{R}_m. \tag{11.5}$$

Соотношение (11.4) связывает задачу поиска (11.1) с рациональными 1-аппроксимациями $r_0(s)$ функции $1/\sqrt{s}$ в точках s_1^0 …, s_m^0:

$$r^0(s) = d_0^0 + \sum_{k=1}^{m} d_k^0 / (s + w_k^0), \quad 0 = w_1^0 < w_2^0 < \ \dots\ < w_m^0. \tag{11.6}$$

Отображение $\chi = \chi(X^0)$ сопоставляет любой точке (11.5) множество $\{w_1^0, w_2^0, \ \dots,\ w_m^0\}$ в (11.6). По определению

$$X^0 \in \Omega_m^0, \quad X^0 \in \Omega_m^1, \quad X^0 \in \Omega_m^2 \ \text{ или } X^0 \in G_m \tag{11.7}$$

в зависимости от того, какое из условий выполняется для $w_m^0 \in \chi(X^0)$:

$$w_m^0 \leqslant 1, \quad w_m^0 < 1, \quad w_m^0 = 1 \ \text{ или } \ w_m^0 > 1. \tag{11.8}$$

В (11.7), (11.8) $m < n$; с помощью (11.3) аналогичное определение дается для $m = n$, так что $G_n = \Omega_n \setminus \Omega_n^0$.

Для каждой точки $X^0 \in \Omega_m^k$ $(m \leqslant n)$ построен выпуклый конус $J_n(X^0)$ с вершиной X^0; $\dim J_n(X^0) = 2(n-m)+k-1$, $k = 1, 2$; по определению $X^0 \prec\!\prec X$, если $X \in J_n(X^0)$. Пересечение $I_n(X^0) = J_n(X^0) \cap \Omega_n$ называется зоной влиния точки X^0. Зоны влияния попарно не пересекаются:

$$I_n(X_1^0) \ \cap \ J_n(X_2^0) = 0 \quad \text{при} \quad X_1^0 \neq X_2^0, \tag{11.9}$$

а их объединение совпадает с Ω_n.

Основными являются зоны влияния точек $X^0 \in \Omega_m^2$, $1 < m \leqslant n$ (пересечения с Ω_n нечетномерных конусов $J_n(X^0)$). Для них объединение $J_n(X^0) \setminus X$. совпадает с G_n:

$$G_n = \bigcup (I_n(X^0) \setminus X^0), \quad X^0 \in \mathcal{M}_0 = \Omega_2^2 \cup \ \dots\ \cup \Omega_n^2. \tag{11.10}$$

Вследствие (11.9), (11.10) каждая точка $X \in G_n$ принадлежит ровно одному лучу $\mathcal{L}(X^0, X) \subseteq J_n(X^0)$, $X^0 \in \mathcal{M}_0$. Таким образом, верна

Теорема о расслоении. *Лучи, составляющие конусы $J_n(X^0)$, $X^0 \in \mathcal{M}_0$, образуют расслоение G_n: через каждую точку $X \in G_n$ проходит ровно один такой луч $\mathcal{L}(X^0, X)$.*

В терминах теоремы о расслоении решению задачи поиска (11.1) можно придать такую форму:

$$S(X) = \begin{cases} h(X), & \text{если } \ X \in \Omega_n^0, \\ h(X^0), & \text{если } \ X \in \mathcal{L}(X^0, X) \cap \ G_n. \end{cases} \tag{11.11}$$

В (11.11) содержится теорема существования и единственности точки множества $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \ \cup \ \Omega_n^0$, в которой верхняя грань (11.1) достигается.

КОММЕНТАРИИ И ПРИМЕЧАНИЯ

1. Было бы неверно думать, что при $f \in \{f\}_n$, $f^* \in \{f\}_q$ и $q > n$ из условия $f^* \prec f$ следует неравенство $h^* < h$, тем неожиданнее вторая часть теоремы 2 – утверждение (2.4).

2. Далеко идущие обобщения (3.1) дают теоремы 6 и 7.

3. В [2] был приведен пример функции $f \in \{f\}_3$, для которой $f^0 \in \{f\}_2$, В разд. 5 (см. определения 1–3) будет дана классификация функций $f \in \{f\}_n$, согласованная с (3.2), (3.3); ее геометрическое истолкование – в разд. 10.

4. Согласно [5] аналогичное экстремальное свойство присуще рациональным 1-аппроксимациям (5.2) функций $\varphi(s)$ класса S^- (при этом $r(s)$ называется 1-аппроксимацией $\varphi(s)$ в точках $s_1, .., s_m$, если $r(s_k) = \varphi(s_k)$, $r'(s_k) = \varphi'(s_k)$, $1 \leqslant k \leqslant m$).В [4] будет использован тот факт, что S^- содержит зависящую от параметра z функцию

$$\varphi(s,z) = \frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{s/z}}{\sqrt{s}} = \frac{2}{\pi}\int_z^\infty \frac{d\sqrt{t}}{s+t}, \quad s>0, \quad z \in (0,1).$$

Отметим, что $\varphi(s,z) \to 1/\sqrt{s}$ при $z \to 0$.

5. Множество $\chi(f)$ связано с f явными формулами. Пусть $f_1, ..., f_m$ значения, принимаемые функцией $f \in \{f\}_m$, Рассмотрим элементарные симметрические многочлены $v_j = v_j(f_1, ..., f_m)$:

$$(z+f_1)\ \ldots\ (z+f_m) = z^m + v_1 z^{m-1} + \ldots + v_j z^{m-j} + \ldots + v_m.$$

Тогда (см. [3] точки $w_k \in \chi(f)$, $1 \leqslant k \leqslant m$ – это корни полинома $zQ(-z)$, где

$$Q(z) = \begin{cases} (v_1 z^{p-1} + v_3 z^{p-2} + \ldots + v_{2p-1})(z^p + v_2 z^{p-1} + \ldots + v_{2p}) & \text{при } m = 2p, \\ (z^p + v_2 z^{p-1} + \ldots + v_{2p})(v_1 z^p + v_3 z^{p-1} + \ldots + v_{2p+1}) & \text{при } m = 2p+1. \end{cases}$$

Примеры: 1) при $f \in \{f\}_1$ множество $\chi(f)$ содержит ровно одну точку $w_1 = 0$, т.е. $\mathcal{F}_1^0 \equiv \{f\}_1$; 2) при $m = 2$ $\chi(f) = \{0, v_2\}$, т.е. $f \in \mathcal{F}_2^0$, если $f_1 f_2 \leqslant 1$; 3) при $m = 3$ $\chi(f) = \{0, v_3/v_1, v_2\}$ так что $f \in \mathcal{F}_3^0$, если $f_1 f_2 + f_2 f_3 + f_3 f_1 \leqslant 1$. Вообще $f \in \mathcal{F}_m^0$, если (для $p = [m/2]$) наименьший корень многочлена $z^p + v_2 z^{p-1} + \ldots + v_{2p}$ больше или равен –1.

6. В случае $X^0 \in \Omega_m^2 \subset \partial_n^1$ функция h принимает максимальное значение во всех точках страта Γ_{nm}, являющихся прообразами $f^0 \Leftrightarrow X^0$ при обображении (7.16).

7. В [2] это сформулировано так (сравним с леммой о числе корней уравнения (8.14)):

Гипотеза 1. *Каковы бы ни были $(a, s) \in \mathfrak{N}_n$ и $w_1, ..., w_{n-1}$ на $[0, 1]$, градент $\nabla h(a,s)$ не является линейной комбинацией градиентов $\nabla g(w_1, a, s), \ldots, \nabla g(w_{n-1}, a, s)$.*

Гипотеза 2. *При $(a^*, s^*) \in \mathfrak{N}_n$ и $0 = \eta_0 < \eta_1 < \ldots < \eta_{n-2} < \eta_{n-1} = 1$ градиент $\nabla h(a^*, s^*)$ является линейной комбинацией градиентов $\nabla g(\eta_j, a^*, s^*)$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, тогда и только тогда, когда $(a^*, s^*) \in \mathfrak{M}_n$.*

8. В более общей ситуации аналогичное утверждение подробнее доказано в [4].

9. Приведем пример пары точек, связанных соотношением $X^0 \prec\prec X$. Пусть $n = 4$, $g\ (z) = g(X,z) = [(z+2)(z+4)(z+6)]/[(z+1)(z+3)(z+5)(z+7)] = (z^3+12z^2+44z+48)/(z^4+16z^3+86z^2+176z+105)$. Отсюда, учитывая теорему Эрмита–Билера, $X = (16, 12, 86, 44, 176, 48, 105) \in \Omega_4 \subset \boldsymbol{R}^7$. Положим $m = 2$, $Y = (y_0, y_1, y_2 = 1) = (4078/1225, 16/35, 1)$; числа y_0, y_1 выбраны так, чтобы функция $g^0(z) = (z+y_1)/(z^2+y_0z+y_2)$ была равна $g(z)$ при $z = 0$ и $z = 1$: $g^0(0) = g(0) = 16/35$, $g^0(1) = g(1) = 35/128$.

Так как определители Гурвица $H_j(Y)$, $1 \leqslant j \leqslant 4$, положительны:

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \frac{4078}{1225} - \frac{16}{35} = \frac{3518}{1225}, \quad H_3 = \frac{3518}{1225} \cdot \frac{16}{35} - 1 > 0, \quad H_4 = H_3 y_2 = H_3,$$

то $Y \in \Omega_2$. Поскольку $y_2 = 1$, то (вследствие примеч. 5) $\chi(Y) = \{0, 1\}$. Поэтому $Y \in \Omega_2^2$.

Полагая $X^0 = (y_0, y_1, y_2, 0, 0, 0, 0)$, получаем $\chi(X^0) = \chi(Y) = \{0, 1\}$.

$$g(X^0, z) = g^0(z) = [(1225z+560)z^2]/[(1225z^2+4078z+1225)z^2].$$

Отсюда (с точностью до постоянного множителя)

$$P(X, X^0, z) = z^2[(z+2)(z+4)(z+6)(1225z^2+4078z+1225) -$$

$$-(z+1)(z+3)(z+5)(z+7)(1225z+560)] = z^2 Q(z).$$

Легко убедиться в том, что $Q(-3) < 0$, $Q(-5) > 0$, $Q(-7) < 0$, т.е., кроме корней 0 и 1, многочлен $Q(z)$ имеет два отрицательных корня в интервале $(-7, -3)$. Следовательно,

$$P(X, X^0, z) > 0 \ \text{ при } z \in (0,\ 1) \ \text{ и } \ P(X, X^0, z)/z^2 = 0 \ \text{ при } z \in \chi(X^0),$$

так что $X^0 \prec\prec X$.

10. О единственности X^0 можно говорить, разумеется, только с учетом примеч. 6.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного Научного Фонда Джорджа Сороса "Культурная инициатива". Благодарю Фонд за предоставление гранта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гервер М.Л.* Волноводы и устойчивые многочлены. I // Компьютерный анализ геофизических полей. М.: Наука. 1990. С. 182–205. (Вычисл. сейсмология; вып. 23).
2. *Гервер М.Л.* Волноводы и устойчивые многочлены. II // Современные методы интерпретации сейсмологических данных. М.: Наука. 1991. С. 102–148. (Вычисл. сейсмология; вып. 24).
3. *Гервер М.Л.* Волноводы и устойчивые многочлены. III // Проблемы прогноза землетрясений и интерпретация сейсмологических данных. М.: Наука. 1992. С. 187–199. (Вычисл. сейсмология; вып. 25).
4. *Гервер М.Л.* Волноводы, 1-аппроксимации, устойчивые многочлены и расслоения в задаче обращения годографа // МИТП. РАН. Препринт. М., 1994. 32 с.
5. *Крейн М.Г., Нудельман А.А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973. 552 с.
6. *Карлин С., Стадден В.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976. 568 с.