

БЫСТРЫЙ МЕТОД МАТРИЧНОГО ПРОПАГАТОРА В ПУАССОНОВОМ СЛУЧАЕ

В.М. Маркушевич, Г.М. Стеблов, А.С. Цемахман

FAST MATRIX PROPAGATOR METHOD IN THE POISSONIAN CASE

V.M. Markushevich, G.M. Steblov and A.S. Tsemahman

We describe a method providing 10 to 30 times cuts in computation time of synthetic seismograms for gradient media as compared with the standard Thomson–Haskell algorithm. The speed is achieved by using specific, so-called D -constant, gradient media for approximation. The analytical solution of equations for Rayleigh surface waves in such media is simpler than in homogeneous media.

При интерпретации сейсмических наблюдений большую роль играет их сравнение с рассчитанными, или синтетическими, сейсмограммами. Обычно при вычислении синтетических сейсмограмм используется метод Томсона–Хаскелла [1], основанный на кусочно-постоянной аппроксимации параметров Ламе $\lambda(x)$, $\mu(x)$ и плотности упругого полупространства $\rho(x)$. Детальность разбиения зависит от скорости изменения параметров среды, при резком изменении которых с глубиной шаг разбиения может быть очень мал. Это замедляет вычисления и делает их менее точными. Вычисление матричного пропагатора с помощью разложения в ряд и рекурсивного нахождения членов этого ряда [2] также занимает много времени. Для того, чтобы ускорить вычисления, было бы полезно найти такие переменные функции $\lambda(x)$, $\mu(x)$ и $\rho(x)$, при которых система уравнений для волн Рэлея имеет простое аналитическое решение. Подобное семейство функций было обнаружено при исследовании этих уравнений, преобразованных к матричной задаче Штурма–Лиувилля [3, 4]. Мы называем D -постоянными среды с такими $\lambda(x)$, $\mu(x)$ и $\rho(x)$. Мощность этого множества оказалась большей, чем множества постоянных сред. Это позволило приблизить $\mu(x)$ вместе с ее производной. Аналитическое представление решения для D -постоянной среды проще, чем для постоянной – в частности, оно содержит одну экспоненциальную функцию вместо двух. Все это позволяет на порядок ускорить вычисления. В этой статье описывается метод матричного пропагатора, основанный на кусочно D -постоянной аппроксимации произвольного горизонтально однородного полупространства. Мы ограничимся здесь пуассоновым телом, т.е. случаем $\lambda = \mu$. Обобщение этого метода на непуассонов случай не связано с принципиальными затруднениями и будет описано в отдельной статье.

Всюду в этой статье обычным шрифтом обозначены скалярные величины, жирным – векторы и матрицы. Готический шрифт используется для блок-матриц, X^T обозначает транспонированную матрицу X , точкой над функцией обозначается дифференцирование по вертикальной координате, $\dot{f} \equiv \frac{df}{dx}$, нижний индекс (0) относится к значению функции на поверхности.

1. D -постоянные среды. Термин " D -постоянная среда" связан с тем, что систему уравнений для волн Рэлея

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\mu \frac{dw_1}{dx} - \xi \mu w_2 \right) - \xi \lambda \frac{dw_2}{dx} + (\omega^2 \rho - \xi^2 (\lambda + 2\mu)) w_1 &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left((\lambda + 2\mu) \frac{dw_2}{dx} + \xi \lambda w_1 \right) + \xi \mu \frac{dw_1}{dx} + (\omega^2 \rho - \xi^2 \mu) w_2 &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

можно записать в виде

$$\ddot{F} - \xi^2 F = AF, \quad F = (f, \varphi)^T. \quad (2)$$

Здесь ξ – волновое число, а матричный потенциал A есть функция симметричной матрицы D :

$$A = CD - E \det D, \quad (3)$$

где $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. В формуле (1) трансформанты w_1 и w_2 получаются преобразованием Фурье по времени и Бесселя по горизонтальной координате от горизонтальной и вертикальной компонент смещения.

Приведение (1) к виду (2)–(3) достигается подстановкой

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 1 \\ -\xi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mu_0}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \end{pmatrix} \mathbf{G} \mathbf{F}. \quad (4)$$

Здесь матрица \mathbf{G} удовлетворяет уравнению

$$\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{L} \mathbf{G}, \quad (5)$$

где

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}, \quad d = -\mu_0 \left(\frac{1}{\mu} \right)''', \quad \mathbf{G}(0) = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{G}(x) \equiv 1,$$

и D в терминах $\lambda(x)$, $\mu(x)$ и $\rho(x)$ выражается следующим образом:

$$D = \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{G},$$

где

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} d & \frac{\dot{\mu}}{\mu} \\ \frac{\dot{\mu}}{\mu} & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega^2 \mu_0 \frac{\rho}{\mu^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\mu}{\mu_0} \end{pmatrix}.$$

Уравнение (2) особенно упрощается, если $D = \text{const}$. В пуассоновом случае постоянной матрице D соответствует [3]

$$\mu = \ell(1 - me^{Rx})^2 e^{-Rx}, \quad (6)$$

где

$$\ell = \frac{(\dot{\mu}_0 - R\mu_0)^2}{4R^2\mu_0}, \quad m = \frac{\dot{\mu}_0 + R\mu_0}{\dot{\mu}_0 - R\mu_0},$$

$$\omega^2 \frac{\rho(x)}{\mu(x)} = R^2 = 3 \det D.$$

2. Трансформанты смещений и напряжений как функции F . Пусть F – фундаментальная матрица решений уравнения (1), а W – соответствующая матрица для

трансформант смещений. Раскрывая в явном виде уравнение (4), получаем

$$\mathbf{W} = \mathbf{KGF} + \mathbf{JGF} \dot{}. \quad (7)$$

Обозначая через \mathbf{V} фундаментальную матрицу трансформант напряжений, имеем [5]:

$$\mathbf{V} = \mathbf{MGF} + \mathbf{NGF} \dot{}. \quad (8)$$

Введя блок-матрицу

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{J} \\ \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{pmatrix},$$

запишем (7) и (8) в виде

$$\mathfrak{M} = \mathbb{U}\mathfrak{f},$$

где

$$\mathfrak{M} = \text{col}(\mathbf{W}, \mathbf{V}), \quad \mathfrak{f} = \text{col}(\mathbf{GF}, \mathbf{GF} \dot{}),$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mu_0}{\mu} & \frac{2}{3} \\ -\xi \frac{\mu_0}{\mu} & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{\mu_0}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_0}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mu_0 \left(2\xi^2 - \omega^2 \frac{\rho}{\mu} + \frac{\ddot{\mu}}{\mu} \right) & -\frac{\dot{\mu}}{3} \\ 2\xi\mu_0 \frac{\dot{\mu}}{\mu} & -\xi \frac{\mu}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} -2 \frac{\dot{\mu}}{\mu} \mu_0 & \mu \\ -2\xi\mu_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь, как всегда, $\text{col}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ обозначает матрицу-столбец, составленную из квадратных матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} . Аналитическая форма матриц \mathbf{K} , \mathbf{J} , \mathbf{M} , \mathbf{N} приведена в приложении.

3. Переходная матрица \mathfrak{Z} для D -постоянного слоя. Рассмотрим D -постоянный слой l в интервале глубин $x \in [x_c - a, x_c + a]$. Снабдим все величины индексом $(-)$, если они рассматриваются при $x = x_c - a$, и индексом $(+)$, если их аргумент равен $x = x_c + a$. Пусть на подошве слоя задана блок-матрица $\mathfrak{M}_+ = \text{col}(\mathbf{W}_+, \mathbf{V}_+)$. Требуется найти $\mathfrak{M}_- = \text{col}(\mathbf{W}_-, \mathbf{V}_-)$ на кровле этого слоя.

Так как фундаментальное решение уравнения (2) на этом интервале

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 e^{-\zeta x} + \mathbf{F}_2 e^{\zeta x},$$

где

$$\zeta = \sqrt{\xi^2 - \frac{R^2}{3}},$$

а $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ – постоянные матрицы, то

$$\mathfrak{M}_- = \mathbb{U}_- \begin{pmatrix} \mathbf{G}_- & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \text{ch } 2\zeta a & -\mathbf{E} \zeta^{-1} \text{sh } 2\zeta a \\ -\mathbf{E} \zeta \text{sh } 2\zeta a & \mathbf{E} \text{ch } 2\zeta a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{G}_+^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_+^{-1} \end{pmatrix} \mathbb{U}_+^{-1} \mathfrak{M}_+,$$

и, поскольку три матрицы между \mathbb{U}_+^{-1} и \mathbb{U}_- переставимы, переходную матрицу слоя l ,

преобразующую \mathcal{M}_+ в \mathcal{M}_- по формуле

$$\mathcal{M}_- = \mathcal{F} \mathcal{M}_+, \quad (10)$$

удобно записать в виде

$$\mathfrak{S} = \mathcal{U}_- \begin{pmatrix} \mathbf{G}_- \mathbf{G}_+^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_- \mathbf{G}_+^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \operatorname{ch} 2\zeta a & -\mathbf{E} \zeta^{-1} \operatorname{sh} 2\zeta a \\ -\mathbf{E} \zeta \operatorname{sh} 2\zeta a & \mathbf{E} \operatorname{ch} 2\zeta a \end{pmatrix} \mathcal{U}_+^{-1}. \quad (11)$$

Отметим, что $\mathbf{G}(x)$ не зависит от ξ , а матрицы $\mathcal{U}(x)$ и $\xi \mathcal{U}^{-1}(x)$ являются многочленами второй степени от ξ . Далее, в выражение (11) для переходной матрицы \mathfrak{S} входит экспонента только от одного аргумента $2\zeta a$, в то время как в обычном методе матричного пропагатора приходится вычислять две экспоненты, соответствующие P - и SV -волнам. Эти свойства позволяют существенно быстрее, чем обычно, вычислять значения переходной матрицы на множестве значений ξ при фиксированной частоте ω .

4. Параметризация $\mu(x)$ значениями μ_c , $\dot{\mu}_c$ и ρ_c в середине интервала. В формуле (б) значения параметров ℓ и m определяются величинами μ_0 , $\dot{\mu}_0$ и ρ_0 в начале координат. Для аппроксимации удобнее параметризовать эту же функцию с помощью значений μ_c , $\dot{\mu}_c$ и ρ_c , принимаемых в середине D -постоянного интервала глубин при $x = x_c$. Легко проверить, что $\mu(x)$, $x \in (x_c - a, x_c + a)$, определяется формулой

$$\frac{\mu}{\mu_c} = \left(\frac{R \operatorname{ch} v + \sigma \operatorname{sh} v}{R} \right)^2, \quad (12)$$

где

$$R = \omega \left(\frac{\rho_c}{\mu_c} \right)^{1/2}, \quad \sigma = \frac{\dot{\mu}_c}{\mu_c},$$

а v – центрированная и нормированная координата,

$$v = \frac{R}{2} (x - x_c), \quad v \in (-h, h), \quad h = \frac{aR}{2}.$$

Заметим, что так как $\mu > 0$, то h должно быть настолько мало, чтобы выполнялось неравенство

$$\operatorname{th} h < \left| \frac{R}{\sigma} \right|.$$

5. Кусочно D -постоянная аппроксимация произвольного полупространства. Пусть задан произвольный упругий неоднородный слой

$$\mu = \lambda = \bar{\mu}(x), \quad \rho = \bar{\rho}(x), \quad x \in [0, X].$$

Разобьем интервал $[0, X]$ на непересекающиеся интервалы

$$I_i = [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \dots, n, \quad x_1 = 0, \quad x_{n+1} = X.$$

Обозначим

$$x_{i+1} - x_i = 2a_i, \quad \hat{x}_i = \frac{1}{2} (x_i + x_{i+1}), \quad \bar{\mu}_i = \bar{\lambda}_i = \bar{\mu}(\hat{x}_i),$$

$$\bar{\rho}_i = \bar{\rho}(\hat{x}_i), \quad \sigma_i = \dot{\bar{\mu}}(\hat{x}_i) / \bar{\mu}(\hat{x}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Полагая в формуле (11)

$$\mu_c = \bar{\mu}_i, \quad \sigma = \sigma_i, \quad \omega = \omega_j, \quad R = R_i = \omega_j [(\bar{\rho}_i \bar{\mu}_i^{-1})]^{1/2},$$

$$a = a_i, \quad h_i = \frac{a_i R_i}{2}, \quad \mathbb{U}_-(v) = \mathbb{U}_-(-h_i), \quad \mathbb{U}_+^{-1}(v) = \mathbb{U}_+^{-1}(h_i),$$

получим переходную матрицу \mathfrak{S}_i для слоя I_i . Тогда в силу формулы (10), принимающей для интервала I_i вид

$$\mathfrak{M}_{-i} = \mathfrak{S}_i \mathfrak{M}_{+i},$$

и непрерывности смещений и напряжений на границах слоев,

$$\mathfrak{M}_{+i} = \mathfrak{M}_{-(i+1)},$$

получаем, что трансформанты смещений и напряжений на поверхности \mathfrak{M}_{-1} находятся по их значениям \mathfrak{M}_{+n} на подошве слоя $x_n = X$ по формуле

$$\mathfrak{M}_{-1} = \left(\prod_{i=1}^n \mathfrak{S}_i \right) \mathfrak{M}_{+n}. \quad (13)$$

В каждом из интервалов I_i модуль сдвига μ приближается вместе со своей производной. Благодаря этому, а также в силу свойств, отмеченных в конце п. 3, кусочно D -постоянная аппроксимация позволяет значительно ускорить вычисление синтетических сейсмограмм.

6. Значения матрицы трансформант на границе подстилающего полупространства. Значения \mathfrak{M}_{+n} зависят от полупространства, подстилающего неоднородный слой $x \in [0, X]$. Обычно это полупространство считается однородным. Полагая его параметры

$$\mu = \lambda = \mu_{n+1}, \quad \rho = \rho_{n+1},$$

найдем выражения для матрицы трансформант $\mathfrak{M}_{+n} = \mathfrak{M}_{-(n+1)}$. Положим

$$R_{n+1} = \omega_j \sqrt{(\rho_{n+1} \mu_{n+1}^{-1})}, \quad v = \sqrt{\xi^2 - R_{n+1}^2}, \quad \gamma = \sqrt{\xi^2 - (R_{n+1}^2 / 3)},$$

тогда

$$\mathfrak{M}_{-(n+1)} = (W_{n+1}, V_{n+1})^T,$$

где

$$W_{n+1} = \begin{pmatrix} -v e^{-vx} & \frac{\xi^2}{R_{n+1}^2} e^{-\gamma x} \\ -\xi e^{-vx} & \xi \frac{\gamma}{R_{n+1}^2} e^{-\gamma x} \end{pmatrix},$$

$$V_{n+1} = \mu_{n+1} \begin{pmatrix} (2\xi^2 - R_{n+1}^2) e^{-vx} & -2\xi^2 \frac{\gamma}{R_{n+1}^2} e^{-\gamma x} \\ 2\xi v e^{-vx} & -\xi \frac{2\xi^2 - R_{n+1}^2}{R_{n+1}^2} e^{-\gamma x} \end{pmatrix}.$$

7. О гибридном варианте метода матричного пропагатора. Преимущества предлагаемого метода в сравнении со стандартным методом Томсона–Хаскелла особенно проявляются, если в среде есть сильно градиентные слои. Напротив, если среда со-

стоит только из однородных слоев, то метод Томсона–Хаскелла является оптимальным. Поэтому разумно предусмотреть комбинацию обоих методов; при этом стандартный метод можно применить к слабо градиентным слоям, а D -постоянную аппроксимацию – к слоям с быстро меняющимися параметрами. В связи с этим приведем выражение для переходной матрицы \mathfrak{S}_s слоя с постоянными параметрами $\lambda = \mu = \mu_0$, $\rho = \rho_0$. Обсуждение вычислительных свойств этой матрицы можно найти в [2], [6], [7] и в указанной там литературе.

$$\mathfrak{S}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} vb + \xi^2 \theta_1 & \xi \left(\frac{\operatorname{sh} \gamma b}{\gamma} - \theta_2 \right) & -\frac{1}{2\mu_0} \theta_2 & \frac{\xi}{2\mu_0} \theta_1 \\ \xi \left(\frac{\operatorname{sh} vb}{v} + \theta_3 \right) & \operatorname{ch} \gamma b - \xi^2 \theta_1 & -\frac{\xi}{2\mu_0} \theta_1 & \frac{1}{2\mu_0} \theta_3 \\ \frac{\mu_0}{v} (R^2 - 4\xi^2) \operatorname{sh} vb - & -\xi \mu_0 (R^2 - 2\xi^2) \theta_1 & \operatorname{ch} vb + \xi^2 \theta_1 & -\xi \left(\frac{\operatorname{sh} vb}{v} + \theta_3 \right) \\ -2\xi^2 \mu_0 \theta_3 & & & \\ \xi \mu_0 (R^2 - 2\xi^2) \theta_1 & \frac{\mu_0}{\gamma} (R^2 - 4\xi^2) \operatorname{sh} \gamma x + & -\xi \left(\frac{\operatorname{sh} \gamma b}{\gamma} - \theta_2 \right) & \operatorname{ch} \gamma b - \xi^2 \theta_1 \\ & + 2\xi^2 \mu_0 \theta_2 & & \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Здесь

$$\theta_1 = \frac{2}{R^2} (\operatorname{ch} \gamma b - \operatorname{ch} vb),$$

$$\theta_2 = \frac{2}{R^2} \left(\xi^2 \frac{\operatorname{sh} \gamma b}{\gamma} - v \operatorname{sh} vb \right),$$

$$\theta_3 = \frac{2}{R^2} \left(\gamma \operatorname{sh} \gamma b - \xi^2 \frac{\operatorname{sh} vb}{v} \right),$$

$$R^2 = \omega^2 \frac{\rho_0}{\mu_0}, \quad \gamma = \sqrt{\xi^2 - (R^2/3)}, \quad v = \sqrt{\xi^2 - R^2},$$

b – толщина слоя.

8. Примеры. Для сравнения кусочно D -постоянной аппроксимации с методом Томсона–Хаскелла применим оба метода к неоднородному слою, переходная матрица которого может быть найдена аналитически. Рассмотрим упругий слой с параметрами

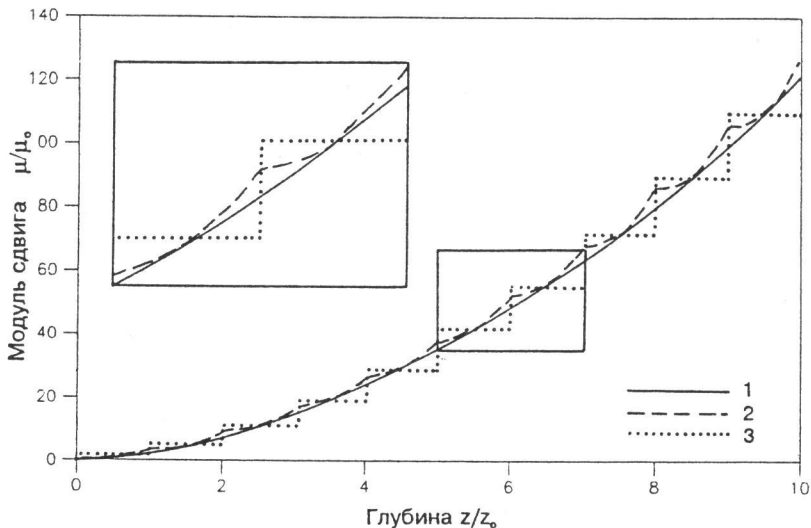
$$\lambda = \mu = \mu_0 y^2, \quad \rho = \rho_0 y^2,$$

где $y = 1 + kx$, $k = \text{const}$.

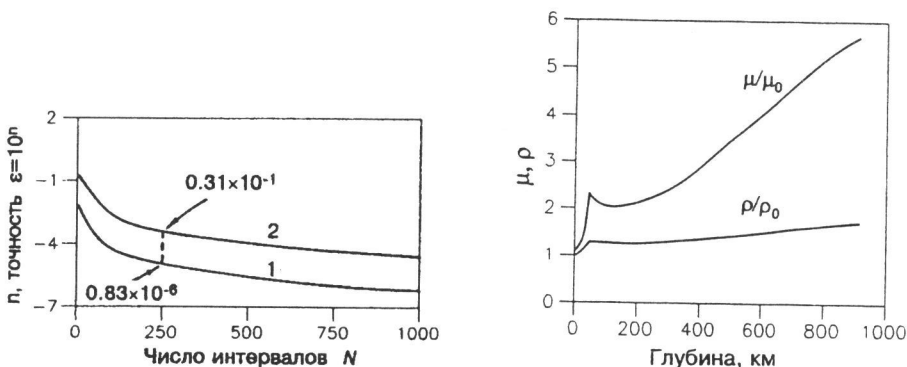
Оказывается, что переходная матрица \mathfrak{S}_{sq} слоя $x \in [0, b]$ с такими параметрами выражается через матрицы – элементы \mathbf{M}_{ij} , определенные формулой (14) следующим образом:

$$\mathfrak{S}_{sq} = \begin{pmatrix} \bar{y} \mathbf{M}_{11} + \mu_0 k \mathbf{M}_{12} \mathcal{Q} & \bar{y}^{-1} \mathbf{M}_{12} \\ \bar{y} \mathbf{M}_{21} + \bar{y} \mu_0 k \mathbf{Q} \mathbf{M}_{11} + & \bar{y}^{-1} \mathbf{M}_{22} - \bar{y}^{-1} \mu_0 k \mathbf{Q} \mathbf{M}_{12} \\ + \mu_0 k \mathbf{M}_{22} \mathbf{Q} - \mu_0^2 k^2 \mathbf{Q} \mathbf{M}_{12} \mathcal{Q} & \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\text{где } \bar{y} = 1 + kb, \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$



Р и с. 1. Сравнение точности аппроксимации модуля сдвига $\mu/\mu_0 = (1 + \chi)^2$ (1) функциями кусочно D -постоянной (2) и кусочно-постоянной (3)



Р и с. 2. Точность аппроксимации в зависимости от числа подинтервалов:
1 – быстрый метод матричного пропагатора, 2 – метод Томсона–Хаскела

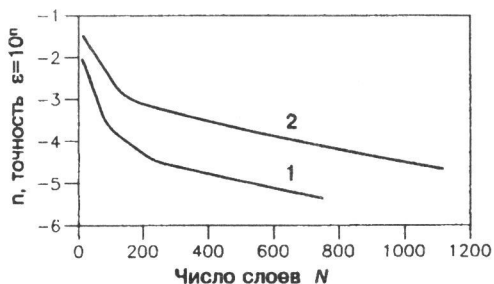
Р и с. 3. Модифицированная модель Гутенберга $\mu_0 = \lambda_0 = 3.345 * 10^{10}$ кг м⁻¹с⁻², $\rho_0 = 2.74$ г/см³.

Сравнивая переходные матрицы поэлементно, мы считали мерой их близости наибольшую разность между элементом \mathfrak{D}_{sq} в формуле (15) и произведением переходных матриц при равномерном разбиении слоя $[0, b]$. Рассматривалась как кусочно D -постоянная, так и стандартная кусочно-постоянная аппроксимация.

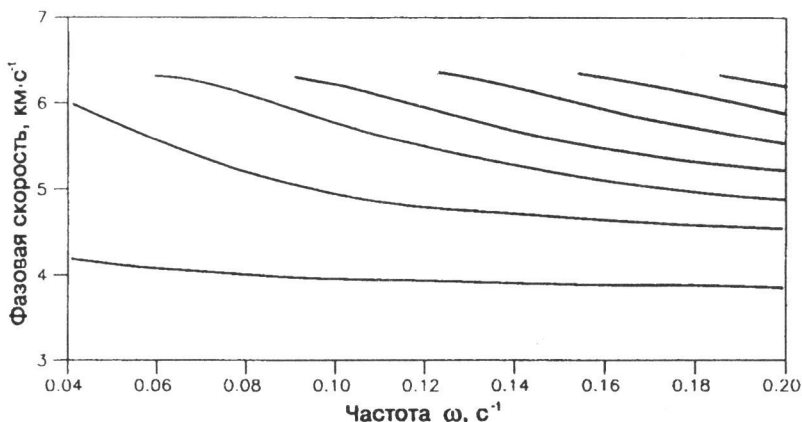
Разница в характере приближения показана на рис. 1. Видно, что для достижения той же точности аппроксимации при кусочно D -постоянном способе можно использовать значительно менее детальное разбиение. На рис. 2 $\omega = 1$ с⁻¹ и $\xi = 0.2$ км⁻¹ для интервала $x \in (0, 1)$ приводится точность аппроксимации в зависимости от числа одинаковых отрезков, на которые разбит этот интервал. Видно, что для достижения одной и той же точности нужно при стандартном методе выбрать в 10–100 раз меньший шаг аппроксимации. Это отношение тем больше, чем выше требуемая точность.

Р и с. 4. Точность аппроксимации для модифицированной модели Гутенберга

1 – быстрый метод матричного пропагатора, 2 – стандартный метод Томсона–Хаскела



Р и с. 5. Дисперсионные кривые рэлеевских мод для модифицированной модели Гутенберга



На рис. 3 приведена модель среды, параметры которой очень близки к разрезу Гутенберга [1] (мы лишь несколько изменили λ , чтобы сделать среду пуассоновой). На рис. 4 для этой модели при $\omega = 0.043 \text{ с}^{-1}$ и $\xi = 0.007 \text{ км}^{-1}$ сравнивается точность аппроксимации двумя методами. В отличие от первого тестового примера, где переходная матрица (15) вычислялась аналитически, здесь она рассчитывалась с помощью очень точной аппроксимации $\mu(z)$. Для получающихся при этом различных разбиений в стандартном и модифицированном методе вычислялись отклонения переходных матриц (13) и (14) от предельной матрицы, вычисленной с очень высокой точностью. На рис. 5 показаны дисперсионные кривые фазовых скоростей рэлеевских мод, рассчитанные по предложенному алгоритму.

* * *

Описанный в статье метод основан на замене произвольного неоднородного слоя пачкой D -постоянных слоев. Преимущество этого метода перед кусочно-постоянной аппроксимацией объясняется, главным образом, большей свободой выбора в классе D -постоянных сред. Можно ли еще расширить это множество и тем самым улучшить точность аппроксимации? Естественно, при этом желательно не слишком усложнять аналитическую конструкцию решения.

Одна из возможностей – исследовать D -линейные среды. Правда, в пуассоновом случае доказано, что они тождественно совпадают с D -постоянными. Однако в непуассоновом случае такие среды существуют. Возможно, что и специальные типы D -квадратичных сред также окажутся полезными. Даже если при этом решения уравнений для волн Рэлея будут выражаться через специальные функции типа функций Эйри или Бесселя, скорость вычислений может, тем не менее, возрасти за счет увеличения точности приближения.

Авторы признательны Н.А. Смирновой за подготовку рукописи к печати.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Аналитические выражения для сомножителей переходной матрицы.

Подстановка (12) в (9) приводит к следующим выражениям:

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{J} \\ \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -\frac{R^3(R \operatorname{sh} v + \sigma \operatorname{ch} v)}{(R \operatorname{ch} v + \sigma \operatorname{sh} v)^3} & \frac{2}{3} \\ -\xi \frac{R^2}{(R \operatorname{ch} v + \sigma \operatorname{sh} v)^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{R^2}{(R \operatorname{ch} v + \sigma \operatorname{sh} v)^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \mu_0 \begin{pmatrix} \left(2\xi^2 - \frac{R^2}{2} \frac{R^2 - \sigma^2}{(R \operatorname{ch} v + \sigma \operatorname{sh} v)^2} \right) & -\frac{1}{3R} (R \operatorname{ch} v + \sigma \operatorname{sh} v)(R \operatorname{sh} v + \sigma \operatorname{ch} v) \\ 2\xi \frac{R(R \operatorname{sh} v + \sigma \operatorname{ch} v)}{(R \operatorname{ch} v + \sigma \operatorname{sh} v)} & -\frac{\xi}{3R^2} (R \operatorname{ch} v + \sigma \operatorname{sh} v)^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{N} = \mu_0 \begin{pmatrix} -2R \frac{R \operatorname{sh} v + \sigma \operatorname{ch} v}{R \operatorname{ch} v + \sigma \operatorname{sh} v} & \frac{1}{R^2} (R \operatorname{ch} v + \sigma \operatorname{sh} v)^2 \\ -2\xi & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу Фробениуса [8], можно найти в явном виде и матрицы – элементы блок-матрицы \mathbb{U}^{-1} ,

$$\mathbb{U}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{K}} & \bar{\mathbf{J}} \\ \bar{\mathbf{M}} & \bar{\mathbf{N}} \end{pmatrix}.$$

Они определяются формулами

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{(R \operatorname{ch} v + \sigma \operatorname{sh} v)^2}{R^2 \xi} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{J}} = \mu_0^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{\xi (R \operatorname{ch} v + \sigma \operatorname{sh} v)^2} \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} -\frac{(R \operatorname{ch} v + \sigma \operatorname{ch} v)^2}{3R^2} & -\frac{(R \operatorname{ch} v + \sigma \operatorname{sh} v)(R \operatorname{sh} v + \sigma \operatorname{ch} v)}{\xi R} \\ 0 & 2\xi + \frac{R^2}{2\xi} \frac{R^2 - \sigma^2 - 4(R \operatorname{sh} v + \sigma \operatorname{ch} v)^2}{(R \operatorname{ch} v + \sigma \operatorname{sh} v)^2} \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{N}} = \mu_0^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2}{3\xi} \\ \frac{R^2}{(R \operatorname{ch} v + \sigma \operatorname{sh} v)^2} & -\frac{R^3}{\xi} \frac{\sigma \operatorname{ch} v + R \operatorname{sh} v}{(R \operatorname{ch} v + \sigma \operatorname{sh} v)^3} \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы найти выражение для матрицы \mathbf{G} , нужно решить матричное диф-

ференциальное уравнение (5). Мы опишем его решение в отдельной статье, а здесь приведем лишь окончательный результат.

$$GC = \begin{pmatrix} \frac{1}{R}(\sigma \operatorname{sh} v + R \operatorname{ch} v) \cos \frac{v}{\sqrt{3}} & \frac{1}{R}(\sigma \operatorname{sh} v + R \operatorname{ch} v) \sin \frac{v}{\sqrt{3}} \\ 3R^2(\sigma \operatorname{sh} v + R \operatorname{ch} v)^{-2} \times \\ \times \left(\frac{1}{2}(\sigma \operatorname{ch} v + R \operatorname{sh} v) \cos \frac{v}{\sqrt{3}} - \right. & \left. \left(\frac{1}{2}(\sigma \operatorname{ch} v + R \operatorname{sh} v) \sin \frac{v}{\sqrt{3}} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\sqrt{3}}{6}(\sigma \operatorname{sh} v + R \operatorname{ch} v) \sin \frac{v}{\sqrt{3}} \right) & \left. \left. + \frac{\sqrt{3}}{6}(\sigma \operatorname{sh} v + R \operatorname{ch} v) \cos \frac{v}{\sqrt{3}} \right) \right) \end{pmatrix},$$

где постоянная матрица C сокращается в (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Пер. с англ. М.: Мир, 1983. Т. 1. 520 с.
2. Kennett B.L.N. Seismic wave propagation in stratified media. Cambridge University Press, Cambridge: 1983. 342 p.
3. Маркушевич В.М., Цемахман А.С. D-постоянные среды и рэлеевские волны в них на характерных частотах. I. Пуассоновы среды // Современные методы интерпретации сейсмологических данных. М.: Наука, 1991. С. 149–157. (Вычисл. сейсмология; вып. 24).
4. Маркушевич В.М., Стеблов Г.М., Цемахман А.С. D-постоянные среды и рэлеевские волны в них на характерных частотах. II. Непуассоновы среды. Там же. С. 158–171.
5. Маркушевич В.М. Вынужденные гармонические колебания рэлеевского типа и матричная задача рассеяния // Математические методы в сейсмологии и геодинамике. М.: Наука, 1986. С. 119–135. (Вычисл. сейсмология; вып. 19).
6. Молотков Л.А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. Л.: Наука, 1984. 202 с.
7. Дмитриев В.И., Аккуратов Г.В. Математическое моделирование сейсмического частотного зондирования. М.: Изд-во МГУ, 1985. 123 с.
8. Гантмахер Ф.П. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.