УДК 550.310:517.984.54

ДИСПЕРСИЯ ВОЛН РЭЛЕЯ В СРЕДАХ ЗВОЛИНСКОГО ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ПУАССОНА

В.М. Маркушевич, А.С. Цемахман

DISPERSION OF RAYLEIGH WAVES IN ZVOLINSKY'S MEDIA AT ARBITRARY POISSON'S RATIO

V.M. Markushevich and A.S. Tsemahman

We study Rayleigh waves in a heterogeneous elastic half-space whose density and Lame's parameters are proportional and increase exponentially with depth. The Rayleigh waves do not propogate at a frequence lower than a critical one. We show the cutoff frequency depends on Lame's parameters and density, and derive in a parametric form the Rayleigh wave phase velocity as a function of frequency.

В статье рассматриваются стационарные колебания рэлеевского типа в упругом полупространстве с плотностью ρ и коэффициентами Ламе λ, μ, экспоненциально возрастающими с глубиной z:

$$\rho(z)=\rho_0 \exp(Rz),\ \ \lambda(z)=\lambda_0 \exp(Rz),\ \ \mu(z)=\mu_0 \exp(Rz). \tag{1}$$

Скорости продольных и поперечных волн в такой среде постоянны и не зависят от координат, т.е. среда однородна с точки зрения лучевого приближения, в то время как дисперсия волн Рэлея характеризуется наличием критической частоты, зависящей от упругих параметров, ниже которой свободные поверхностные колебания не существуют.

Впервые распространение волн Рэлея в таких средах исследовал Н.В. Зволинский [1]. Он получил дисперсионную зависимость для среды, не испытывающей поперечного сжатия при продольном растяжении, т.е. для $\lambda = 0$, а также рассмотрел асимптотическое поведение волновых чисел для высокочастотного приближения в случае произвольного полупространства вида (1). Им было отмечено, что свободные поверхностные колебания возможны лишь при достаточно высоких частотах.

Эта статья является продолжением работы [2], в которой изучалась дисперсия рэлеевских волн в пуассоновых средах Зволинского, т.е. рассматривалось подмножество (1) с дополнительным условием $\lambda(z) \equiv \mu(z)$.

Исследование пуассоновых неоднородных сред с постоянными скоростями предпринималось и ранее, еще в 30-е годы, Х. Пикерисом [3], который изучал среды вида $\lambda = \mu$, $\mu/\mu_0 = \rho/\rho_0 = \exp(Rz)$. Интересно отметить, что им был рассмотрен более общий случай $\lambda = \mu$, $\mu/\mu_0 = \rho/\rho_0 = ch^2(c_1 z + c_2)$, c_1 = const, c_2 = const, фактически описывающий D-постоянную пуассонову среду [4]. В содержательной работе Пикериса имеются неточности; в частности, автор не указал на существование минимальной частоты [2],

$$\Omega \cong 2.961 R\sqrt{\mu_0/\rho_0},$$

ниже которой волны Рэлея в пуассоновом полупространстве с экспоненциальной зависимостью упругих параметров от глубин не возникают, хотя справедливо отметил существование такой частоты отсечки для среды вида $\lambda = \mu$, $\mu/\mu_0 = \rho/\rho_0 = (1 + cz)^2$, c = const. Статья Пикериса стала нам известна уже после написания [2] и [4], чем объясняется отсутствие в них соответствующей ссылки.

В данной работе рассматривается случай вертикально неоднородного полупространства (1) с произвольными значениями λ_0, μ_0, ρ_0 и R. Общие закономерности поведения волн Рэлея в таких средах схожи с описанными в [1, 2]. В частности, для

© В.М. Маркушевич, А.С. Цемахман, 1994

каждого полупространства существует критическая частота, ниже которой свободные колебания не возникают, а на частотах выше критической имеет место нормальная дисперсия.

При исследовании дисперсионных свойств нами был использован метод Рэлея [5. С. 229], состоящий в преобразовании дисперсионного уравнения к многочлену путем последовательного возведения обеих частей дисперсионного уравнения в квадрат с последующим выбором корней, лежащих на физическом листе поверхности Римана. При этом промежуточные выкладки оказываются более громоздкими, чем в [2], поэтому и здесь для выполнения подстановок и разложения многочленов на множители применялись средства компьютерной алгебры [6]. Однако получающийся в результате многочлен имеет довольно простой вид, что позволяет аналитически найти связь между частотой и волновым числом.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ ЗВОЛИНСКОГО

Стационарные свободные колебания рэлеевского типа с круговой частотой ω и волновым числом ξ описываются краевой задачей [7]

$$\frac{d}{dz}\left(\mu\left(\frac{dw_1}{dz}-\xi w_2\right)\right)-\xi\lambda\frac{dw_2}{dz}+(\omega^2\rho-\xi^2(\lambda+2\mu))w_1=0,$$

$$\frac{d}{dz}\left((\lambda+2\mu)\frac{dw_2}{dz}-\xi w_1\right)-\xi\lambda\frac{dw_1}{dz}+(\omega^2\rho-\xi^2\mu)w_2=0,$$

$$\left.\begin{aligned}&\mu\left(\frac{dw_2}{dz}-\xi w_2\right)=0\\&(\lambda+2\mu)\frac{dw_2}{dz}+\xi\lambda w_1=0\end{aligned}\right\}\quad \text{при } z=0,$$

$$w_1\to 0,\ w_2\to 0 \qquad \text{при } z\to\infty,$$

которая в случае среды Зволинского (1) принимает вид

$$\begin{gathered}\ddot{w}_1+R\dot{w}_1-\frac{2}{1-p}\alpha^2 w_1+\frac{1+p}{1-p}\xi\dot{w}_2+R\xi w_2=0,\\
\ddot{w}_2+R\dot{w}_2-\frac{1-p}{2}\beta^2 w_2-\frac{1+p}{2}\xi\dot{w}_1-R\xi w_1=0,\\
\left.\begin{aligned}&\dot{w}_1-\xi w_2=0\\&\dot{w}_2+p\xi w_1=0\end{aligned}\right\}\quad \text{при } z=0\\
w_1\to 0,\ w_2\to 0\ \text{ при } z\to\infty\end{gathered}\tag{2}$$

где w_1 и w_2 – преобразование соответственно радиальной и вертикальной компонент смещения*. В (2) мы ввели, как обычно, скорость продольной (a) и поперечной (b) волн,

$$a=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}=\sqrt{(\lambda_0+2\mu_0)/\rho_0},\ b=\sqrt{\mu/\rho}=\sqrt{\mu_0/\rho_0},\tag{3}$$

и положили

$$p=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}=1-2b^2/a^2,\ \ \alpha^2=\xi^2-\omega^2/a^2,\ \ \beta^2=\xi^2-\omega^2/b^2,\tag{4}$$

а точкой над функцией обозначили дифференцирование по координате z. Параметр p

---

*Причем по времени выполняется преобразование Фурье, а по горизонатльной координате преобразование Ханкеля.

связан с коэффициентом Пуассона $\sigma = \lambda/(2(\lambda + \mu))$ соотношением

$$p = \frac{\sigma}{1-\sigma}$$

и имеет физический смысл отношения поперечного напряжения к сжимающей силе при одностороннем сжатии. Из условия минимума свободной энергии [8. С. 22] модули сдвига и всестороннего сжатия положительны.

$$\mu > 0, \;\; \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0. \tag{5}$$

Вещества с $\lambda \leqslant 0$ в настоящее время неизвестны, поэтому часто считают, что

$$\mu > 0, \;\; \lambda > 0. \tag{6}$$

При выполнении условия (5) коэффициент Пуассона изменяется от -1 при $\lambda = -2\mu/3$ до $1/2$ при $\mu = 0$, а случае, если выполнено (6), σ изменяется от 0 при $\lambda = 0$ до $1/2$ при $\mu = 0$ (в газах или жидкостях). При этом значения параметра p лежат в интервале от $-1/2$ при $\sigma = -1$ или 0 при $\sigma = 0$ до 1 при $\sigma = 1/2$. Далее нас будут интересовать дисперсионные свойства среды (1), т.е. зависимость собственных значений ξ краевой задачи (2) от частоты ω, для значений параметра $p \in (0, 1)$.

Для интегрирования уравнений движения введем, следуя Зволинскому, вспомогательную функцию $F(z)$ так, чтобы компоненты w_1 и w_2 выразились через F и ее производные по формулам

$$\begin{aligned} w_1 &= -\xi\left(\frac{1+p}{1-p}\dot{F} - RF\right), \\ w_2 &= -\ddot{F} - R\dot{F} + \frac{2}{1-p}\alpha^2 F. \end{aligned} \tag{7}$$

Тогда первое уравнение в (2) является тождеством, а второе переходит в дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\ddddot{F} + 2R\dddot{F} + (R^2 - \alpha^2 - \beta^2)\ddot{F} - R(\alpha^2 + \beta^2)\dot{F} + (\alpha^2\beta^2 + pR^2\xi^2)F = 0. \tag{8}$$

Характеристическим уравнением для него является

$$(k^2 + Rk - (\alpha^2 + \beta^2)/2 - Q)(k^2 + Rk - (\alpha^2 + \beta^2)/2 + Q) = 0, \tag{9}$$

где

$$Q = \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)^2/4 - pR^2\xi^2}. \tag{10}$$

Из четырех корней характеристического уравнения

$$k_{1,2} = -R/2 - \sqrt{R^2/4 + (\alpha^2 + \beta^2)/2 \pm Q},$$

$$k_{3,4} = -R/2 + \sqrt{R^2/4 + (\alpha^2 + \beta^2)/2 \pm Q}$$

условию на бесконечности удовлетворяют только k_1 и k_2, поэтому общее решение уравнения (8) в случае, когда все корни простые, представляется в виде

$$F(z) = C_1 \exp(k_1 z) + C_2 \exp(k_2 z), \tag{11}$$

где C_1 и C_2 – постоянные.

При этом краевые условия на поверхности z = 0 выражаются через функцию F по формулам

$$\dddot{F}(0) + R\ddot{F}(0) - (2\alpha^2 + p\beta^2)\dot{F}(0) + pR\xi^2 F(0) = 0, \tag{12}$$

$$\xi(p\ddot{F}(0) + \alpha^2 F(0)) = 0.$$

Значению $\xi = 0$, очевидно, соответствует $\omega = 0$, т.е. случай отсутствия колебаний, поэтому далее считаем $\xi \neq 0$. Подставляя в (12) решение (11), получаем линейную однородную систему уравнений относительно постоянных C_1 и C_2. Определитель этой системы должен быть равен нулю, что дает

$$\begin{vmatrix} k_1^3 + Rk_1^2 - (2\alpha^2 + p\beta^2)k_1 + pR\xi^2 & k_2^3 + Rk_2^2 - (2\alpha^2 + p\beta^2)k_2 + pR\xi^2 \\ pk_1^2 + \alpha^2 & pk_2^2 + \alpha^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Часть корней этого уравнения появляется из-за линейной зависимости выражений (7). Эти корни должны быть исключены, так как рэлеевские моды соответствуют линейным комбинациям асимптотически при $z \to \infty$ линейно независимых решений задачи (2). Так как в случае параметров (1) асимптотическая зависимость и зависимость в произвольной точке z тождественны, то мы ищем те корни уравнения (13), которые не совпадают с корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} k_1^2 + Rk_1^2 - \dfrac{2}{1-p}\alpha^2 & k_2^2 + Rk_2^2 - \dfrac{2}{1-p}\alpha^2 \\ \dfrac{1+p}{1-p}k_1 + R & \dfrac{1+p}{1-p}k_2 + R \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

С учетом (9) уравнение (13) запишется в виде

$$\begin{vmatrix} \left(-\dfrac{3}{2}\alpha^2 + \dfrac{1-2p}{2}\beta^2 + Q\right)k_1 + pR\xi^2 & \left(-\dfrac{3}{2}\alpha^2 + \dfrac{1-2p}{2}\beta^2 + Q\right)k_2 + pR\xi^2 \\ -Rk_1 + \dfrac{2+p}{2p}\alpha^2 + \dfrac{1}{2}\beta^2 + Q & -Rk_2 + \dfrac{2+p}{2p}\alpha^2 + \dfrac{1}{2}\beta^2 + Q \end{vmatrix} = 0, \tag{15}$$

а дополнительное условие (14) в виде

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{3+p}{2(1-p)}\alpha^2 + \dfrac{1}{2}\beta^2 + Q & -\dfrac{3+p}{2(1-p)}\alpha^2 + \dfrac{1}{2}\beta^2 - Q \\ \dfrac{1+p}{1-p}k_1 + R & \dfrac{1+p}{1-p}k_2 + R \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

Найдя корни уравнения (15), не совпадающие с корнями (16), мы тем самым определим дисперсионную зависимость $\omega = \omega(\xi)$.

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ В БЕЗРАЗМЕРНЫХ ВЕЛИЧИНАХ

Как и в [4], положим

$$x = \frac{Q}{R^2},\; t = \frac{\omega^2}{R^2 b^2},\; \zeta = \frac{\xi}{R}. \tag{17}$$

С учетом (4), (10) имеет

$$\frac{\alpha^2}{R^2} = \zeta^2 - \frac{1-p}{2}t = \frac{(1+p)^2}{16p}t^2 - \frac{1-p}{2}t - \frac{x^2}{p},$$

$$\frac{\beta^2}{R^2}=\zeta^2-t=\frac{(1+p)^2}{16p}t^2-t-\frac{x^2}{p},$$

$$\zeta^2=\frac{(1+p)^2}{16p}t^2-\frac{x^2}{p}.$$

Подставляя выражения для α^2, β^2 и определения (17) в уравнения (14), (15), получим следующую задачу: найти корни дисперсионного уравнения

$$\begin{vmatrix} S_+ + T_+\sqrt{W_+} & S_- + T_-\sqrt{W_-} \\ U_+ + \sqrt{W_+} & U_- + \sqrt{W_-} \end{vmatrix} = 0, \tag{18}$$

не совпадающие с корнями дополнительного уравнения

$$\begin{vmatrix} Y + \sqrt{W_+} & Y + \sqrt{W_-} \\ P_+ & P_- \end{vmatrix} = 0. \tag{19}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
S_\pm &= \frac{(1+p)^2(1+3p)}{32p}t^2-\frac{1+p}{8}t-\frac{1+3p}{2p}x^2\mp\frac{x}{2}= \\
&=-\frac{1+3p}{2p}\left(x\pm\frac{1+p}{4}t\right)\left(x\mp\frac{1+p}{4}t\pm\frac{p}{1+3p}\right), \\
T_\pm &= \frac{(1+p)^2}{16p}t^2-\frac{1+p}{4}t-\frac{1+p}{p}x^2\mp x=-\frac{1+p}{p}\left(x\pm\frac{1+p}{4}t\right)\left(x\mp\frac{1+p}{4}t\pm\frac{p}{1+p}\right), \\
U_\pm &= \frac{(1+p)^3}{16p^2}t^2-\frac{(1+p)(2-p)}{4}t-\frac{1+p}{p^2}x^2\pm x+\frac{1}{2}, \\
W_\pm &= -\frac{(1+p)^3}{16p}t^2-\frac{3-p}{4}t-\frac{x^2}{p}\pm x+\frac{1}{4}, \\
P_\pm &= \frac{(1+p)^2}{16p(1-p)}t^2+\frac{1+p}{4}t+\frac{1+p}{p(1-p)}x^2\pm x= \\
&=\frac{1+p}{p(1-p)}\left(x\pm\frac{1+p}{4}t\right)\left(x\mp\frac{1+p}{4}t\pm\frac{p(1-p)}{1+p}\right), \\
Y &= -\frac{1-3p}{2(1+p)}.
\end{aligned} \tag{20}$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Следуя методу Рэлея, преобразуем (19) в многочлен.

Из (19) следует, что

$$P_-\sqrt{W_+}=P_+\sqrt{W_-}+Y(P_+-P_-),$$

откуда

$$2YP_+(P_+-P_-)\sqrt{W_-}=P_-^2W_+-P_+^2W_--Y(P_+-P_-)^2, \tag{21}$$

Подставим в это уравнение значения (20), тогда коэффициент при $\sqrt{W_-}$ преобразуется к виду

$$2YP_+(P_+ - P_-) = -\frac{2(1-3p)}{p(1-p)}\left(x + \frac{1+p}{4}t\right)xG_+,$$

а правая часть уравнения запишется в форме

$$P_-^2 W_+ - P_+^2 W_- - Y^2(P_+ - P_-)^2 = \frac{xG_+}{8p^2(1-p)^2(1+p)}\left[G_- H - \frac{8p^2(1-p)^2(1-3p)^2}{1+p}\right],$$

где

$$G_\pm = x \mp \frac{1+p}{4}t \pm \frac{p(1-p)}{1+p}, \tag{22}$$

$$H = 16(1+p)^2(3-p)x^2 - (1+p)^4(3-p)t^2 + 16p(1-p)(1+p)^2 t - 8p(1-p)(1-3p)^2. \tag{23}$$

Отметим, что в пуассоновом случае, т.е. при $p = 1/3$,

$$P_-^2 W_+ - P_+^2 W_- = 0,$$

поэтому

$$xG_+ G_- H = 0,$$

и, следовательно, дополнительное уравнение имеет вид [4, формула (12)]

$$x\left(x - \frac{t}{3} + \frac{1}{6}\right)\left(x + \frac{t}{3} + \frac{1}{6}\right)(36x^2 - 4t^2 + 3t) = 0.$$

Сокращая в (21) общий множитель $xG_+/(p(1-p))$ и возводя обе части получившегося уравнения в квадрат, находим

$$-\frac{G_-^2}{64p^2(1-p)^2(1+p)^2}\left[H\left(H + \frac{16p(1-p)^2}{3-p}(1-3p)^2\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{64p^2(1-p)^2(1+p)}{3-p}(1-3p)^2(8(1+p)t - (1-3p)^2\right] = 0.$$

Таким образом, из решений дисперсионного уравнения (18) необходимо исключить корни уравнений

$$x = 0,\ G_\pm = 0,\ H\left(H + \frac{16p(1-p)^2}{3-p}(1-3p)^2\right) +$$

$$+ \frac{64p^2(1-p)^2(1+p)}{3-p}(1-3p)^2(8(1+p)t - (1-3p)^2 = 0. \tag{24}$$

СВЕДЕНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ К МНОГОЧЛЕНУ

Преобразование дисперсионного уравнения к многочлену связано с громоздкими промежуточными выражениями, хотя окончательный результат имеет сравнительно простую форму. Это преобразование было проведено при помощи "Математики" [6]. Здесь мы опишем его в общих чертах, а для того, чтобы читатель мог проверить правильность выкладок, приведем некоторые промежуточные результаты в Приложении.

Запишем (18) в виде

$$(T_+U_- - S_-)\sqrt{W_+} - (T_-U_+ - S_+)\sqrt{W_-} + (T_+ - T_-)\sqrt{W_+W_-} + S_+U_- - S_-U_+ = 0, \tag{25}$$

соберем члены с $\sqrt{W_+}$ в левой части и возведем обе части получившегося уравнения в квадрат:

$$2[(T_+U_- - S_-)(T_+ - T_-)W_+ + (T_-U_+ - S_+)(S_+U_- - S_-U_+)]\sqrt{W_-} =$$
$$= (S_+U_- - S_-U_+)^2 - (T_+U_- - S_-)^2 W_+ + (T_-U_+ - S_+)^2 W_- - (T_+ - T_-)^2 W_+W_-. \tag{26}$$

С учетом (20) коэффициенты уравнения (26) могут быть представлены в форме

$$T_\pm U_\pm - S_\pm = \frac{1}{64p^3(1+p)}A_\pm G_\pm + \Phi,$$
$$S_+U_- - S_-U_+ = \frac{3p^2+2p+1}{p^2}[G_+G_- + \Psi], \tag{27}$$
$$T_+ - T_- = -2x,$$

где

$$A_\pm = \mp(1+p)^6 t^3 - 4(1+p)^4((1+p)x \mp 2p)t^2 \pm 16(1+p)^4 x^2 t + 64((1+p)^3 x^3 \mp$$
$$\mp 2p(1+p)^2 x^2 + 2p^2(1+p)x \mp p^3(1-3p)),$$
$$\Phi = -\frac{1-3p}{1+p}\left(\frac{1+p}{4}t - \frac{p(1-p)}{1+p}\right),$$
$$\Psi = -\frac{p^2(1-3p)}{2(3p^2+2p+1)(1+p)^2}(p(1+p)^2 t + 2p^3 - 2p^2 - p - 1),$$

а $G_\pm$ определены соотношениями (22).

Подставляя (27) в (26) и факторизуя обе части уравнения, находим

$$\frac{xG_+(G_-HJ+\Theta)}{128p^5(1+p)(3-p)^2}\sqrt{W_-} = \frac{xG_+(G_-HK+\Pi)}{2048p^6(1+p)^2(3-p)^3}, \tag{28}$$

где H задано формулой (23), а выражения для J, Θ и Π приводятся к Приложении.

Разделим обе части уравнения (28) на $xG_+/(128p^5(1+p)(3-p)^2)$, что возможно в силу (24), и возведем в квадрат получившееся уравнение:

$$(G_-HJ+\Theta)^2 W_- = \frac{(G_-HK+\Pi)^2}{256p^2(1+p)^2(3-p)^2}.$$

Подставляя в это уравнение, уже не содержащее радикалов, значения W_- из (20), G_- из (22), H из (23), а также J, Θ, K и Π из Приложения, получаем после преобразований:

$$\frac{G_-}{16p^2(1+p)^6(3-p)^6}(H^2L+\Gamma) = 0. \tag{29}$$

Здесь

$$L = \sum_{s=0}^{4} l_{2s}x^{2s}, \tag{30}$$

$$\Gamma = -2^{16}p^5(1-3p)(\gamma_2 x^2 + \gamma_0), \tag{31}$$

Коэффициенты в (30) и (31) указаны в Приложении.

Поскольку мы не рассматриваем корни $G_- = 0$ (ср. с (24)), то уравнение (29) запишется в форме

$$H^2 L + \Gamma = 0. \tag{32}$$

Если $p = 1/3$, то, как следует из (31), $\Gamma = 0$, поэтому в пуассоновом случае дисперсионное уравнение существенно упрощается (см. [2], формула (18)):

$$192x^8 - \frac{64}{3}t(4t-9)x^6 + \frac{8}{9}(16t^3 - 72t^2 + 72t - 9)x^4 - \frac{1}{243}(256t^4 - 1728t^3 +$$

$$+3456t^2 - 2376t + 243)x^2 + \frac{4}{2178}t^4(2t-9)(2t-3)^3 = 0.$$

После подстановки

$$x^2 = y + s^2, \ t = 4s/(1+p) \tag{33}$$

уравнение (32) преобразуется к виду

$$(1+p)^4 y^6 + 8p(1+p)^2(2+p)sy^5 + 2p^2[8(p^2+6p+6)s - (1+p)^2]sy^4 +$$

$$+\frac{4p^3}{1+p}[4(9p+17)s + (1+p)(2p-3)]s^2y^3 + \frac{8p^4}{(1+p)^2}[8(p+6)s - (1-p)(3-p)]s^3y^2 +$$

$$+\frac{16p^5}{(1+p)^4}[16(1+p)s - (1-p)^2]s^4 y + \frac{64p^6}{(1+p)^4}s^6 = 0. \tag{34}$$

Этот многочлен и подлежит исследованию. Мы будет рассматривать его как функцию от y; величины s (преобразованная частота) и p (преобразованный модуль Пуассона) входят в это выражение как параметры. Интересно, что (34) является, в сущности, полиномом также и относительно этих величин. Множество корней этого уравнения содержит все корни дисперсионного уравнения (18) и, кроме того, корни, возникающие из-за двух возведений дисперсионного уравнения в квадрат. Иначе говоря, корни (34) принадлежат 4 листам поверхности Римана, которые определяются следующими условиями:

а) $\mathrm{Re}\sqrt{W_+} > 0, \ \mathrm{Re}\sqrt{W_-} > 0$ – лист (++),

б) $\mathrm{Re}\sqrt{W_+} > 0, \ \mathrm{Re}\sqrt{W_-} \leqslant 0$ – лист (+–),

в) $\mathrm{Re}\sqrt{W_+} \leqslant 0, \ \mathrm{Re}\sqrt{W_-} > 0$ – лист (– +)

г) $\mathrm{Re}\sqrt{W_+} \leqslant 0, \ \mathrm{Re}\sqrt{W_-} \leqslant 0$ – лист (– –)

Поскольку дисперсия волн Рэлея описывается только корнями, лежащими на физическом листе (++), необходимо выделить эти корни среди всех корней уравнения (34).

ДИСПЕРСИЯ ВОЛН РЭЛЕЯ

Положим

$$y = s\upsilon, \tag{35}$$

тогда из (34) следует

$$M^2 s - 2p^2\upsilon((1+p)^2\upsilon + 2p)((1+p)^2\upsilon + 2p(1-p))^2 = 0, \tag{36}$$

где

$$M = 8p^3 + (1+p)\upsilon((1+p)\upsilon + 4p)((1+p)^2\upsilon + 4p).$$

Отсюда

$$s=2p^2\upsilon((1+p)^2\upsilon+2p)((1+p)^2\upsilon+2p(1-p))^2/M^2, \tag{37}$$

и с учетом (33), (35) находим

$$x^2=s(s+\upsilon)=2p^2\upsilon^2(1+p)(1+p)\ \upsilon+2p)^2((1+p)^2\upsilon+2p)((1+p)^2\upsilon+2p(1-p))^2Z/M^4,$$

где

$$Z=(1+p)^5\upsilon^4+4p(1+p)^3(3+p)\upsilon^3-4p^2(1+p)(p^2-6p-11)\upsilon^2+$$
$$+2p^2(p^3-5p^2+27p+1)\upsilon+4(1+p)p^3.$$

Поэтому

$$x=p|\upsilon((1+p)\upsilon+2p)((1+p)^2\upsilon+2p(1-p)|\sqrt{2(1+p)((1+p)^2\upsilon+2p)Z/M^2}. \tag{38}$$

Подставим (33), (35) в выражения (20):

$$\begin{aligned} S_\pm&=-\frac{(1+3p)\upsilon+p}{2p}s\mp\frac{x}{2},\\ T_\pm&=-\frac{(1+p)\upsilon+p}{p}s\mp x,\\ U_\pm&=\frac{\upsilon+p(2+p)}{p^2}s\pm x+\frac{1}{2},\\ W_\pm&=-\frac{(1+p)\upsilon+p(3-p)}{p(1+p)}s\pm x+\frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{39}$$

Поскольку $s(\upsilon)$ задано выражением (37), а $x(\upsilon)$ – формулой (38), то выражение для $W_\pm$ из (39) перепишется в виде

$$W_\pm=[(1+p)M^2-8p\upsilon((1+p)\upsilon+p(3-p))((1+p)^2\upsilon+2p)((1+p)^2\upsilon+2p(1-p))^2\pm$$
$$\pm4p(1+p)\times$$
$$\times|\upsilon((1+p)\upsilon+2p)((1+p)^2\upsilon+2p(1-p))|\sqrt{2(1+p)((1+p)^2\upsilon+2p)Z}]/(4(1+p)M^2).$$

Можно проверить, что числитель этого выражения является полным квадратом и, следовательно,

$$W_\pm=[2p\sqrt{2((1+p)^2\upsilon+2p)Z}\pm$$
$$\pm(1+p)^{3/2}|\upsilon((1+p)\upsilon+2p)((1+p)^2\upsilon+2p(1-p)|]^2/(4(1+p)M^2), \tag{40}$$

откуда получаем

$$W_+W_-=N^2/(4(1+p)M^2)^2, \tag{41}$$

где

$$N=(1+p)^9\upsilon^6+8p(1-p)(1+p)^7\upsilon^5+8p^2(1+p)^5(3+p)(1-5p)\upsilon^4+32p^3(1+p)^3(p^3-$$
$$-9p^2-17p+1)\upsilon^3+128p^5(1+p)(p^2-6p-9)\upsilon^2-64p^5(p^3-p^2+15p+1)\upsilon-64p^6(1+p).$$

При $p = 1/3$ выражение (41) может быть представлено в форме

$$W_+W_- = \left[\frac{\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)\left(\upsilon+\frac{3}{4}\right)\left(\upsilon^2-\frac{3}{4}\upsilon-\frac{3}{8}\right)}{4\left(\upsilon^2+\frac{3}{2}\upsilon+\frac{3}{8}\right)^2}\right]^2,$$

что совпадает с [2, формула (29)].

Коэффициенты (27) исходного дисперсионного уравнения (25) с учетом (37)–(39) запишутся в виде

$$T_\pm U_\pm - S_\pm = \left[1+\frac{1}{p^3}((1+p)\upsilon+p)((1+p)\upsilon+p(2-p))\right]s^2 \mp \frac{1}{p^2}[(1+p)^2\upsilon+2p]sx+2s\upsilon \pm x,$$

$$S_+U_- - S_-U_+ = \left[\frac{(3p^2+2p+1)\upsilon+2p}{p^2}s-\frac{1}{2}\right]x. \tag{42}$$

После подстановки в (25) коэффициентов $S_\pm$, $T_\pm$ и $U_\pm$ из (39), а также выражений (40)–(42) дисперсионное уравнение может быть исследовано по аналогии с пуассоновым случаем, что позволяет установить соответствие между листами поверхности Римана и интервалами изменения параметра υ. Остановимся только на изучении свойств дисперсионной кривой на физическом листе.

В силу (17), (33) и (35) дисперсионная кривая на физическом листе выражается в параметрическом виде следующим образом:

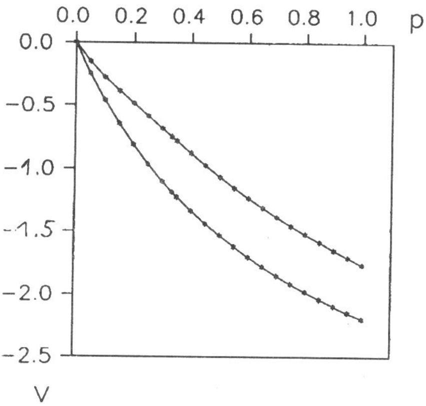
$$\frac{\omega^2}{R^2b^2} = t = \frac{4s}{1+p} = \frac{8p^2\upsilon}{(1+p)}\frac{((1+p)^2\upsilon+2p)((1+p)^2\upsilon+2p(1-p))^2}{[8p^3+(1+p)\upsilon((1+p)\upsilon+4p)((1+p)^2\upsilon+4p)]^2},$$

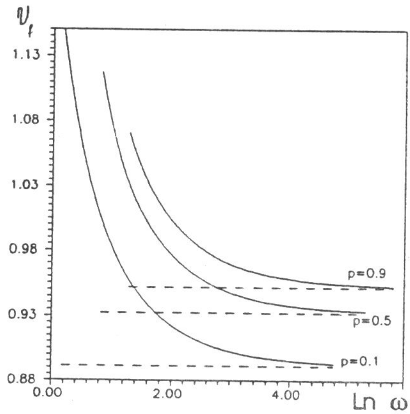
$$\frac{\xi^2}{R^2} = \zeta^2 = -\frac{s\upsilon}{p} = -\frac{2p\upsilon^2((1+p)^2\upsilon+2p)((1+p)^2\upsilon+2p(1-p))^2}{[8p^3+(1+p)\upsilon((1+p)\upsilon+4p)((1+p)^2\upsilon+4p)]^2}. \tag{43}$$

Интервалы изменения параметра υ, соответствующие физическому листу при различных значениях p, приведены в табл. и представлены на рисунке 1. Левые части выражений (43) монотонно возрастают с убыванием параметра υ. На нижней границе $\upsilon_l(p)$ полосы на рис. 1 и частота ω, и волновое число ξ обращаются в бесконечность. Верхней границе $\upsilon_u(p)$ соответствует частота отсечки в том смысле, что при меньших частотах волны Рэлея отсутствуют.

Интервалы изменения параметра υ на листе (++) поверхности Римана

p	$\upsilon_u(p)$	$\upsilon_l(p)$	p	$\upsilon_u(p)$	$\upsilon_l(p)$
0	0	0	0.50	–1.0632	–1.5332
0.05	–0.1478	–0.2442	0.55	–1.1494	–1.6210
0.10	–0.2730	–0.4576	0.60	–1.2316	–1.7025
0.15	–0.3833	–0.6460	0.65	–1.3099	–1.7782
0.20	–0.4855	–0.8136	0.70	–1.3843	–1.8490
0.25	–0.5849	–0.9640	0.75	–1.4552	–1.9151
0.30	–0.6841	–1.0996	0.80	–1.5227	–1.9772
1/3	–0.75	–1.1830	0.85	–1.5869	–2.0356
0.35	–0.7827	–1.2228	0.90	–1.6480	–2.0905
0.40	–0.8794	–1.3352	0.95	–1.7063	–2.1424
0.45	–0.9732	–1.4383	1	–1.7620	–2.1915





Р и с. 1. Интервалы изменения параметра υ на физическом листе поверхности Римана при различных значениях $p = \lambda/(\lambda + 2\mu)$

Р и с. 2. Фазовые скорости для сред Зволинского и соответствующие асимптоты при $p = 0.1$, 0.5 и 0.9 Частота отложена в логарифмическом масштабе

На рис. 2 приведены фазовые скорости в среде Зволинского при $p = 0.1$, 0.5 и 0.9. Видно, что как и в пуассоновом случае ($p = 1/3$) с возрастанием частоты каждая кривая стремится к горизонтальной асимптоте

$$V = \frac{\omega}{\xi} = 2\sqrt{\frac{p}{(1+p)\upsilon_l(p)}}b,$$

соответствующей фазовой скорости волн Рэлея в однородном полупространстве с упругими константами λ_0, μ_0 и ρ_0 такими, что

$$b = \sqrt{\mu_0 / \rho_0}, \quad p = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + 2\mu_0}.$$

В заключение мы выражаем глубоку признательность проф. Э. Найленду за полезные замечания при обсуждении статьи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Выражения, входящие в (28).

$$J = -(1+p)^4(3-p)(1+3p)t^2 - 4p(1+p)(3p^4 - 16p^3 - 6p^2 - 24p - 5)t +$$

$$+8[2(1+p)^2(3-p)(1+3p)x^2 - 2p(1+p)(3-p)(3p^2 + 2p + 1)x -$$

$$-p(1-3p)(2p^4 + 3p^3 - 9p^2 - p + 1].$$

$$\Theta = -\frac{8p^2(1-3p)}{1+p}[(1+p)^5(p^5 - 7p^4 + 16p^3 + 2p^2 + 11p + 1)t^3 + (1+p)^4(16(2p^3 - 2p^2 +$$

$$+p+1)x + (1+p)(2p^5 - 23p^4 + 44p^3 - 20p^2 - 10p - 1))t^2 + 2(1+p)(8(1+p)^2(3-p)(p^4 -$$

$$-4p^3 - 4p^2 - 2p + 1)x^2 + 4(1-p)(1+p)(36p^4 - 13p^3 + 3p^2 - 11p + 1)x - (1-p)(20p^7 -$$

$$-111p^6 + 104p^5 - 145p^4 + 124p^3 - 17p^2 - 8p + 1))t - 8(1-p)(2(2+p)^3(3-p)(2p^3 + p^2 +$$

$$+2p - 1)x^2 - (1+p)(1-3p)(27p^4 - 34p^3 + 2p^2 - 2p - 1)x -$$

$$-p(1-p)(1-3p)^2(2p^4 + 3p^3 - 9p^2 - p + 1))].$$

$K=(1+p)^8(3-p)^3t^4-16p(1+p)^5(3-p)(5+p)t^3-16(1+p)^3(2(1+p)^3(3-p)^2x^2+$
$+p(3p^4-26p^3-102p-3))t^2+32p(1+p)(3(3-p)(1+p)^2(5+p)x^2+p(9p^6+42p^5-$
$-101p^4-148p^3+93p^2-166p+1))t+128(2(1+p)^4(3-p)^2x^4-2p(1+p)^2(3-p)(3p^2+$
$+12p+1)x^2+p^2(1+p)(3-p)^2(1+3p)(1+3p^2)x-p^2(1-3p)^2\times$
$\times(p^5-6p^4+6p^3-9p^2+11p+1)).$

$\Pi=-\dfrac{64p^3(1-3p)}{1+p}[2(1+p)^7(5p^2-6p+5)t^4-(1+p)^6(8(5p^2-6p+5)x+3p^6-34p^5+$
$+131p^4-264p^3-189p^2-86p-3)t^3-(1+p)^3(16(1+p)^2(25p^3-39p^2+19p+3)x-6p^9+$
$+77p^8-316p^7+508p^6-732p^5+1050p^4-940p^3+340p^2-118p+9)t^2-4(1+p)(4(1+$
$+p)^2(3-p)^2(3p^5-13p^4-8p^3-4p^2+5p+1)x^2+2(1-p)(1+p)(163p^5+205p^4-290p^3+$
$+106p^2-65p+9)x-(1-p)(1-3p)(10p^8-54p^7+134p^6+39p^5-245p^4 272p^3-140p^2+$
$+15p+1))t-16(1-p)(1-3p)((1+p)^3(3-p)^2(1+2p)(1+p^2)x^2+(1+p)(26p^5+$
$+67p^4-148p^3+54p^2-14p-1)x+p(1-p)(1-3p)^2(p^5-6p^4+6p^3-9p^2+11p+1)).$

Коэффициенты в (30).

$l_0=(1+p)^{16}(3-p)^4t^8-32p(1+p)^{13}(3-p)^3(5+p)t^7-16(1+p)^{10}(3-p)^2(9p^6-$
$-24p^5-87p^4+24p^3-213p^2-544p+3)t^6-128p^2(1+p)^8(3-p)(18p^7-29p^6-76p^5-$
$-555p^4-206p^3+717p^2-1624p+27)t^5+64p^2(1+p)^6(243p^{10}-2358p^9+2943p^8+$
$+11912p^7-7946p^6+9388p^5+42470p^4-66840p^3+42647p^2-2790p+27)t^4+2^{11}p^3\times$
$\times(1-p)(1+p)^4(1-3p)(81p^8-336p^7-666p^6-888p^5-1016p^4+816p^3-2230p^2+$
$+664p-9)t^3+2^{11}p^3(1-p)(1+p)^2(1-3p)^2(81p^9-999p^8-496p^7-8p^6+1146p^5-$
$-3006p^4+5080p^3-2256p^2+205p-3)t^2-2^{13}p^4(1-p)^2(1+p)(1-3p)^4(108p^5-$
$-105p^4+204p^3-382p^2+224p-1)t+2^{12}*5p^4(1-p)^4(1-3p)^8,$

$l_2=64(1+p)^2(3-p)[-(1+p)^{12}(3-p)^3t^6+24p(1+p)^9(3-p)^2(5+p)t^5+4p(1+$
$+p)^6(3-p)(27p^6-72p^5-197p^4+88p^3-415p^2-1104p+9)t^4-64p^2(1+p)^4(18p^7-$
$-29p^6-16p^5-523p^4+42p^3+589p^3-1004p+27)t^3+32p^2(1+p)^2(243p^9-1341p^8-$
$-648p^7+1912p^6-2594p^5-3554p^4+10544p^3-5328p^2+519p-9)t^2-512p^3(1-p)(1+$
$+p)(1-3p)^2 27p^5-17p^4+80p^3 164p^2+93p-3)t+512p^3(1-p)^3(1-3p)^6],$

$l_4=512(1+p)^4(3-p)^2[3(1+p)^8(3-p)^2t^4-48p(1+p)^5(3-p)(5+p)t^3-8p(1+$
$+p)^2(27p^6-72p^5-133p^4+104p^3-191p^2-576p+9)t^2-64p^2(1+p)(18p^5+7p^4+112\times$
$\times p^3-246p^2+134p-9)t+96p^2(1-p)^2(1-3p)^4],$

$$l_6 = 2^{14}(1+p)^6(3-p)^3[-(1+p)^4(3-p)t^2 + 8p(1+p)(5+p)t + 4p(1-p)(1-3p)^2],$$

$$l_8 = 2^{16}(1+p)^8(3-p)^4,$$

а коэффициенты из (31) задаются формулами

$$\gamma_0 = -4p(1+p)^{14}(3-p)(5p^2-6p+5)t^7 - (1+p)^{10}(48p^9+364p^8-2171p^7+4255p^6- -7199p^5+8603p^4-6209p^3+3053p^2-917p+45)t^6 + (1-p)^2(1+p)^8(1296p^9+261p^8- -2824p^7+2460p^6+8264p^5-2337p^4+27144p^3-10564p^2+552p+117)t^5 + (1-p)^2\times \times(1+p)^6(1-3p)(3888p^{10}-6498p^9+30095p^8-49592p^7+89172p^6-89756p^5+ +37826p^4-1237p^3+6924p^2-2418p+135)t^4 + 2(1-p)^3(1+p)^4(1-3)^3(810p^9+ +1521p^8+5890p^7+1070p^6-3722p^5+12392p^4-15034p^3+5122p^2-616p-9)t^3 - (1+ +p)^2(1-p)^3(1-p)^5(243p^9+4419p^8-2488p^7+4848p^6-12026p^5+6222p^4+2512\times \times p^3-2936p^2-273p-9)t^2 - 8p(1-p)^4(1+p)(1-3p)^7(198p^5-255p^4+184p^3-242p^2+ +154p+9)t + 20p(1-p)^6(1-3p)^{11},$$

$$\gamma_2 = 16(1+p)^2(3-p)[4p(1+p)^{10}(5p^2-6p+5)t^5 + (1-p)(1+p)^6(48p^7+555p^6- -411p^5+1307p^4-1174p^3+874p^2-319p^3+566p^2-188p+45)t^4 - (1-p)^2(1+p)^5(1- -3p)(432p^6+839p^5-909p^4+2166p^3-1434p^2+243p+39)t^3 + (1-p)^2(1-3p)^3(2p^2- -p+1)(216p^5+123p^4+132p^3-566p^2+188p-45)t^2 + 2(1-p)^3(1+p)(1-3)^5(90p^5- -103p^4+122p^3-204p^2+124p+3)t - 3(1-p)^5(1-3p)^9].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зволинский Н.В.* Волны Рэлея в неоднородном упругом полупространстве частного типа // Изв. АН СССР, Серия географ и геофиз. 1945. Т. IX, № 3. С. 261–278.
2. *Маркушевич В.М., Найленд Э., Цемахман А.С.* Дисперсия волн Рэлея в средах Зволинского. Пуассонов случай // Проблемы прогноза землетрясений и интерпретация сейсмологических данных. М.: Наука, 1991. С. 224–237. (Вычисл. сейсмология; вып. 25).
3. *Pekeris C.L.* The propagation of Rayleigh waves in heterogeneous media // Physics. 1935. Vol. 6. P. 133–138.
4. *Маркушевич В.М., Цемахман А.С.* *D*-постоянные среды и рэлеевские волны в них на характерных частотах. I. Пуассоновы среды // Современные методы интерпретации сейсмологических данных. М.: Наука. 1 991. С. 149–157 (Вычисл. сейсмология, вып. 24).
5. *Петрашень Г.И.* Основы математической теории распространения упругих волн // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. XVIII. Л.: Наука, 1978. С. 3–248.
6. *Wolfram S.* Mathematica. A system for doing mathematics by computer. N.Y.: Addison-Wesley, 1988. 747 p.
7. *Keillis-Borok V.I., Neigauz M.G., Shkadinskaya G.V.* Application of the theory of eigenfunctions to the calculations of surface wave velocities // Rev. Geophys. 1965. Vol 1, N 1. P. 105–109.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987. 247 с.