

УДК 550.311

ТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ МАНТИЙНОЙ КОНВЕКЦИИ С ДВИЖУЩИМИСЯ КОНТИНЕНТАМИ

В.В. Рыков, В.П. Трубицын

Объединенный институт физики Земли Российской академии наук

Представлена новая методика и результаты численного моделирования трехмерных вязких течений в мантии с учетом взаимодействия с плавающими континентами. Моделирование проводится в прямоугольной области с соотношением сторон $3 \times 3 \times 1$. Мантия рассматривается как вязкая нагреваемая снизу несжимаемая жидкость. Континенты состоят из тонкой теплопроводящей коры и толстой высоковязкой литосферы. Механическое и тепловое взаимодействие мантии с континентальной литосферой учитывается автоматически схемой сквозного счета, используемой во всей области интегрирования. На верхней границе области вне континентов задаются условия непротекания и проскальзывания, а на подошве бесконечно тонкой коры – условия непротекания и прилипания. Проведен численный эксперимент, иллюстрирующий соединение двух континентов в суперконтинент типа Пангеи с последующим распадом. В качестве исходного состояния было взято линейное распределение температуры с небольшим искусственным возмущением с амплитудой в 10% и пространственным распределением, соответствующим порогу конвективной неустойчивости. Безразмерное число Рэлея принято равным 10^5 . Континенты были помещены по разные стороны от центрального нисходящего мантийного потока. Под действием мантийных течений континенты начали дрейфовать и объединились над этим потоком в единый суперконтинент. Благодаря эффекту теплового экранирования на месте первичного нисходящего мантийного потока под суперконтинентом возник восходящий поток. Этот поток раздвинул континенты с их левой стороны, но они оказались частично сцепленными, образуя конфигурацию, подобную Северной и Южной Америке. С правой стороны континентов возник глобальный пояс зон субдукции (типа Западно-Тихоокеанского), который со временем оказался погребенным под надвигающимися в сторону океана континентами. Экстраполяция результатов численного эксперимента, проведенного при числе Рэлея 10^5 , на более высокое число порядка 10^8 , соответствующее условиям общемантийной конвекции, дает время полного цикла Вильсона порядка 1 млрд лет.

3-D MODEL OF MANTLE CONVECTION WITH MOVING CONTINENTS

V. V. Rykov and V. P. Trubitsyn

United Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences

We present a new numerical approach for modeling three-dimensional mantle flows with moving continents. Flows are modeled in a square $3 \times 3 \times 1$ region. The mantle is considered as a viscous incompressible fluid heated from below. Continents consist of a thin heat-conducting crust and a lithospheric region of high viscosity. The numerical algorithm

was applied to the square region and allowed for the thermomechanical interaction of the mantle and continents. Impenetrability and free-slip conditions were given at the upper boundary exterior to continents. Impenetrability and no-slip conditions were prescribed at the bottom of the crust. A numerical analysis illustrated the aggregation of two continents into a supercontinent of Pangaea type and its subsequent breakup. A linear temperature distribution with a small artificial perturbation was taken as the initial condition. The perturbation structure was similar to the onset of thermal convection. The Rayleigh number 10^5 was assumed. The two continents were initially placed at the opposite sides of the central downwelling mantle stream. Due to the mantle flow, the continents approached one another and aggregated into a supercontinent. This resulted in heating of the mantle under the supercontinent due to reduction in heat loss across it. Hence an upwelling stream developed in place of the former downwelling stream. The continents diverged from the left and remained partially converged from the right, thus forming a configuration of the North and South America type. A global subduction of the West Pacific type developed to the right of the continents. With time, this belt was buried under continents pulled to the ocean. The numerical results for $Ra = 10^5$ were extrapolated to the higher value of 10^8 for the whole mantle convection. The relevant cycle time so obtained for continental drift was of order 1 billion years.

ВВЕДЕНИЕ

Еще в 1922 году Вегенер выдвинул гипотезу о том, что континенты движутся, объединяются в суперконтиненты, которые впоследствии снова распадаются, и опять объединяются. Многочисленные геологические и палеомагнитные реконструкции подтверждают эту гипотезу и дают значения времен между последующими формированиями суперконтинентов типа Пангеи порядка 0.8 млрд. лет. Но до сих пор до конца не ясен физический механизм распада суперконтинентов и недостаточно полно исследовано взаимодействие мантийной конвекции с движущимися континентами.

Численное исследование структуры тепловой конвекции в мантии Земли на двумерных и трехмерных моделях интенсивно ведется уже на протяжении последних двух-трех десятилетий (см., например, [1-6]).

На двумерных моделях в работе [2] впервые было показано, что учет зависимости вязкости мантии от температуры и давления не только уточняет расчет мантийной конвекции, но и самосогласованно описывает структуру океанических плит и их взаимодействие с мантийными течениями. В работе [4] дан анализ влияния сжимаемости и неньютоновской реологии на структуру мантийных течений. В работе [5] на основе численного трехмерного моделирования исследована устойчивость различных структур мантийной конвекции с переменной вязкостью. В работе [6] на основе анализа осесимметричной сферической модели показано, что учет фазового перехода на границе 670 км приводит к нестационарной конвекции в мантии с чередующимися в пространстве и времени конвективными ячейками, охватывающими или всю мантию или отдельно верхнюю и нижнюю мантию.

В работах [7, 8] впервые построена двумерная численная самосогласованная модель мантийной конвекции с движущимися континентами и показана принципиальная возможность глобальной реорганизации структуры мантийных течений при перемещении континентов, а также возможность объединения и распада континентов. В работе [9] отмечалось, что двумерная модель без учета внутренних

тепловых источников может давать завышенные времена эволюции, отличающиеся от палеогеологических данных.

В работах [10, 11] на двумерной модели с твердыми теплопроводными плавающими континентами рассчитаны эволюция распада суперконтинента и изменения структуры мантийной конвекции. Было обнаружено, что между раздвигающимися континентами возникают структуры типа Атлантического океана, а на фронте перемещающихся континентов образуются структуры Тихоокеанского типа. При этом на поздней стадии распада (примерно соответствующей современной эпохе) между надвигающимся континентом и нисходящим (субдукционным) мантийным потоком возникают зоны, напоминающие окраинные моря. Они соответствуют локальным максимумам в распределении глобального теплового потока. После экстраполяции характерных времен эволюции на числа Рэлея до 10^7 для общемантийной конвекции получено удовлетворительное согласие с палеогеологическими данными.

Однако двумерная модель не учитывает эффекты вращения континентов и в принципе не может воспроизвести пространственные геодинамические структуры земной поверхности.

В работе [12] была построена первая трехмерная самосогласованная модель мантийной конвекции с постоянной вязкостью, подогревом снизу и изнутри движущимися континентами. Континенты моделировались в виде бесконечно тонких жестких пластин, которые могли перемещаться вдоль поверхности вязкой жидкости. Механическое взаимодействие континентов с мантией учитывалось заданием условия прилипания к движущемуся континенту, а тепловое взаимодействие приблизительно учитывалось заданием условия полного экранирования (нулевого теплового потока на подошве континента). Для верхнемантийной конвекции (при эффективном числе Рэлея $Ra = 10^5$) по этой модели время жизни континента Пангея оказалось равным примерно 150 млн лет, а полное время схождения континентов, реорганизации структуры мантийных течений и расхождения континентов – порядка 300 млн лет. Для общемантийной конвекции при том же числе Рэлея эти времена соответствовали 1.35 и 2.7 млрд лет. Как известно, для верхней мантии $Ra = 10^6$, а для всей мантии $Ra = 10^7$. После экстраполяции на эти числа Рэлея указанные выше времена оказались соответственно равными 70 и 140 млн лет для верхней мантии и 300 и 600 млн лет для всей мантии. Таким образом, рассмотренный механизм распада суперконтинентов дает реальные времена эволюции. Но вычисленные значения температуры непосредственно под континентом (на глубинах до 200 км) оказались слишком высокими, что обусловлено принятым в работе грубым приближением полного теплоэкранирования континентами.

В настоящей работе предлагается более точная модель для описания континентов. Каждый континент состоит из тонкой теплопроводящей коры и толстой вязковязкой литосферы. Континенты могут произвольным образом перемещаться вдоль поверхности вязкой мантии, не проникая друг в друга. Вязкая континентальная литосфера перемещается как целое вместе с твердой корой. Механическое и тепловое взаимодействие мантии с континентальной литосферой учитывается автоматически схемой сквозного счета, используемой во всей области интегрирования. На верхней границе области вне континентов задаются условия непротекания и проскальзывания, а на подошве бесконечно тонкой движущейся коры –

условия непротекания и прилипания. На всей верхней границе (на поверхности океанов и континентов) задается нулевая температура, а распределение теплового потока рассчитывается.

Кроме того, в настоящей работе впервые приводится описание оригинального численного метода и разностной схемы для трехмерной тепловой конвекции с переменной вязкостью и движущимися континентами; переменными в этой схеме являются скорость, давление и температура.

УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ

Система уравнений тепловой конвекции включает в себя уравнение Стокса движения вязкой жидкости, уравнение переноса тепла и уравнение неразрывности:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j} - \text{Ra}(1 - \alpha T)g\delta_{i3}, \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(v_j T)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) &= Q, \\ \frac{\partial v_j}{\partial x_j} &= 0, \quad s_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где s_{ij} – девиатор тензора вязких напряжений; p – давление; T – температура; v_i – декартовы компоненты скорости; α – коэффициент теплового расширения; g – ускорение силы тяжести; k – коэффициент теплопроводности; ρ – постоянная плотность; Q – термометрическая плотность тепловых источников; μ – коэффициент динамической вязкости; δ_{i3} – символ Кронекера. Для расчетов использована правая система координат (x, y, z) с началом в левом нижнем ближнем углу. Предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

Исходная система уравнений численно интегрируется в прямоугольной области с помощью метода конечных разностей.

Используются следующие граничные условия. На нижней границе области задается фиксированная температура $T = T_0$. На всей верхней границе (включая поверхность континентов) задается условие $T = 0$. На всех боковых границах области задаются условия равенства нулю теплового потока. Все границы предполагаются непротекаемыми, а также скользкими везде, за исключением областей подошвы коры континентов, где задаются условия прилипания к движущемуся континенту.

Вводятся следующие безразмерные переменные, помеченные штрихом:

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (x', y', z')D, & t &= t' D^2 / k_0, \\ (u, v, w) &= (u', v', w')k_0 / D, & Q &= Q' D^2 / (T_0 k_0), \\ T &= T' T_0, & p &= p' (\mu_0 k_0) / D^2, \\ \mu &= \mu' \mu_0, & s &= s' (\mu_0 k_0) / D^2, \\ k &= k' k_0, \end{aligned} \quad (2)$$

здесь D – толщина мантии; T_0 – температура на нижней границе; μ_0 – коэффициент динамической вязкости мантии при $T = 0$; k_0 – коэффициент теплопроводности мантии при $T = 0$.

В этих безразмерных переменных система уравнений тепловой конвекции имеет вид

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j} + \text{Ra} T \delta_{i3}, \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(v_j T)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) &= Q, \\ \frac{\partial v_j}{\partial x_j} &= 0, \quad s_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\text{Ra} = \alpha \rho g D^3 T_0 / (k_0 \mu_0)$ – число Рэлея; p – давление, отсчитываемое относительно гидростатически равновесного распределения. У всех безразмерных переменных опущен штрих.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ КОНТИНЕНТОВ

В рассматриваемой модели каждый континент представляется в виде бесконечно тонкой твердой пластины (коры), под которой находится область повышенной вязкости (континентальная литосфера), перемещающаяся вместе с корой. Будем рассматривать кору как систему бесконечно малых жестко связанных между собой треугольных элементов с массами m_l . Согласно уравнениям Эйлера для твердого тела в каждый момент времени скорость любого элемента коры (u_l, v_l) может быть представлена в виде суммы скоростей поступательного движения центра масс (u_0, v_0) и вращательного движения относительно этого центра с угловой скоростью ω_0 :

$$\begin{aligned} u_l &= u_0 - \omega_0 (y_l - y_0), & v_l &= v_0 + \omega_0 (x_l - x_0), \\ u_0 &= \frac{1}{m} \sum_l (u_l m_l), & v_0 &= \frac{1}{m} \sum_l (v_l m_l), & m &= \sum_l m_l, \end{aligned} \quad (4)$$

где (x_0, y_0) – координаты центра масс континента; m – масса всего континента; (x_l, y_l) – координаты элемента; m_l – его масса.

Уравнения движения для каждого свободно перемещающегося континента (без взаимодействия с другими континентами) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} m \frac{\partial u_0}{\partial t} &= - \sum_l (s_l \mu_l \frac{\partial u}{\partial z} |_l), \\ m \frac{\partial v_0}{\partial t} &= - \sum_l (s_l \mu_l \frac{\partial v}{\partial z} |_l), \\ I \frac{\partial \omega_0}{\partial t} &= - \sum_l s_l \mu_l \left[(y_l - y_0) \frac{\partial u}{\partial z} |_l - (x_l - x_0) \frac{\partial v}{\partial z} |_l \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где $I = \sum_l m_l ((x_l - x_0)^2 + (y_l - y_0)^2)$ – момент инерции континента; s_l – площадь поверхности элемента.

В нашей модели твердые континенты не должны проникать друг в друга. Поэтому при возникновении взаимопроникания континентов в правую часть уравнений (5) добавляется эффективная расталкивающая сила, которая рассчитывается с помощью специальной итеративной процедуры.

Описание численного метода и разностной схемы приводится в Приложении.

ПРОЦЕДУРА УЧЕТА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МАНТИЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ С КОНТИНЕНТАМИ

Мантия вне континентов моделируется жидкостью с постоянной вязкостью, находящейся в прямоугольной области с размерами $(3 \times 3 \times 1)$. В мантию помещаются два плавающих континента, состоящих из тонкой теплопроводящей твердой коры и высоковязкой литосферы с заданной толщиной. Форма континентов выбрана произвольно, схематически она подобна протоконтинентам Лавразии и Гондваны. Нагрев мантии снизу учитывается заданием фиксированной безразмерной температуры $T = 1$ на нижней границе области.

На всей верхней границе континентов и океанов температура принята равной нулю. На всех границах расчетной области используются условия проскальзывания, кроме подошвы коры, которая прилипает к вязкой континентальной литосфере. В результате на каждом временном шаге задача сводится сначала к расчету тепловой конвекции в прямоугольной области с неоднородными механическими граничными условиями, которые определяются мгновенным положением континентов, и скачком вязкости при переходе в область континентов. Затем по рассчитанному распределению скоростей в вязкой континентальной литосфере согласно уравнениям Эйлера для движения твердого тела находится мгновенная скорость центра тяжести и угловая скорость твердой коры (прилипающей к вязкой литосфере). На следующем временном шаге процедура повторяется, но уже при новом положении континентов, смещенных и повернутых в соответствии с ранее найденной скоростью. При этом каждый раз вязкая континентальная литосфера смещается вместе с твердой корой.

Такая процедура полностью исключает "размытие" континентов, обусловленное ложной диффузией, неизбежно возникающей при численном счете с конечным шагом сетки. Но при этом мы пренебрегаем и реальным "размытием" вязких континентов, которое при рассматриваемом перепаде вязкости на два порядка и в относительно небольшом интервале времени является небольшим.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Численный эксперимент проводился при следующих значениях параметров. Толщина континентов принималась равной 0.1 от толщины мантии, а их вязкость – в 100 раз большей вязкости мантии.

Расчеты проводились в прямоугольном параллелепипеде $X \times Y \times Z = 3 \times 3 \times 1$ на сетке $20 \times 20 \times 10$ с нагревом только снизу (без внутренних источников тепла) при числе Рэлея $Ra_0 = 10^5$.

В качестве начального состояния при $t_1 = 0$ было взято линейное распределение температуры с небольшим возмущением (10% по амплитуде)

$$\begin{aligned}
 T(x, y, z, t = 0) &= (1 - z)(1 - 0.1f(x, y)), \\
 f(x, y) &= [\sin(\pi(x + y)/3) \sin(\pi(x - y)/3)]^2 - \\
 &\quad - [\sin(\pi(x + y)/3 - \pi/2) \sin(\pi(x - y)/3 - \pi/2)]^2.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

В этот же начальный момент $t_1 = 0$ в мантию помещались два континента.

Целью работы является изучение механизма объединения континентов в суперконтинент и его распада подобно истории Пангеи. Поэтому форма и размеры континентов выбирались схематически подобными протоконтинентам Лавразии и Гондване. Начальное положение континентов взято таким образом, чтобы они находились вблизи и по разные стороны от холодной центральной области, где после развития тепловой конвекции должен возникнуть нисходящий мантийный поток. Далее решались уравнения тепловой конвекции при $Ra = 10^5$ совместно с уравнениями движения континентов и в последовательные моменты времени рассчитывалась структура мантийных течений и положение континентов.

На приведенных ниже рисунках представлены результаты расчета рассматриваемой модели эволюции мантийных течений и истории дрейфа континентов. Горизонтальные разрезы мантии сделаны при $z = 0.9$, что соответствует глубине $h = 1 - z = 0.1D$, равной 300 км для общемантийной модели. Вертикальные разрезы даны для среднего сечения при $x = 1.5$. Распределение безразмерной температуры представлено изотонами. Светлые места соответствуют высокой температуре, темные – низкой. Темной линией также показаны контуры континентов. Поскольку при численном счете скачок вязкости на два порядка на границе континент–мантия размазывается, то торцы и подошва высоковязких континентов оконтурены темной линией, соответствующей перепаду вязкости в 10 раз. Абсолютно твердая тонкая кора изображена (в увеличенном по вертикали масштабе) зачерненной областью, выступающей над уровнем верхней границы мантии.

Кроме изотонов температуры и положения континентов, на рисунках также приведены распределения векторов мгновенных безразмерных скоростей мантийных течений, изображенных стрелками. В верхней части рисунков (б) приведены также вычисленные распределения глобального безразмерного теплового потока.

На рис. 1 показано начальное распределение безразмерной температуры в мантии и начальное расположение континентов.

На рис. 2–7 представлена рассчитанная структура мантийной конвекции и положение континентов в различные моменты эволюции объединения и расхождения континентов. Как видно из рис. 2, б к моменту безразмерного времени $t_2 = 0.033$ в мантии развилась тепловая конвекция с центральным нисходящим мантийным потоком, к которому начали стягиваться континенты. Максимальные безразмерные скорости мантийных течений на поверхности океанов достигают величины порядка 200. Скорости континентов оказываются на порядок меньшими. Мантийный тепловой поток, выходящий через континенты, оказывается, примерно, в 8 раз меньшим максимального теплового потока, выносимого восходящими мантийными течениями в океанических областях.

В момент времени $t_3 = 0.0496$ (см. рис. 3) континенты коснулись друг друга левыми краями. Благодаря эффекту теплоэкранирования под континентами мантия прогрелась и в центре, вместо нисходящего, возник восходящий мантийный поток.

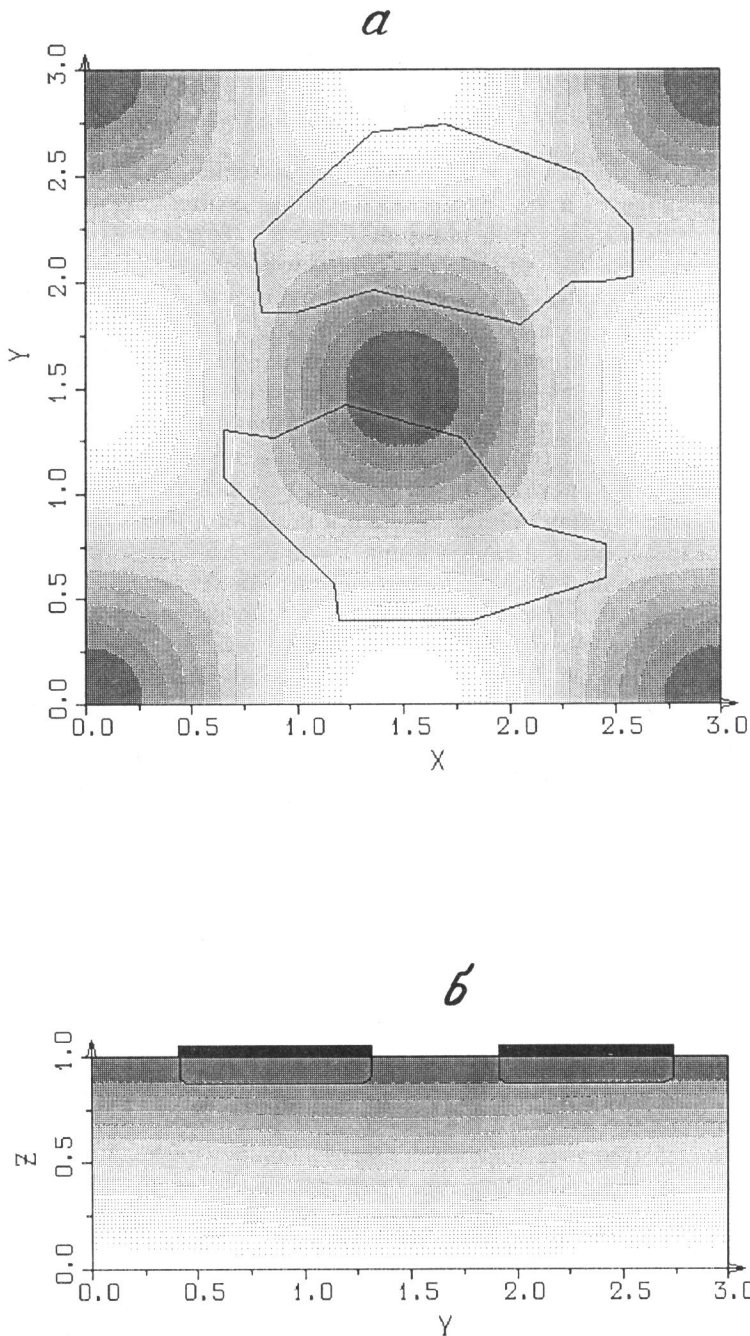


Рис. 1. Начальное распределение температуры в мантии и начальное расположение континентов ($t_1 = 0$). Показаны 14 градаций температуры: от минимальной T_{\min} (самые темные области) до максимальной T_{\max} (самые светлые области). Темной линией показаны контуры континентов

a – горизонтальный разрез при $z = 0.9$, $T_{\min} = 0.0966$, $T_{\max} = 0.1034$; *б* – вертикальный разрез при $x = 1.5$, $T_{\min} = 0.0858$, $T_{\max} = 0.0963$

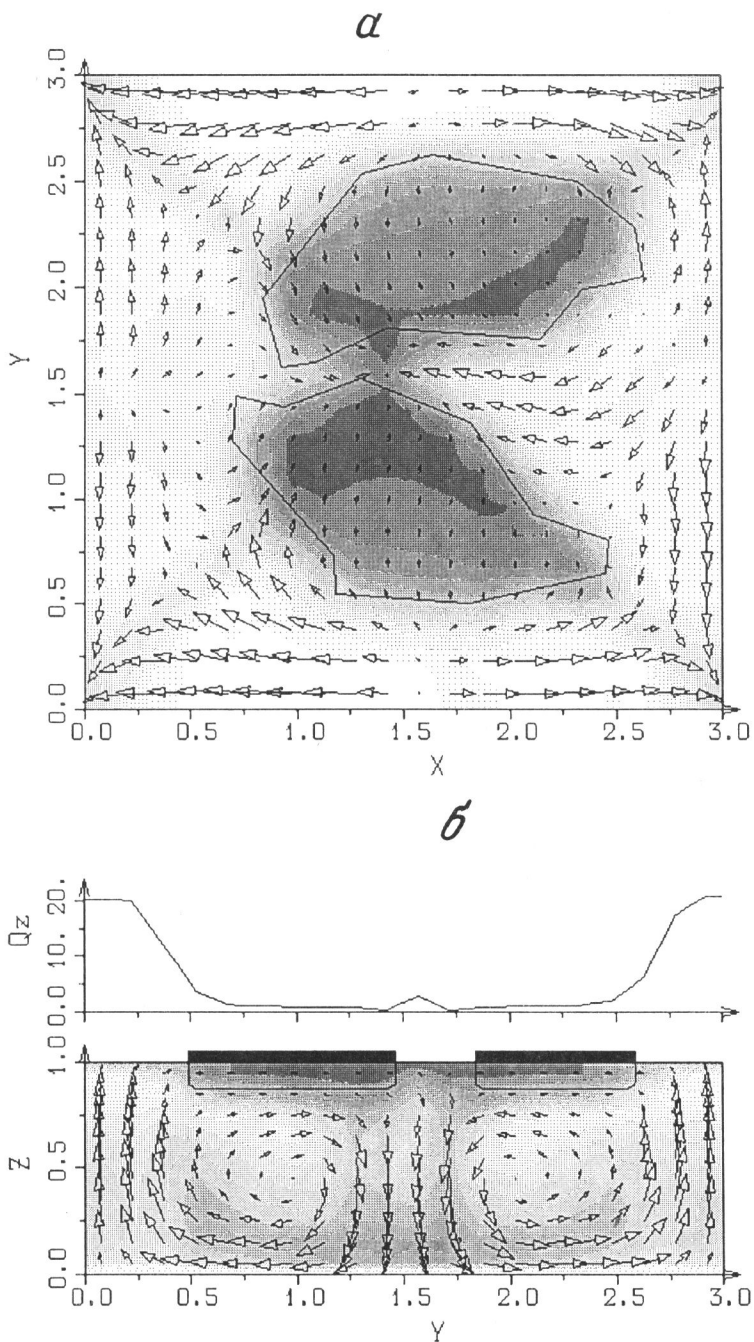


Рис. 2. Результаты расчета мантийной конвекции и положение континентов для момента безразмерного времени $t_2 = 0.0331$, соответствующего стадии сближения континентов

a – горизонтальный разрез при $z = 0.9$, $T_{\min} = 0.0735$, $T_{\max} = 0.806$; b – вертикальный разрез при $x = 1.5$, $T_{\min} = 0.0385$, $T_{\max} = 0.0962$. График Q_z – распределение мантийного теплового потока: $Q_{z\min} = 0.337$, $Q_{z\max} = 20.94$. Стрелками указаны векторы безразмерных скоростей мантийных течений, масштабная стрелка длиной 5 мм соответствует скоростям: $v_{up} = 209.7$ (a) и $v_{dn} = 284.2$ (b)

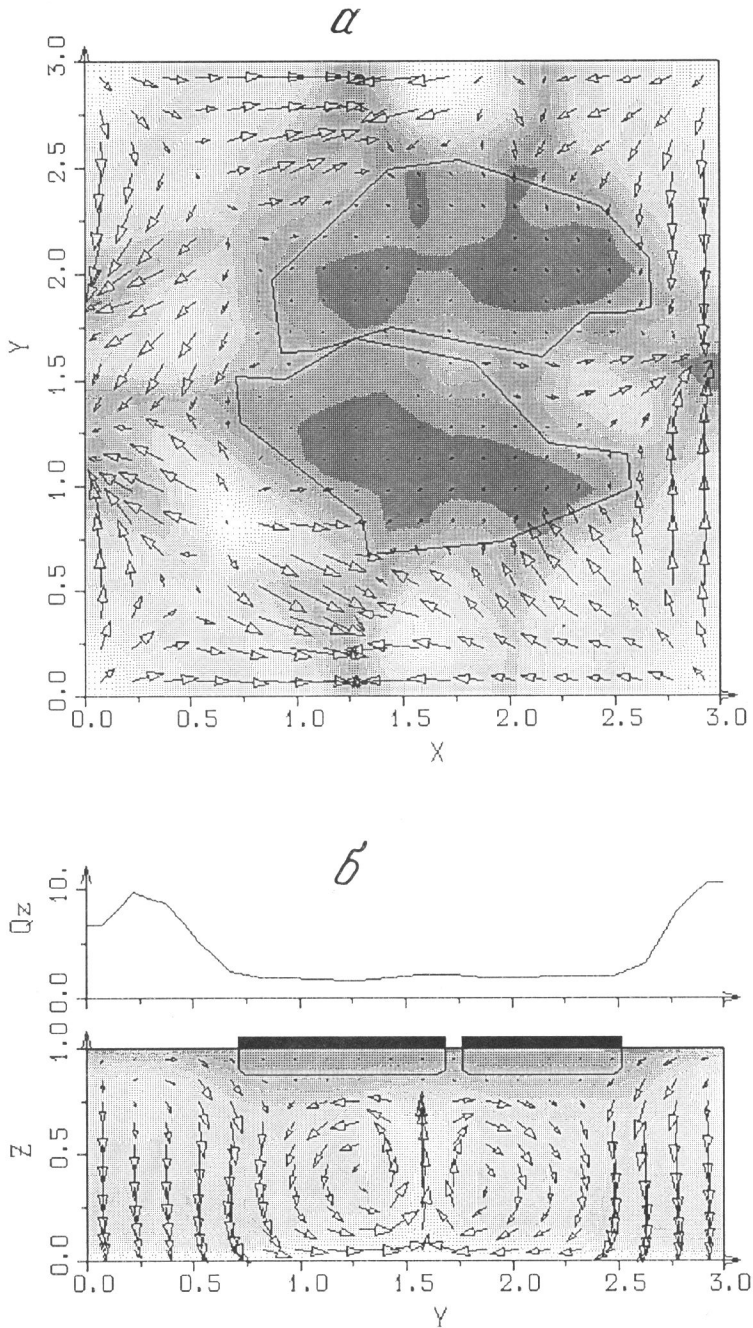


Рис. 3. То же, что на рис. 2, но для момента $t_3 = 0.0496$, соответствующего столкновению континентов и образованию Пангеи

$\alpha - T_{\min} = 0.158, T_{\max} = 0.703, v_{\text{up}} = 126.0$; $\beta - T_{\min} = 0.0385, T_{\max} = 0.962; Q_{z \min} = 1.582, Q_{z \max} = 10.6; v_{\text{dn}} = 131.6$

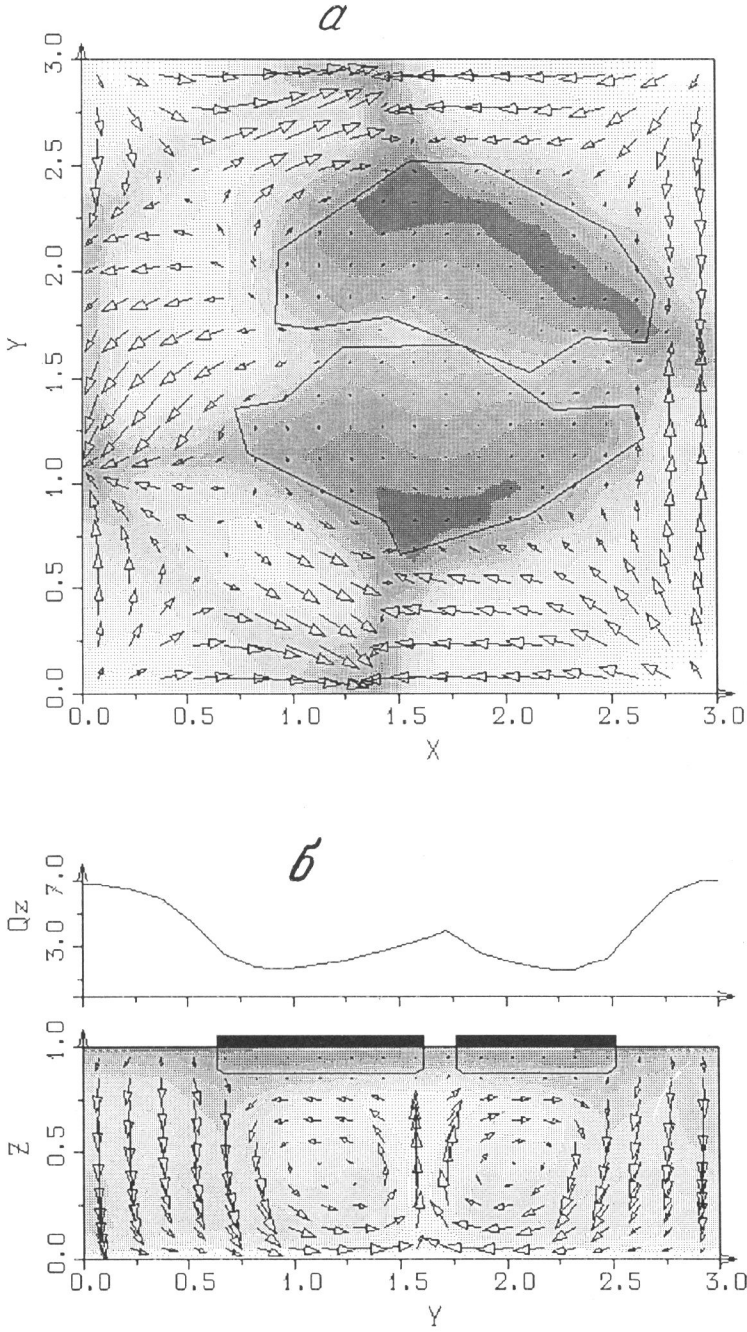


Рис. 4. То же, что на рис. 2, но для момента $t_4 = 0.0597$, соответствующего расколу Пангеи

$a - T_{\min} = 0.158, T_{\max} = 0.687, v_{\text{up}} = 190.2; b - T_{\min} = 0.0385, T_{\max} = 0.962; Q_{z \min} = 1.58, Q_{z \max} = 7.03; v_{\text{dn}} = 205.8$

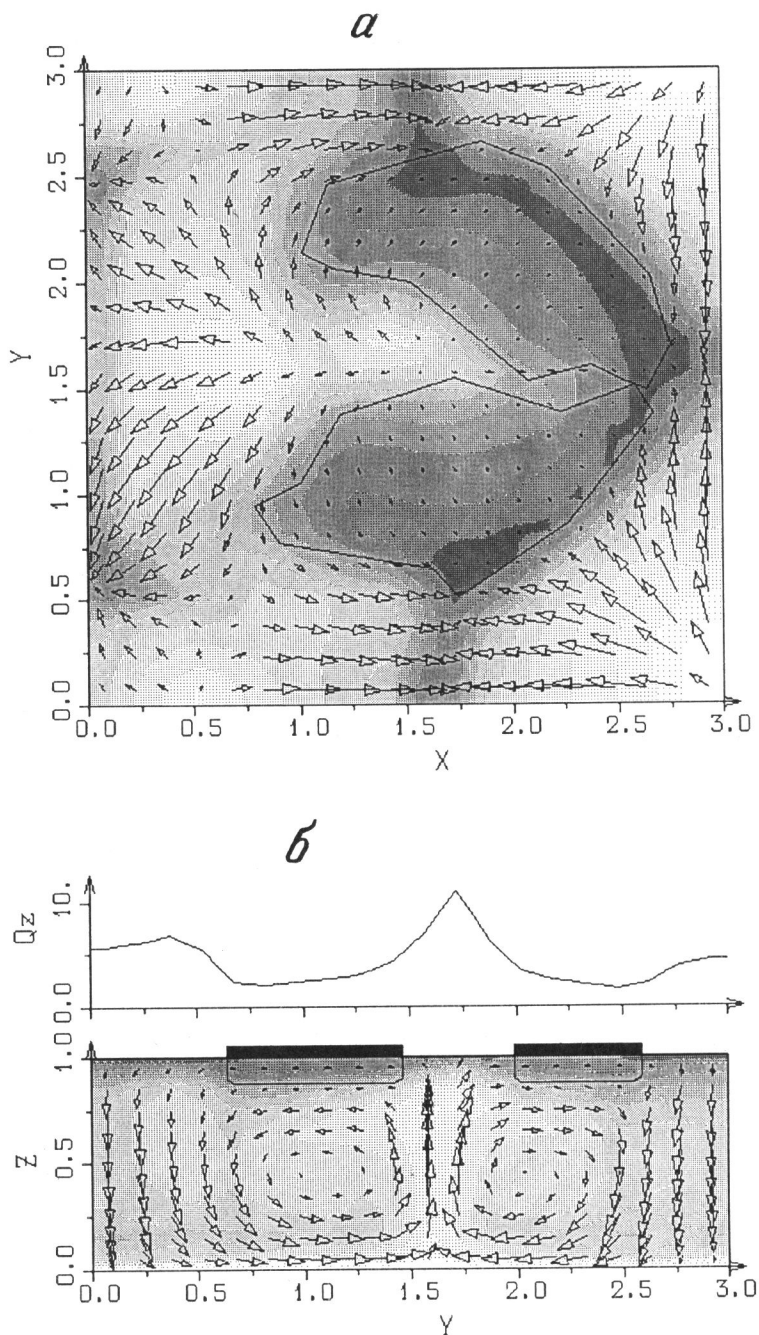


Рис. 5. То же, что на рис. 2, но для момента $t_5 = 0.0742$, условно соответствующего современной стадии раскрытия океанов и образования Тихоокеанского пояса зон субдукции

а - $T_{\min} = 0.151$, $T_{\max} = 0.776$, $v_{\text{up}} = 207.5$; б - $T_{\min} = 0.0385$, $T_{\max} = 0.962$; $Q_{z \min} = 1.68$, $Q_{z \max} = 11.05$; $v_{\text{dn}} = 190.3$

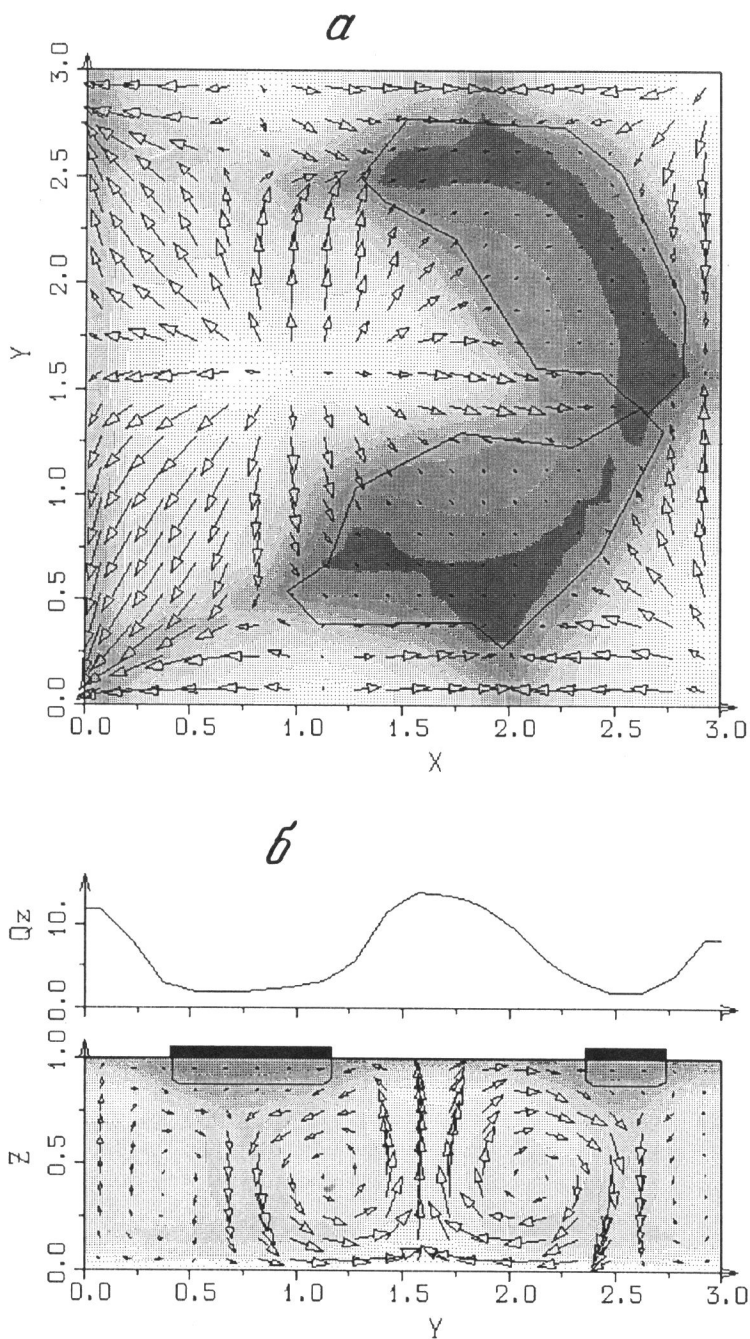


Рис. 6. То же, что на рис. 2, но для момента $t_6 = 0.0846$, соответствующего стадии покрытия зон субдукции надвигающимися континентами

a - $T_{\min} = 0.148$, $T_{\max} = 0.772$, $v_{\text{up}} = 178.3$; *b* - $T_{\min} = 0.0385$, $T_{\max} = 0.962$; $Q_{z \min} = 1.8$, $Q_{z \max} = 13.94$; $v_{\text{dn}} = 144.8$

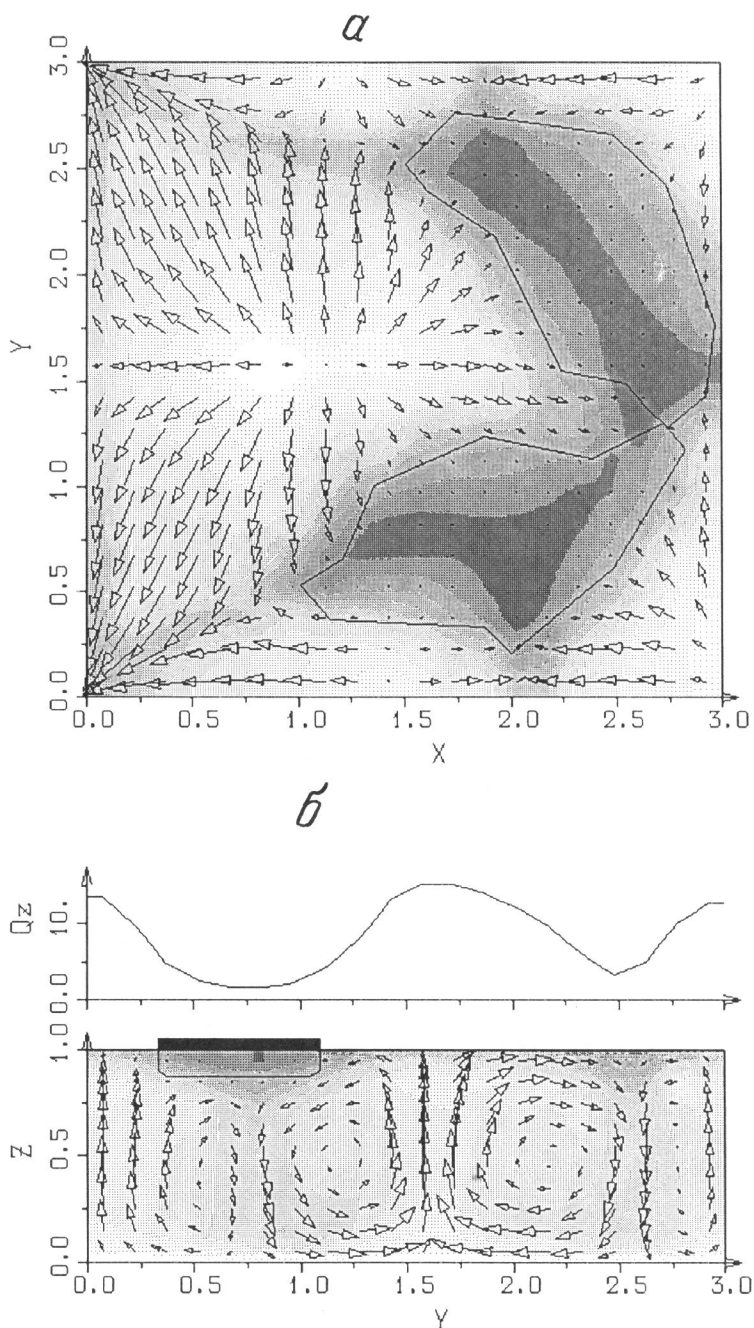


Рис. 7. То же, что на рис. 2, но для момента $t_7 = 0.1047$, соответствующего стадии существования нисходящих мантийных потоков под континентами без видимых зон субдукции

$a - T_{\min} = 0.142, T_{\max} = 0.749, v_{\text{up}} = 189.7$; $b - T_{\min} = 0.0385, T_{\max} = 0.9615; Q_{z \min} = 1.55, Q_{z \max} = 15.18; v_{\text{dn}} = 181.8$

К моменту времени $t_4 = 0.0597$ (см. рис. 4) континенты несколько повернулись, все еще продолжая образовывать единый суперконтинент типа Пангеи. В момент времени $t_5 = 0.0742$ континенты частично уже стали расходиться. Поскольку геометрический центр суперконтинента оказался несколько правее центрального восходящего мантийного потока, то суперконтинент раскололся с левой стороны. Как видно из рис. 1–4, первоначальный холодный нисходящий мантийный поток не полностью рассосался, а расщепился в основном на две части.

Момент времени $t_5 = 0.0742$ (см. рис. 5) можно условно сопоставить с современным состоянием тектоники плит после распада последней Пангеи. Как видно из рис. 5, а, в это время остатки первичного нисходящего потока образовали вытянутый по дуге пояс зон субдукции. Вещество океанической поверхности мантии с большой скоростью затягивается в эти зоны субдукции. Отметим, что в модели не учитывается зависимость вязкости мантии от температуры. Поэтому в модели явно не присутствуют океанические плиты, которые, как известно, являются областями мантии с повышенной вязкостью.

Рис. 6, 7 предсказывают возможную судьбу зон субдукции. Поскольку плавающие континенты постоянно затягиваются на места с нисходящим мантийным потоком, они надвигаются на зоны субдукции. Как следует из рис. 6 и 7, нисходящие мантийные потоки зон субдукции могут быть целиком покрыты континентами и практически не будут проявляться на поверхности.

Рассчитанная модель эволюции континентов при $Ra = 10^5$ дает следующие времена различных этапов: время схождения континентов $\tau_1 = t_2 = 0.033$, время жизни суперконтинента типа Пангеи $\tau_2 = t_3 - t_2 = 0.0496 - 0.0331 = 0.0165$, время расхождения континентов $\tau_3 = t_4 - t_3 = 0.0742 - 0.0496 = 0.0246$, время полного цикла $\tau_4 = t_4 = 0.0742$.

По современным оценкам, число Рэлея для общемантийной конвекции может достигать порядка 10^8 . Чтобы экстраполировать рассчитанные времена эволюции на более высокие числа Рэлея, можно воспользоваться зависимостью величины характерного времени установления тепловой конвекции от числа Рэлея, полученной в работе [13], $\tau = D^2 / (\pi k Nu)$, где Nu – число Нуссельта, пропорциональное $Ra^{1/3}$. Таким образом, для приближенного пересчета рассчитанных безразмерных времен эволюции на другие числа Рэлея можно использовать соотношение $\tau \sim Ra^{-1/3}$. Для общемантийной конвекции единица размерного времени составляет $t = D^2 / k = (3000 \text{ км})^2 / (2 \times 10^{-6} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}) = 150$ млрд лет. Принимая для всей мантии число Рэлея равным 10^8 , получим для времени схождения континентов значение $t \sim 0.5$ млрд лет, для жизни Пангеи ~ 0.2 млрд лет, для расхождения континентов ~ 0.3 млрд лет и для полного цикла ~ 1 млрд лет.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен численный эксперимент на самосогласованной трехмерной модели нагрываемой снизу вязкой жидкости с плавающими на ее поверхности высоковязкими плитами. Численное моделирование показывает, что уравнения сохранения импульса, энергии и массы имеют решения, описывающие ряд особенностей наблюдаемых явлений глобальной геодинамики. При тепловой конвекции в мантии возникают восходящие и нисходящие потоки вещества. Благодаря вязкому сцепле-

нию с мантией континенты дрейфуют и сходятся к месту ближайшего холодного нисходящего мантийного потока, образуя суперконтинент. Так как высоковязкая континентальная литосфера затрудняет конвективный вынос тепла из мантии, то вещество под суперконтинентом прогревается и становится легче. Первичный нисходящий мантийный поток ослабевает и расщепляется на части. Возникший под суперконтинентом горячий восходящий мантийный поток раскалывает его и раздвигает образовавшиеся вторичные континенты. Эти континенты опять затягиваются на области, ближайшие к нисходящим мантийным потокам. В результате остатки первичного нисходящего мантийного потока оказываются под окраинами надвигающихся континентов и могут образовывать дугообразные пояса зон субдукции. Впоследствии зоны субдукции могут покрываться надвигающимися континентами. Рассчитанные характерные времена эволюции модели в первом приближении согласуются с данными палеомагнитных и палеогеологических реконструкций.

Благодарности. Настоящее исследование проведено при поддержке Международного Научного Фонда (проект МРМ000) и Российского Фонда Фундаментальных Исследований (код проекта 93-05-8624).

ПРИЛОЖЕНИЕ. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Основная схема

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \hat{A}(\mathbf{V}) + \text{grad}(p) = \mathbf{f}, \\ \text{div}(\mathbf{V}) = 0, \end{cases} \quad (\text{П1})$$

где \hat{A} – линейный оператор $\hat{A}(\mathbf{V})|_i = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right]$; \mathbf{V} – вектор скорости; \mathbf{f} – произвольный постоянный вектор.

Для численного интегрирования системы уравнений (П1) воспользуемся следующей итерационной процедурой:

$$\hat{B} \left(\frac{\mathbf{V}^{k+1} - \mathbf{V}^k}{\varkappa^k} \right) + \hat{A}(\mathbf{V}^k) + \text{grad}(p^{k+1}) = \mathbf{f}. \quad (\text{П2})$$

Пусть $\hat{B} = -\mu \nabla^2$ (∇^2 – оператор Лапласа), $\mathbf{V}^{k+1} = \mathbf{V}^k + \varkappa^k \mathbf{W}^k$ (\varkappa^k – итерационный параметр). Тогда для \mathbf{W} получим

$$-\nabla^2(\mathbf{W}^k) = -\frac{1}{\mu} [\hat{A}(\mathbf{V}^k) + \text{grad}(p^{k+1}) - \mathbf{f}]. \quad (\text{П3})$$

Возьмем дивергенцию от обеих частей уравнения (П3). Тогда с учетом $\text{div}(\nabla^2(\mathbf{W})) = \nabla^2(\text{div}(\mathbf{W})) = 0$, получаем эллиптическое уравнение для p^{k+1} :

$$-\text{div} \left(\frac{1}{\mu} \text{grad}(p^{k+1}) \right) = \text{div} \left\{ \frac{1}{\mu} [\hat{A}(\mathbf{V}^k) - \mathbf{f}] \right\}.$$

Введем обозначение $p^{k+1} = p^k + p^*$, тогда

$$-\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{grad}(p^*)\right) = \operatorname{div}\left\{\frac{1}{\mu}[\hat{A}(\mathbf{V}^k) + \operatorname{grad}(p^k) - \mathbf{f}]\right\}. \quad (\text{П4})$$

Таким образом, процедура численного интегрирования исходной системы уравнений (П1) сводится к следующему. Сначала решается уравнение эллиптического типа (П4) для p^* и вычисляется значение функции p^{k+1} . Далее решается векторное уравнение Пуассона (П3) для \mathbf{W}^k . Для декартовых компонент скорости это уравнение расщепляется на три независимых скалярных уравнения относительно каждой из компонент. Итерационный параметр α^k можно определить из условия минимума нормы C :

$$C = \|\hat{A}(\mathbf{V}^{k+1}) + \operatorname{grad}(p^{k+1}) - \mathbf{f}\|.$$

Используя линейность оператора \hat{A} , с помощью стандартных дифференциальных процедур нахождения минимума функции получаем

$$\alpha^k = -\left(\hat{A}(\mathbf{W}^k), \hat{A}(\mathbf{V}^k) + \operatorname{grad}(p^{k+1}) - \mathbf{f}\right) / \left(\hat{A}(\mathbf{W}^k), \hat{A}(\mathbf{W}^k)\right),$$

где $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ – скалярное произведение векторов \mathbf{f}_1 и \mathbf{f}_2 .

Для вычисления \mathbf{V}^{k+1} может быть также использована более сложная трехслойная схема. Пусть

$$\mathbf{V}^{k+1} = \alpha_\alpha^k \mathbf{V}^{k-1} + (1 - \alpha_\alpha^k) \mathbf{V}^k + \alpha_\beta^k \mathbf{W}^k.$$

Тогда для итерационных параметров α_α^k и α_β^k из условия минимума нормы C получаем

$$\alpha_\alpha^k = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 0, \\ (bd - ce)/(ab - c^2) & \text{при } k > 0; \end{cases}$$

$$\alpha_\beta^k = (\alpha_\alpha^k c - e)/b;$$

где

$$a = \left(\hat{A}(\mathbf{V}^k - \mathbf{V}^{k-1}), \hat{A}(\mathbf{V}^k - \mathbf{V}^{k-1})\right),$$

$$b = \left(\hat{A}(\mathbf{W}^k), \hat{A}(\mathbf{W}^k)\right),$$

$$c = \left(\hat{A}(\mathbf{W}^k), \hat{A}(\mathbf{V}^k - \mathbf{V}^{k-1})\right),$$

$$d = \left(\hat{A}(\mathbf{V}^k - \mathbf{V}^{k-1}), \hat{A}(\mathbf{V}^k) + \operatorname{grad}(p^{k+1}) - \mathbf{f}\right),$$

$$e = \left(\hat{A}(\mathbf{W}^k), \hat{A}(\mathbf{V}^k) + \operatorname{grad}(p^{k+1}) - \mathbf{f}\right).$$

Граничные условия для давления

Для решения эллиптического уравнения (П4) необходимо знать граничные условия для приращения давления p^* . При расчетах на всех границах были использованы однородные граничные условия Неймана $\partial p^* / \partial N_{\mathbf{G}} = 0$, где N – нормаль к границе \mathbf{G} . В этом случае после решения векторного уравнения Пуассона (П3), дивергенция вектора скорости оказывается равной нулю при любых граничных условиях для скорости. Кроме того, указанные граничные условия для приращения давления соответствуют исходной системе уравнений, так как после схождения итерационного процесса $p^* = 0$ [14].

Описание численного метода

Метод численного интегрирования исходной системы уравнений (1) состоит из шести основных этапов. Пусть в некоторый момент времени $t = t^n$ нам известны все параметры поля течения (давление, температура, скорость). На первом этапе решается уравнение тепловой конвекции и рассчитывается поле температур на следующем временном слое $t^{n+1} = t^n + \tau$, где τ – шаг по времени:

$$\left\{ T^{n+1} - \tau \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial}{\partial x_j} (T^{n+1}) \right) \right\}_h = \tilde{T}^n,$$

$$\tilde{T}^n = \left\{ T^n - \tau \frac{\partial}{\partial x_j} (v_j^n T^n) + \tau Q \right\}_h,$$

где $\{ \}_h$ – конечно-разностная аппроксимация соответствующего дифференциального оператора; верхний индекс n (или $n+1$) – номер временного слоя. Конечно-разностная аппроксимация осуществляется на разнесенной сетке, т.е. давление и температура определяются в центрах ячеек, а компоненты вектора скорости – в центрах соответствующих граней.

Далее для определения скорости на верхнем временном слое строится итерационный процесс, включающий в себя еще четыре этапа. В случае граничных условий проскальзывания на всех границах для скорости и постоянной вязкости точное решение получается за одну итерацию. При переменной вязкости количество итераций зависит от величины градиента коэффициента вязкости и может достигать нескольких десятков. Итерационный процесс продолжается до достижения заданного критерия на норму невязки.

На втором этапе рассчитывается вспомогательный вектор u_i^k

$$u_i^k = \frac{1}{\mu^{n+1}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} (s_{ij}^{n+1,k}) - \frac{\partial}{\partial x_i} (p^{n+1,k}) + \text{Ra} T^{n+1} \delta_{i3} \right\}_h.$$

В качестве нулевого приближения используются значения функций на текущем временном слое:

$$s_{ij}^{n+1,0} = s_{ij}^n, \quad p^{n+1,0} = p^n.$$

На третьем этапе решается эллиптическое уравнение для давления

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\mu^{n+1}} \frac{\partial p^{*,k}}{\partial x_j} \right) \right\}_h = \left\{ \frac{\partial u_j^k}{\partial x_j} \right\}_h,$$

$$p^{n+1,k+1} = p^{n+1,k} + p^{*,k}.$$

На четвертом этапе решаются три скалярных уравнения Пуассона для трех компонент поправки к вектору скорости w_i ($i = 1, 2, 3$)

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial w_i^k}{\partial x_j} \right) \right\}_h = \left\{ u_i^k - \frac{1}{\mu^{n+1}} \frac{\partial p^{*,k}}{\partial x_j} \right\}_h.$$

Используя граничные условия для скорости и давления, можно показать, что векторное поле поправки к скорости w_i удовлетворяет условию неразрывности

$$\{\partial w_i / \partial x_i\}_h = 0.$$

На пятом этапе рассчитываются значения $(k+1)$ -го приближения для компонент вектора скорости на следующем временном слое :

$$v_i^{n+1,k+1} = \alpha_\alpha^k v_i^{n+1,k} + (1 - \alpha_\alpha^k) v_i^{n+1,k-1} + \alpha_\beta^k w,$$

где α_α^k и α_β^k - итерационные параметры, которые рассчитываются из условия минимума нормы невязки C :

$$C = \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} s_{ij}^{n+1,k+1} - \frac{\partial}{\partial x_i} p^{n+1,k+1} + \text{Ra} T^{n+1} \delta_{i3} \right\|.$$

На последней, шестой стадии рассчитывается новое положение континентов на новом временном слое.

Конечно-разностная схема

Рассмотрим более подробно некоторые этапы. На первом этапе определяется поле температур для следующего временного слоя. Сначала решается уравнение конвективного переноса тепла без учета теплопроводности. Для конечно-разностной аппроксимации используется четырехточечная ориентированная вверх по потоку разностная схема [14]. В точке (i, j, k) имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{i,j,k}^n = & T_{i,j,k}^n - \frac{\tau}{h_x} \left\{ u_{i+\frac{1}{2},j,k} T_{i+\frac{1}{2},j,k}^n - u_{i-\frac{1}{2},j,k} T_{i-\frac{1}{2},j,k}^n \right\} - \\ & - \frac{\tau}{h_y} \left\{ v_{i,j+\frac{1}{2},k} T_{i,j+\frac{1}{2},k}^n - v_{i,j-\frac{1}{2},k} T_{i,j-\frac{1}{2},k}^n \right\} - \\ & - \frac{\tau}{h_z} \left\{ w_{i,j,k+\frac{1}{2}} T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n - w_{i,j,k-\frac{1}{2}} T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n \right\}. \end{aligned}$$

Здесь τ - шаг по времени; h_x , h_y и h_z - шаги сетки в соответствующих направлениях; (u, v, w) - декартовы компоненты вектора скорости. На границах ячеек выбирается следующая аппроксимация для температуры: например, в точке $(i + \frac{1}{2}, j, k)$ имеем (индексы j и k для простоты опущены)

$$T_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} (1 - \alpha^2) T_i + \frac{1}{2} \alpha [(1 + \alpha) T_{i+1} - (1 - \alpha) T_{i-1}], & \text{если } u_{i+\frac{1}{2}} \geq 0, \\ (1 - \alpha^2) T_{i+1} + \frac{1}{2} \alpha [(1 + \alpha) T_i - (1 - \alpha) T_{i+2}], & \text{если } u_{i+\frac{1}{2}} < 0, \end{cases}$$

где $\alpha = 0.5(1 - \tau |u_{i+\frac{1}{2},j,k}| / h_x)$.

Далее на первом этапе решается эллиптическое уравнение для температуры

$$\hat{A}(T^{n+1}) = \tilde{T}^n,$$

где $\hat{A} = (\hat{E} - \tau \nabla^2)$; \hat{E} - единичный оператор; ∇^2 - оператор Лапласа. Для решения этого уравнения используется попеременно-треугольный метод в трехслойной модификации с выбором итерационных параметров по методу сопряженных градиентов [15]:

$$T^{n+1,k+1} = T^{n+1,k} + \alpha_\alpha^k (T^{n+1,k} - T^{n+1,k-1}) + \alpha_\beta^k T^*.$$

Здесь k - номер итерации; α_α и α_β - итерационные параметры; T^* - поправка к температуре, которая определяется из уравнения

$$(\hat{E} + \omega \hat{B}_1)(\hat{E} + \omega \hat{B}_2)T^* = \hat{A}(T^{n+1,k}) - \tilde{T}^n,$$

где \hat{B}_1 и \hat{B}_2 – верхний и нижний треугольные операторы, ω – итерационный параметр, численное значение которого определяется значениями шага по времени τ и шагов сетки по пространству h_x , h_y и h_z . Значения итерационных параметров α^k и β^k определяются из условия минимума нормы невязки C_T :

$$C_T = \|\hat{A}(T^{n+1,k}) - \tilde{T}^n\|,$$

$$\alpha^k = \begin{cases} 0, & \text{если } k = 0, \\ (bd - ce)/(ab - c^2), & \text{если } k > 0; \end{cases}$$

$$\beta^k = (\alpha^k c - e)/b;$$

где

$$a = \left(\hat{A}(T^{n+1,k} - T^{n+1,k-1}), \hat{A}(T^{n+1,k} - T^{n+1,k-1}) \right),$$

$$b = \left(\hat{A}(T^*), \hat{A}(T^*) \right),$$

$$c = \left(\hat{A}(T^*), \hat{A}(T^{n+1,k} - T^{n+1,k-1}) \right),$$

$$d = \left(\hat{A}(T^{n+1,k} - T^{n+1,k-1}), \hat{A}(\tilde{T}^n) \right),$$

$$e = \left(\hat{A}(T^*), \hat{A}(\tilde{T}^n) \right).$$

Итерационный процесс завершается, если норма невязки C_T становится меньше некоторого наперед заданного значения.

На втором и четвертом этапах для решения эллиптических уравнений также используется попеременно-треугольный метод в трехслойной модификации с выбором итерационных параметров по методу сопряженных градиентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Turcotte D.L., Schubert G.* Geodynamics. 1982. John Wiley & Sons. N.-Y.: Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore. 560 p.
2. *Jacoby W.R., Schmeling H.* On the effects of the lithosphere on mantle convection and evolution // *Phys. Earth Planet. Inter.* 1982. Vol.29. P.305–319.
3. *Machetel Ph., Rabinowicz M., Berndet P.* Three-dimensional convection in spherical shells // *Geoph. Astrophys. Fluid. Dyn.* 1986. Vol.37. P.57–84.
4. *Schmeling H.* Compressible convection with constant and variable viscosity // *J. Geophys. Res.* 1989. Vol.94. P.12463–12461.
5. *Christensen U., Harder H.* 3-D convection with variable viscosity // *Geophys. J. Inter.* 1991. Vol.104. P.213–226.
6. *Machetel P., Weber P.* Intermittent layered convection in a model with endothermic phase change at 670 km // *Nature.* 1991. Vol.350. P.55–57.
7. *Gurnis M.* Large-scale mantle convection and the aggregation and dispersal of supercontinents // *Nature.* 1988. Vol.332. P.695–699.
8. *Zhong S., Gurnis M.* Dynamic feedback between a continentlike raft and thermal convection // *J. Geophys. Res.* 1993. Vol.98, No. B7. P.12219–122329.

9. *Tabbert A., Spohn T.* On the thermal coupling between continents and mantle convection // Abstr. EGS. Wiesbaden: 1991.
10. *Трубицын В.П., Бобров А.М.* Эволюция структуры мантийной конвекции после раскола суперконтинента // Физика Земли. 1993. N 9. С.27–37.
11. *Трубицын В.П., Бобров А.М.* Механическое и тепловое взаимодействие континентов с мантией // Наст. сборник. С.3–20.
12. *Рыков В.В., Трубицын В.П.* Численное моделирование мантийной конвекции и тектоники континентальных плит // Геодинамика и прогноз землетрясений. М.: Наука, 1994. С.94–102. (Вычисл. сейсмология; Вып. 26).
13. *Trubitsyn V.P., Nikolaichik V.V., Jacoby W.* A study of hydrothermal convection in a saturated porous media // Tectonophysics. 1993. Vol.217. P.73–89.
14. *Рыков В.В.* Численное моделирование пространственных нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1985. N 5. С.789–793.
15. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.