

УДК 550.311

РЕОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАНТИИ ЗЕМЛИ И ПЛАНЕТ ЗЕМНОЙ ГРУППЫ

Б.И. Биргер

Объединенный институт физики Земли Российской академии наук

В теоретической геофизике для описания медленных течений в мантии используется реологическая модель степенной неньютоновской жидкости. Однако степенная жидкость, в отличие от реального материала, не обладает памятью. Поэтому данная модель может применяться только при рассмотрении стационарных течений, связанных с постоянными во времени напряжениями. В настоящем исследовании предлагается новая нелинейная интегральная (имеющая память) реологическая модель мантии. Эта модель находится в соответствии с теорией простых жидкостей с затухающей памятью и с результатами лабораторного исследования ползучести горных пород при высоких температурах и давлениях, характерных для мантии.

RHEOLOGICAL MODEL OF THE EARTH'S AND THE TERRESTRIAL PLANETS' MANTLES

B. I. Birger

United Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences

In theoretical geophysics, a power-law non-Newtonian fluid is usually applied to model slow flows in the mantle. However, the power-law fluid has no memory in contrast with a real material. Therefore, this model is relevant only to stationary flows where stresses are constant in time. In the present study, a new nonlinear integral (having a memory) model is proposed to describe the rheology of the mantle. The model is consistent with the theory of simple fluids with fading memory and the results of laboratory studies of rock creep at high temperatures and pressures approximating mantle conditions.

ВВЕДЕНИЕ

Чтобы математически описать геофизический процесс, связанный с течениями в мантии, необходимо к основным уравнениям механики сплошной среды, следующим из законов сохранения, добавить реологическое уравнение, устанавливающее связь между напряжениями, деформациями и временем. Другими словами, следует ввести реологическую модель мантии, описывающую течение материала при характерном для мантии высоком уровне температур и давлений. Выбор неадекватной реологической модели приводит к качественно неверному описанию процесса. Например, в [1] показано, к каким заметным различиям приводит рассмотрение конвекции в мантии в рамках модели вязкой ньютоновской жидкости и в рамках модели степенной неньютоновской жидкости. К еще большим качественным

отличиям от случая, когда используется модель ньютоновской жидкости, приводит рассмотрение конвективной неустойчивости мантии в рамках реологической модели Андраде [2]. В среде Андраде конвективная неустойчивость имеет колебательный характер. Возникающие термоконвективные колебания мантии были предложены для объяснения известных в геологии медленных вертикальных колебаний земной коры с периодами порядка 10–100 миллионов лет [2].

Целью настоящей работы является построение реологической модели мантии, согласующейся как с представлениями современной реологической теории, так и с результатами лабораторных исследований ползучести геоматериалов, проводимых при высоких температурах и давлениях, характерных для мантии. Работа преследует и более конкретную цель – предложить дополнительные (к приведенным ранее в работах [3, 4]) аргументы в пользу применимости модели Андраде и получить ограничения на характеристики исследуемых процессов, при выполнении которых использование модели Андраде является законным. Важно оговорить, что в настоящей работе под ползучестью понимается течение материала при постоянном напряжении, приложенном в некий фиксированный момент времени, хотя некоторые исследователи под ползучестью понимают любое медленное течение; в частности, говорят о ползучести при переменном напряжении и отождествляют закон ползучести с реологическим уравнением.

В геофизической литературе рассматривается большое количество микромеханизмов ползучести [5, 6], но с точки зрения механики сплошной среды используются только две реологические модели, уже упомянутые выше: вязкая ньютоновская жидкость (к этой модели приводит микромеханизм, связанный с диффузией вакансий в кристаллической решетке) и степенная неньютоновская жидкость (к этой модели ведут различные микромеханизмы, связанные с движением дислокаций). Обе реологические модели не обладают памятью (точнее, имеют бесконечно короткую память) в отличие от реального материала. С другой стороны, в механике сплошной среды широко используются различные реологические модели, имеющие память. Эти модели построены для того, чтобы описать поведение материалов при переменных во времени напряжениях. В геофизике же известны только эксперименты для анализа ползучести геоматериалов. Результаты этих экспериментов хорошо объясняются в рамках модели степенной жидкости. Но отсюда не следует, что данную модель можно использовать в случае переменных напряжений. Другими словами, то, что степенная жидкость является хорошей моделью ползучести, не означает, что степенная жидкость представляет собой адекватную реологическую модель геоматериала.

Почему изучение микромеханизмов ползучести не приводит к рассмотрению памяти материала? Именно потому, что исследуется только ползучесть, т.е. случай постоянных напряжений. Действительно, при дислокационной ползучести скорость деформации пропорциональна напряжению и обратно пропорциональна квадрату среднего расстояния между дислокациями. Считая, что расстояние между дислокациями обратно пропорционально напряжению, сразу приходим к характерной для геоматериалов кубической зависимости скорости деформации от напряжения, т.е. к модели степенной (кубической) жидкости. Однако в случае переменных напряжений уже нельзя считать, что среднее расстояние между дислокациями определяется текущим значением напряжения; скорее это расстояние зависит от

предыстории напряжения. Таким образом, понятие памяти возникает и при рассмотрении дислокационного реологического микромеханизма.

В разд. 1 работы приводятся основные положения теории простых жидкостей, в разд. 2 – кратко излагаются известные в геофизике экспериментальные результаты, полученные при исследовании ползучести образцов горных пород. В этих разделах формулируются требования к реологической модели. В разд. 3 предлагается новая реологическая модель мантии, удовлетворяющая этим требованиям. В разд. 4 в рамках предлагаемой модели рассматривается реология периодических течений. В разд. 5 новая модель сравнивается с реологической моделью мантии, предложенной автором ранее. Наконец, в разд. 6 вводится универсальная реологическая модель мантии, учитывающая упругость и вязкость, обусловленную диффузионным микромеханизмом.

1. ПРОСТЫЕ ЖИДКОСТИ С ЗАТУХАЮЩЕЙ ПАМЯТЬЮ

В современной механике сплошной среды основополагающей реологической теорией является теория простых жидкостей с затухающей памятью [7, 8]. В основе этой теории лежат следующие принципы: принцип детерминизма (напряжение в текущий момент времени зависит от прошлых (предыстория), но не от будущих деформаций); принцип локальности (напряжение в данной точке пространства определяется предысторией деформации в бесконечно малой окрестности материальной точки, которая в момент наблюдения находится в данной точке пространства); принцип отсутствия естественного состояния (этот принцип отличает жидкость от твердого тела и делает естественным отсчет деформаций от состояния в момент наблюдения); принципа затухающей памяти (текущее напряжение слабее зависит от деформаций в отдаленном прошлом, чем от деформаций в недавнем прошлом).

Для простой жидкости с затухающей памятью реологическое уравнение записывается в виде

$$\sigma_{ij}(x_i, t) = \int_{s=0}^{s=\infty} F [\varepsilon_{ij}(t-s)], \quad (1)$$

где σ_{ij} – тензор дивергента напряжений; ε_{ij} – тензор деформаций; x_i – эйлеровы пространственные координаты; $t-s = \tau$ – время; t – время в момент наблюдения; s – временное запаздывание; F – тензорный функционал тензора предыстории деформаций. Предыстория деформаций есть деформации в моменты времени, предшествующие моменту наблюдения. В формуле (1) деформации определены таким образом, что

$$\varepsilon_{ij}(t) = 0, \quad (2)$$

т.е. в момент наблюдения (нулевое запаздывание) деформации отсутствуют.

Как показано в работе [9], для жидкости, описываемой реологическим уравнением (1), в предельном случае очень медленного течения становится справедливым ньютоновское реологическое уравнение

$$\sigma_{ij} = 2\eta\dot{\varepsilon}_{ij}, \quad (3)$$

где $\dot{\epsilon}_{ij}$ – тензор скорости деформаций (точка означает дифференцирование по времени); η – ньютоновский коэффициент вязкости. В случае малых деформаций [10] уравнение (1) сводится к больцмановскому линейному интегральному реологическому уравнению

$$\sigma_{ij} = 2 \int_0^{\infty} R(s) \epsilon_{ij}(t-s) ds, \quad (4)$$

где интегральное ядро $R(s)$ обычно называют ядром релаксации.

Интегрируя правую часть уравнения (4) по частям, можно переписать данное уравнение в виде

$$\sigma_{ij} = 2 \int_0^{\infty} \Pi(s) \dot{\epsilon}_{ij}(t-s) ds, \quad (5)$$

где $\Pi(s)$ – интегральное ядро памяти, связанное с ядром релаксации соотношением

$$R(s) = -d\Pi/ds, \quad \Pi(\infty) = 0.$$

Определение функционала F в уравнении (1) с помощью экспериментальных исследований (реометрия) – практически неразрешимая задача (для этого потребовалось бы немислимое количество экспериментов). Другой подход к реометрии простых жидкостей сводится к рассмотрению течений определенного типа, так называемых реометрических. Реометрическое течение данного вида представляет собой бесконечный набор течений, характеризуемых одним или несколькими параметрами, полностью описывающими течение. Например, в качестве реометрического можно использовать периодическое течение, характеризуемое двумя параметрами: частотой и амплитудой, или линейное течение Куэтта (простое сдвиговое течение), характеризуемое единственным параметром: постоянной скоростью сдвига. Для реометрического течения с помощью экспериментов можно установить реологический закон, но поведение материала для любого другого типа течения остается непредсказуемым. Наконец, третий возможный подход состоит в том, чтобы, используя какие-то дополнительные соображения, ввести значительно более конкретное, чем (1), реологическое уравнение, имеющее несколько экспериментально определяемых параметров. Именно такой подход и реализуется в настоящей работе.

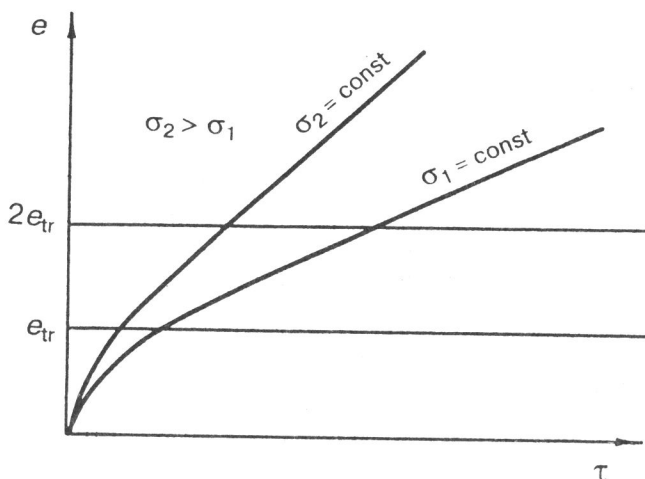
2. ПОЛЗУЧЕСТЬ ГЕОМАТЕРИАЛОВ

Результаты лабораторного исследования образцов горных пород приводят к типичной экспериментальной кривой ползучести, показанной на рисунке. Постоянное напряжение приложено к образцу в момент времени $\tau = 0$. Кривая может быть разбита на два участка. На первом участке (неустановившаяся ползучесть) скорость деформации уменьшается со временем. На втором участке скорость деформации постоянна (установившаяся ползучесть). Переход к установившейся ползучести происходит при деформациях порядка нескольких процентов, независимо от напряжения, при котором проводится эксперимент. Кроме того, установлено, что на этапе неустановившейся ползучести деформации линейно зависят от

приложенного напряжения. Для горных пород при высоких температурах неустановившаяся ползучесть хорошо описывается законом Андраде

$$2e_{ij} = \sigma_{ij} f(\tau), \quad f(\tau) = \tau^m / A, \quad (6)$$

где $f(\tau)$ – функция ползучести, дающая аналитическое описание кривой ползучести на первом этапе; A – реологический параметр. Типичное значение показателя $m = 1/3$.



В уравнении (6) деформация отсчитывается не от момента наблюдения, а от момента приложения постоянного напряжения $\tau = 0$. При $\tau \leq 0$ деформация нулевая, а в момент наблюдения $\tau = t$ деформация отлична от нуля, т.е. не выполняется требование (2) теории простых жидкостей. Тензор деформаций, отсчитываемых не от момента наблюдения, мы обозначаем e_{ij} . Это обозначение использовано в формуле (6) и на рисунке, который показывает зависимость от времени второго инварианта тензора деформаций $e = (2e_{kl}e_{kl})^{1/2}$, называемого интенсивностью деформации. В случае обычно рассматриваемой в экспериментах на ползучесть одноосной деформации $e = \sqrt{2}e_{11}$, где e_{11} – единственная, отличная от нуля, компонента тензора деформаций. Переходя к деформациям, отсчитываемым от момента наблюдения, и вводя временное запаздывание $s = t - \tau$, как это принято в теории простых жидкостей, перепишем закон Андраде (6) в виде

$$\begin{aligned} 2e_{ij} &= \sigma_{ij} [t^m - (t-s)^m] / A, & 0 \leq s \leq t, \\ 2e_{ij} &= \sigma_{ij} t^m / A, & s \geq t. \end{aligned} \quad (7)$$

На этапе установившейся ползучести постоянная скорость деформации нелинейно зависит от приложенного постоянного напряжения

$$\dot{e}_{ij} = B\sigma^{n-1}\sigma_{ij}, \quad \sigma = (\sigma_{kl}\sigma_{kl})^{1/2} \quad (8)$$

или, если обратить данное соотношение,

$$\sigma_{ij} = 2(2B)^{-1/n} \dot{\varepsilon}^{(1-n)/n} \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad \dot{\varepsilon} = (\dot{\varepsilon}_{kl} \dot{\varepsilon}_{kl})^{1/2}, \quad (9)$$

где σ и $\dot{\varepsilon}$ – вторые инварианты тензоров девиаторов напряжений и скоростей деформаций; B – реологический параметр. Типичное экспериментальное значение показателя $n = 3$.

Уравнение (8) идентично реологическому уравнению степенной неньютоновской жидкости. Однако модель степенной жидкости предполагает, что уравнение (8) справедливо не только при постоянном напряжении, т.е. для ползучести, но и при произвольно меняющемся во времени напряжении. Как было сказано выше, модель степенной жидкости не дает адекватного описания реологии геоматериала, хотя и правильно описывает его ползучесть. В настоящей работе делается попытка построить такую реологическую модель, которая соответствовала бы теории простой жидкости с затухающей памятью и в то же время приводила бы к законам ползучести (6) и (8) в случае постоянных напряжений.

3. РЕОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАНТИИ

Линейные больцмановские интегральные соотношения (4) и (5) приводят к закону Андраде (6) в случае постоянного напряжения, если ядра памяти и релаксации определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi(s) &= As^{-m}/m\Gamma(m)\Gamma(1-m), \\ R(s) &= -d\Pi/ds = As^{-m-1}/\Gamma(m)\Gamma(1-m), \end{aligned} \quad (10)$$

где Γ означает гамма-функцию. Чтобы убедиться в этом, достаточно подставить (7) в правую часть (4) и заметить, что уравнение (4) дает постоянное (не зависящее от t) напряжение только при $R(s)$, заданном формулой (10). Интегрирование в правой части уравнения (4) легко производится с помощью преобразования Лапласа. Интегральную модель, определяемую уравнениями (4), (10), мы называем реологической моделью Андраде. Данная модель описывает реологию мантии при малых деформациях, но неприменима при достаточно больших деформациях, поскольку это линейная модель.

Простейшей нелинейной моделью, согласующейся с теорией жидкостей с затухающей памятью, является модель, впервые предложенная Тэннером и Симмонсом [8]

$$\sigma_{ij} = 2 \int_0^\infty R(s)g(\varepsilon)\varepsilon_{ij}(t-s)ds, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) &\equiv 1, \quad \text{если } \varepsilon \leq \varepsilon_{tr}, \\ g(\varepsilon) &\equiv 0, \quad \text{если } \varepsilon > \varepsilon_{tr}, \end{aligned}$$

$\varepsilon = (\varepsilon_{kl}\varepsilon_{kl})^{1/2}$ – второй инвариант тензора деформаций; ε_{tr} – его переходное значение, равное переходному значению интенсивности деформаций e_{tr} , которое наблюдается в экспериментах на ползучесть (см. рисунок).

В качестве реологической модели мантии можно предложить модель (11), в которой интегральное ядро $R(s)$ задано уравнением (10). Эту модель в дальнейшем

будем называть для краткости РМ1. Ясно, что при малых деформациях ($\varepsilon \leq \varepsilon_{tr}$) РМ1 вырождается в модель Андраде.

Рассмотрим установившуюся ползучесть в рамках РМ1. Для этого подставим в уравнение (11) $\varepsilon_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}s$, где $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – постоянный тензор, не зависящий от s и от t . В результате получаем

$$\sigma_{ij} = 2\dot{\varepsilon}_{ij} \int_0^{s_M} sR(s)ds, \quad (12)$$

где глубина памяти s_M (деформации, которые имеют место при $s > s_M$, не влияют на напряжение) определена как

$$s_M = \varepsilon_{tr}/\dot{\varepsilon}, \quad (13)$$

а $\dot{\varepsilon}$ – постоянная интенсивность (второй инвариант) тензора скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$. Как следует из (10), (12), (13),

$$\sigma_{ij} = 2A(\varepsilon_{tr}/\dot{\varepsilon})^{1-m}\dot{\varepsilon}_{ij}/(1-m)\Gamma(m)\Gamma(1-m). \quad (14)$$

Таким образом, РМ1 приводит к соотношению (9) для установившейся ползучести, в котором параметры n и B , описывающие установившуюся ползучесть, связаны с параметрами РМ1 следующим образом:

$$n = 1/m, \quad 1/2B = [A/(1-m)\Gamma(m)\Gamma(1-m)]^{1/m}\varepsilon_{tr}^{(1-m)/m}. \quad (15)$$

При характерном для мантийных пород значении $m = 1/3$ численный коэффициент в формулах (14), (15) оценивается как $(1-m)\Gamma(m)\Gamma(1-m) \approx 3$.

Формула (12) справедлива в том случае, когда время существования течения с постоянной скоростью деформации (установившаяся ползучесть) превосходит глубину памяти s_M . Поэтому РМ1 приводит к закону установившейся ползучести (9) при $\varepsilon \geq 2\varepsilon_{tr}$. При $\varepsilon \leq \varepsilon_{tr}$ эта модель дает закон Андраде для неустановившейся ползучести. Ползучесть же при деформациях $\varepsilon_{tr} < \varepsilon < 2\varepsilon_{tr}$ мы не рассматриваем. Это переходный участок (см. рисунок), где четко не установлен и экспериментальный закон ползучести.

Линейному течению Куэтта соответствует тензор деформации, в котором отличны от нуля только компоненты $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \dot{\varepsilon}_{12}s$, $\varepsilon_{22} = (\dot{\varepsilon}_{12}s)^2$, где $\dot{\varepsilon}_{12}$ – постоянная скорость деформации сдвига [8]. Здесь мы используем тензор деформации Коши, а не Фингера. (Тензор деформации Коши и тензор деформации Фингера совпадают только в случае малых деформаций.) Поскольку в РМ1, определяемой уравнением (11), интенсивность деформаций, которые влияют на напряжение в момент наблюдения, не превосходит $\varepsilon_{tr} \ll 1$, можно считать, что в куэттовском течении $\varepsilon_{22} \ll \varepsilon_{12}$. Поэтому реологические соотношения (12), (14) описывают течение Куэтта, если положить $i = 1$, $j = 2$. Течение установившейся ползучести начинается в определенный момент времени, предшествующий моменту наблюдения, а течение Куэтта, которое является неким идеализированным течением, существует всегда (значение s не ограничено). Уравнения (12), (14) описывают как течение Куэтта, так и установившуюся ползучесть, существующую достаточно долго. На начальном этапе ползучесть является неустановившейся и описывается законом Андраде.

4. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ

Рассмотрим периодическое течение малой амплитуды, для которого тензор скоростей деформации определяется как

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}(x_i) \exp[i\omega(t - s)], \quad (16)$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}(x_i)$ – амплитуда колебания, зависящая от пространственных координат; ω – частота колебания. Тензор деформаций, соответствующий (16), имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}(x_i) \exp i\omega t [1 - \exp(-i\omega s)]/i\omega, \quad (17)$$

т.е. при нулевом запаздывании $s = 0$ деформация обращается в нуль; это соответствует требованию (2), которое вводится в теории простых жидкостей.

Подставляя (16) в уравнение (5) (или (17) в (4)), мы получаем реологический закон для периодических течений малой амплитуды, записанный в виде ньютоновского реологического закона

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2F(\omega)\dot{\varepsilon}_{ij}, \\ F(\omega) &= \Pi^*(i\omega), \end{aligned} \quad (18)$$

где $\Pi^*(i\omega)$ – лапласовское изображение интегрального ядра памяти $\Pi(s)$. Функция $F(\omega)$ представляет собой эффективную ньютоновскую вязкость, зависящую от частоты колебания. Для модели Андраде, а следовательно и для РМ1, которая при малых деформациях совпадает с моделью Андраде, $F(\omega)$ принимает вид

$$F(\omega) = A(i\omega)^{m-1}/m\Gamma(m). \quad (19)$$

Рассмотрим теперь периодическое течение малой амплитуды, наложенное на основное стационарное течение, связанное с большими деформациями. В этом случае деформации и напряжения представим в виде

$$\varepsilon_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij} + \varepsilon'_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \sigma'_{ij}, \quad (20)$$

где черта сверху означает основное течение, а штрих – наложенное течение. Как следует из (14), эффективная вязкость основного течения для модели РМ1, совпадающей в случае стационарного течения с реологической моделью степенной жидкости, записывается в виде

$$\bar{\eta} = As_M^{1-m}/(1-m)\Gamma(m)\Gamma(1-m), \quad s_M = \varepsilon_{tr}/\dot{\bar{\varepsilon}}. \quad (21)$$

Подставляя (20) в (11), используя соотношения (16), (17) для периодического наложенного течения и линеаризуя по малым деформациям ε'_{ij} , находим реологический закон для наложенного периодического течения

$$\sigma'_{ij} = 2\eta_{ijkl}\dot{\varepsilon}'_{kl}, \quad (22)$$

где тензор четвертого порядка, характеризующий эффективную анизотропную вязкость, для РМ1 определен как

$$\begin{aligned} \eta_{ijkl} &= [\gamma(1-m, i\omega s_M) - (i\omega s_M)^{1-m} H(\omega s_M)] \delta_{ik} \delta_{jl} A(i\omega)^{m-1}/m\Gamma(m)\Gamma(1-m) - \\ &- 2(1-m)\bar{\eta} H(\omega s_M) \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij} \dot{\bar{\varepsilon}}_{kl} / (\dot{\bar{\varepsilon}})^2, \end{aligned} \quad (23)$$

где δ_{ik} – единичный тензор; $\dot{\epsilon}$ – второй инвариант тензора скоростей деформации для основного течения,

$$H(\omega s_M) = [1 - \exp(-\omega s_M)]/i\omega s_M,$$

а γ – неполная гамма-функция

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x y^{\alpha-1} e^{-y} dy, \quad \text{Re } \alpha > 0.$$

Неполная гамма-функция обладает следующими асимптотическими свойствами:

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha, x) &= \Gamma(\alpha), & |x| \gg 1, \\ \gamma(\alpha, x) &= x^\alpha/\alpha, & |x| \ll 1, \end{aligned} \quad (24)$$

причем в нашем случае $\alpha = 1 - m$, $x = i\omega s_M$. Используя асимптотические свойства (24) и учитывая, что функция $H(\omega s_M)$ обращается в единицу при $\omega s_M \ll 1$, получаем

$$\eta_{ijkl} = \bar{\eta}[\delta_{ik}\delta_{jl} - (4/3)\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{kl}/(\dot{\epsilon})^2], \quad \omega s_M \ll 1, \quad (25)$$

$$\eta_{ijkl} = [A(i\omega)^{m-1}/m\Gamma(m)]\delta_{ik}\delta_{jl}, \quad \omega s_M \gg 1. \quad (26)$$

Формула (25) показывает: когда период колебания велик по сравнению с глубиной памяти s_M , соответствующей основному стационарному течению, наложенное течение полностью описывается моделью степенной жидкости. К уравнениям (22), (25) можно прийти, подставляя (20) в уравнение (9), описывающее степенную модель.

Когда период колебания мал по сравнению с глубиной памяти, реология наложенного течения является изотропной и совпадает с реологией малоамплитудного течения, которое происходит в отсутствие основного стационарного течения. Действительно, уравнения (22), (26) тождественны уравнениям (18), (19). Отметим, что уравнение (26) получается из уравнения (23) в нулевом приближении по малому параметру $(\omega s_M)^{-m}$. В первом приближении по этому параметру проявляется реологическая анизотропия наложенного течения.

Отношение эффективной вязкости наложенного течения (19) к эффективной вязкости основного течения (21) определяется выражением

$$F(\omega)/\bar{\eta} = (i\omega s_M)^{m-1}(1 - m/m)\Gamma(1 - m). \quad (27)$$

Как следует из (27), при $\omega s_M \gg 1$ эффективная вязкость наложенного течения значительно ниже, чем основного. Поэтому исследование конвективной неустойчивости наложенного течения [4] показывает, что наиболее неустойчивая конвективная мода имеет колебательный характер, поскольку монотонной моде неустойчивости ($\omega = 0$) соответствует большая эффективная вязкость, равная эффективной вязкости $\bar{\eta}$ основного течения.

5. СРАВНЕНИЕ С РАНЕЕ ПРЕДЛОЖЕННОЙ МОДЕЛЬЮ

В работах [3, 4] была предложена другая реологическая модель мантии, описываемая уравнением

$$2h(e)e_{ij} = \int_0^t K(s)\sigma_{ij}(t-s)ds, \quad (28)$$

где

$$h(e) = 1, \quad e \leq e_{tr}, \quad h(e) = (e/e_{tr})^{m-1}, \quad e \geq e_{tr}, \quad (29)$$

а интегральное ядро ползучести $K(s)$ определено как

$$K(s) = ms^{m-1}/A. \quad (30)$$

Обращая интегральное уравнение (28), можно записать его в виде

$$\sigma_{ij} = 2 \int_0^t R(s)h(e)e_{ij}(t-s)ds, \quad (31)$$

где ядро релаксации определяется тем же соотношением (10), что и для РМ1.

Уравнение (28) было введено в теоретическую реологию Работновым [11]. В работе [3] функции $K(s)$ и $h(e)$ были подобраны таким образом, чтобы среда с реологией (28) подчинялась закону ползучести Андраде (6) при малых деформациях и закону установившейся ползучести (9) при больших деформациях. Модель, описываемую уравнениями (28) – (31), будем для краткости называть РМ2.

В РМ2 деформации отсчитываются от состояния в нулевой момент времени и не обращаются в нуль в момент наблюдения. Для деформаций, измеряемых таким образом, выше было введено обозначение e_{ij} . Связь между деформациями ε_{ij} и e_{ij} очень проста:

$$\varepsilon_{ij}(t-s) = e_{ij}(t) - e_{ij}(t-s), \quad (32)$$

где, как и ранее, t – момент наблюдения, s – запаздывание. Соотношение (32) фактически уже было использовано выше при переходе к форме записи (7) закона Андраде. Согласно (32) $\varepsilon_{ij} = 0$ при $s = 0$, что обеспечивает выполнение требования (2). Поскольку предполагается, что $e_{ij} = 0$ при $\tau = t - s = 0$, из (32) следует

$$\varepsilon_{ij}(0) = e_{ij}(t), \quad e_{ij}(t-s) = \varepsilon_{ij}(0) - \varepsilon_{ij}(t-s). \quad (33)$$

Подставляя (33) в (31), можно привести уравнение (31) к виду, принятому в теории простых жидкостей. Кроме того, в соответствии с этой теорией следует проводить интегрирование по всем значениям s , т.е. заменить верхний предел интегрирования в уравнении (31) на ∞ . Записывая реологическое уравнение в виде (31), мы предполагали, что при $t - s < 0$ деформации e_{ij} (но не деформации ε_{ij}) нулевые.

В уравнении (31), описывающем РМ2, не предполагается каких-либо ограничений на величину деформаций. Формулы же (32) и (33), дающие соотношение между деформациями при изменении момента наблюдения, справедливы только в случае малых деформаций, связанных со смещениями линейными соотношениями. Более общие нелинейные уравнения, заменяющие (32), (33) в случае больших деформаций, мы не выписываем (их можно найти в монографиях [7, 8]).

PM1 и PM2 содержат одни и те же реологические параметры A , m , $\varepsilon_{tr} = \varepsilon_{tr}$, сводятся к линейной модели Андраде при малых деформациях, а при достаточно больших деформациях приводят к закону установившейся ползучести. Существенное отличие этих моделей состоит в том, что они по-разному описывают реологию наложенных периодических течений. PM1 приводит для таких течений к реологии Андраде при достаточно высоких частотах. PM2 тоже приводит к реологии Андраде, но наложенное течение характеризуется не параметром Андраде A , а параметром A' , связанным с A соотношением

$$A' = A(\varepsilon_{tr}/\dot{\varepsilon}t_0)^{1-m}, \quad (34)$$

где $\dot{\varepsilon}$ характеризует скорость деформации основного стационарного течения, а t_0 – время существования стационарного течения. Заметим, что $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}$ и, как уже упоминалось, $\varepsilon_{tr} = \varepsilon_{tr}$. Формула (34) справедлива при $\omega t_0 \gg 1$.

Для PM1 можно считать, что $A' = A$, где A' , как и в PM2, означает параметр Андраде наложенного течения. Реология наложенного течения в PM1 определяется не временем существования основного течения, а глубиной памяти $s_M = \varepsilon_{tr}/\dot{\varepsilon}$, причем наложенное течение описывается моделью Андраде, когда $\omega s_M \gg 1$. Если подставить s_M вместо t_0 в уравнение (34), получаем как раз $A' = A$.

Модели PM1 и PM2 сводятся к модели Андраде для периодических наложенных течений с достаточно малыми периодами колебаний. Для PM2 период должен быть меньше, чем t_0 (t_0 оценивается в 10^8 лет), а для PM1 – меньше, чем $s_M = \varepsilon_{tr}/\dot{\varepsilon}$. Переходное значение интенсивности деформаций оценивается в лабораторных экспериментах как $\varepsilon_{tr} \approx 10^{-1}$, а $\dot{\varepsilon}$ можно оценить, используя известную скорость движения литосферных плит, как 10^{-8} год $^{-1}$. Таким образом s_M оценивается в 10^7 лет. Эта оценка вносит определенные трудности в теорию термоконвективных колебаний мантии, имеющих периоды 10^7 – 10^8 лет. Но если считать, что крупномасштабное конвективное движение отсутствует под континентами, где обнаруживаются вертикальные колебательные движения коры, мы можем применять модель Андраде при сколь угодно больших периодах колебаний.

Для приведенных выше оценок ε_{tr} , $\dot{\varepsilon}$, t_0 и m коэффициент A' в PM2 согласно формуле (34) не очень сильно (не более, чем на порядок) отличается от A . Однако принципиальным недостатком PM2, связанным со слишком длинной памятью этой модели, является следующее свойство: при t_0 , стремящемся к бесконечности, параметр A' стремится к нулю. Именно это обстоятельство побудило автора к построению новой универсальной реологической модели PM1. Модель PM1 имеет более короткую память, чем PM2. Затухание памяти в новой модели PM1, предложенной в настоящей работе, определяется не только монотонным убыванием $R(s)$ с ростом s , но в первую очередь резким обрывом памяти при достижении интенсивности деформаций $\varepsilon = \varepsilon_{tr}$ (см. уравнение (11))

6. УПРУГОСТЬ И ДИФФУЗИОННАЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ

В уравнениях, выписанных выше, ε_{ij} и e_{ij} – деформации, связанные с дислокационным микромеханизмом. Полная деформация E_{ij} представляет собой сумму деформации, которая определяется дислокационным механизмом, деформации, связанной с диффузионным микромеханизмом и упругой деформации. Чтобы учесть

упругость и диффузионную составляющую реологии, определяемую ньютоновской моделью (3), достаточно в уравнении (10) сделать замену

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{E}_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}/2\mu - \sigma_{ij}/2\eta, \quad (35)$$

где μ – упругий модуль сдвига и η – ньютоновская вязкость, обусловленная диффузионным микропроцессом. Механический аналог реологической модели (35) – последовательное соединение трех элементов, описывающих упругость, диффузионную реологию и дислокационную реологию. Обратная эффективная вязкость данной модели равна сумме обратных вязкостей каждого из трех элементов. Таким образом, для того, чтобы можно было пренебречь диффузионным микропроцессом при рассмотрении реологии, эффективная дислокационная вязкость должна быть значительно ниже, чем диффузионная вязкость η .

Как следует из (14), рассматривая стационарное течение в РМ1, мы можем пренебречь диффузионной реологией при условии

$$\dot{\varepsilon} \gg \varepsilon_{tr}(A/\eta)^{1/1-m}. \quad (36)$$

При рассмотрении периодического течения и наложенного периодического течения можно пренебречь диффузионной реологией, как следует из (19), (26), при выполнении условия

$$\omega \gg (A/\eta)^{1/1-m}. \quad (37)$$

Мы предполагаем, что ньютоновская вязкость η , характеризующая диффузионный микромеханизм, настолько велика, что даже при самых медленных геофизических процессах условия (36), (37) выполняются. Тем не менее, введение в нашу реологическую модель вязкости η важно для установления соответствия с общей теорией простых жидкостей, которые при медленных движениях ведут себя как ньютоновские. В нашей модели η – это как раз вязкость, соответствующая ”медленному движению” в смысле теории простых жидкостей. Как следует из (21), эффективная вязкость $\bar{\eta}$, не учитывающая диффузионный микропроцесс, стремится к бесконечности при очень медленных течениях, когда $\dot{\varepsilon}$ стремится к нулю. Учет диффузионной реологии устанавливает верхний предел эффективной вязкости, равный η .

Рассматривая периодическое течение, можно пренебречь упругостью при условии

$$\omega \ll (\mu/A)^{1/m}. \quad (38)$$

Данное условие получено аналогично условию (37) путем сравнения соответствующих эффективных вязкостей. Для термоконвективных периодических течений условие (38) выполняется, и упругость можно не учитывать. Но, например, процесс распространения сейсмических волн определяется именно упругостью, а деформации, связанные с дислокационной реологией, малы по сравнению с упругими деформациями и обуславливают слабое затухание сейсмических волн. При $m = 1/3$ параметр A оценивается как $A \approx 10^{13}$ Па $c^{1/3}$ [3], а упругий модуль сдвига мантии Земли $\mu \approx 10^{11}$ Па. Следовательно, правая часть неравенства (38) оценивается как $10^{-6} c^{-1}$.

Условие (37) выполняется даже для самых медленных геофизических процессов, если $\eta \approx 10^{25}$ Па с. При таком η правая часть неравенства (37) оценивается как $10^{-18} \text{ с}^{-1} \approx 3 \times 10^{-11} \text{ год}^{-1}$, и ньютоновским элементом, описывающим диффузионную реологию, в универсальной реологической модели (35) можно пренебречь. Но если значение $\eta \ll 10^{25}$ Па с, течение в мантии может определяться ньютоновским элементом, а не нелинейным элементом с памятью, который моделирует дислокационную реологию. Данная ситуация была рассмотрена в работе [3], где показано, что, даже если в верхней мантии Земли реализуется ньютоновская реология, то в нижней мантии ньютоновская вязкость η становится очень большой (η зависит от давления и температуры значительно сильнее, чем эффективная вязкость $\bar{\eta}$, соответствующая дислокационной реологии) и доминирует нелинейная дислокационная реология.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Универсальную реологическую модель мантии можно представить как последовательное соединение трех реологических элементов: линейного упругого элемента, линейного вязкого элемента, описываемого ньютоновским законом и связанного с диффузионным микромеханизмом, и нелинейного элемента, связанного с дислокационным механизмом. Для описания этого нелинейного элемента в настоящей работе предложена новая реологическая модель, имеющая память. Эта модель (PM1) обладает определенными преимуществами по сравнению с ранее предложенной автором моделью (PM2). Но окончательный выбор реологической модели мантии может быть сделан только после проведения соответствующего лабораторного исследования реологии материала. Прежде всего необходимы эксперименты, где рассматривались бы периодические течения, наложенные на основное стационарное течение. Именно для таких наложенных течений предложенные модели PM1 и PM2 дают различные реологические соотношения, а точнее говоря, приводят к разным значениям реологического параметра в линейной интегральной модели Андраде. С другой стороны, для материала мантии можно считать экспериментально установленными следующие положения [12]: первое, – при малых деформациях и произвольно меняющихся во времени напряжениях справедлива линейная интегральная модель; второе, – при достаточно больших деформациях и постоянных напряжениях (установившаяся ползучесть) справедлива модель степенной жидкости. Эти два положения и легли в основу построения моделей PM1 и PM2.

Все сказанное о реологии мантийного материала относится не только к Земле, но и к Венере и Марсу (планетам земной группы). Введение реологических моделей с памятью может существенно изменить результаты, полученные при изучении тектонических процессов в этих планетах. Например, для объяснения происхождения тектонических поверхностных структур на Венере задача о неустойчивости литосферы Венеры при сжатии (или растяжении) была решена в рамках реологической модели степенной жидкости [13]. Но, как следует из результатов настоящей работы, в задаче о неустойчивости при сжатии (или растяжении) следует использовать реологическую модель с памятью, как и в задаче о неустойчивости конвек-

тивного течения [4], поскольку возникновение неустойчивости – нестационарный процесс.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Международного Научного Фонда (проект МНЕ000) и Российского Фонда Фундаментальных Исследований (код проекта 94-05-16260).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chistensen U.* Convection with pressure- and temperature- dependent non-Newtonian rheology // *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 1984. Vol.77. P.343–384.
2. *Birger B. I.* Linear and weakly nonlinear problems of the theory of thermal convection in the Earth's mantle // *Phys. Earth and Planet. Inter.* 1988. Vol.50. P.92–98.
3. *Birger B. I.* Rheology of the Earth's mantle and geodynamical processes // *Geophys. Res. Lett.* 1991. Vol.18. P.2031–2034.
4. *Биргер Б. И.* Реология мантии и неустойчивость конвективного течения // Проблемы прогноза землетрясений и интерпретация сейсмологических данных. М.: Наука, 1994. С.123–139. (Вычисл. сейсмология: Вып.26).
5. *Пуарье Ж.-П.* Ползучесть кристаллов. Механизмы деформации металлов, керамики и минералов при высоких температурах. М.: Мир, 1988. 287 с.
6. *Теркот Д., Шуберт Дж.* Геодинамика. М.: Мир, 1985. 730 с.
7. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошной среды. М.: Мир, 1975. 592 с.
8. *Астарита Дж., Марруччи Дж.* Основы гидродинамики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.
9. *Coleman B. D., Noll W.* An approximation theorem for functionals, with applications in continuum mechanics // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1960. Vol.6. P.355–370.
10. *Coleman B. D., Noll W.* Foundations of linear viscoelasticity // *Rev. Modern Phys.* 1961. Vol.33. P.239–249.
11. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
12. *Berckhemer H., Auer F., Drisler J.* High-temperature anelasticity of mantle peridotite // *Phys. Earth and Planet. Inter.* 1979. Vol.20. P.48–59.
13. *Zuber M. T.* Constraints on the lithospheric structure of Venus from mechanical models and tectonic surface features // *J. Geophys. Res.* 1987. Vol.92. P.E541–E551.