

УДК 550.331

## УСОВЕРШЕНСТВОВАННАЯ МОДЕЛЬ ПОГРУЖЕНИЯ ТЯЖЕЛЫХ ТЕЛ В АСТЕНОСФЕРЕ

Б.М.Наймарк, А.Т.Исмаил-заде

*Международный институт теории прогноза землетрясений  
и математической геофизики Российской академии наук*

Рассматривается механизм эволюции осадочных бассейнов, основанный на погружении тяжелых тел (эклогитовых линз) в астеносфере, образовавшихся путем фильтрации базальтового расплава, его накопления в астеносферном выступе и последующего фазового перехода (типа базальт-эклогит). Погружение образовавшихся таким образом тяжелых тел вызывает прогиб земной поверхности. Усовершенствованная численная модель этого процесса допускает скачки плотности при интерполяции бикубическими сплайнами и зависимость этих скачков от времени. Численный метод основан на интерполяции функции тока бикубическими сплайнами и на интегрировании систем дифференциальных уравнений для вязкости и плотности по методу Рунге-Кутты. Рассчитаны две простейшие модели, иллюстрирующие применимость метода, и упрощенная модель образования Иллинойского бассейна. Кривая тектонического погружения близка к модельной.

## AN IMPROVED MODEL OF SUBSIDENCE OF HEAVY BODIES IN THE ASTHENOSPHERE

B. M. Naimark and A. T. Ismail-zadeh

*International Institute of Earthquake Prediction Theory  
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences*

We assume the mechanism of sedimentary basin evolution based on subsidence of heavy bodies (eclogite lenses) in the asthenosphere formed through filtration of magmatic melt into asthenosphere bulges and its subsequent gabbro-eclogite phase transition. Subsidence of such heavy bodies induces depressions on the earth's surface. We improve the numerical model of such process allowing for density discontinuities in bicubic spline approximation and introducing time-dependent jumps of density. The numerical method is based on bicubic spline approximation of the stream function and on Runge-Kutta method for the solution of differential equations for the density and viscosity. Two simple illustrative models and a simplified model of the Illinois basin are computed. The subsidence curve derived for the model is in a good agreement with that obtained for the Illinois basin.

## ВВЕДЕНИЕ

Один из механизмов формирования и эволюции осадочных бассейнов заключается в следующем [1]. В результате рифтогенеза – утонения литосферы и подъема кровли подстилающей астеносферы – и декомпрессии астеносферы происходит частичное плавление мантийного вещества. В силу разности плотности между расплавом и кристаллическим скелетом внутри астеносферного выступа, образовавшегося в процессе рифтогенеза, начинает развиваться процесс вертикальной фильтрации более легкой магмы. Если граница между литосферой и астеносферным выступом является непроницаемой для расплава, то магматическое вещество (базальт) накапливается вблизи кровли этого выступа. В результате последующего охлаждения базальтовый расплав кристаллизуется и при подходящих  $P$ - $T$  условиях превращается в эклогитовую породу [2,3,4]. В результате фазового перехода накопленное вещество утяжеляется и погружается в окружающей более легкой среде. Погружающееся тело увлекает за собой вышележащие слои, что и приводит к образованию осадочного бассейна.

Численная модель эволюции осадочного бассейна, основанная на погружении тяжелых тел в астеносфере, была предложена в [5,6] (там приводится и соответствующая библиография). При разработке модели использовались упрощающие предположения. Одно из них состояло в том, что плотность может изменяться лишь плавно, без скачков. Кроме того, считалось, что вначале происходит фазовый переход, а уже затем – погружение.

Здесь описана усовершенствованная модель, допускающая скачкообразные изменения плотности и растянутый во времени фазовый переход. Дело в том, что скорость теплообмена между магматической линзой и окружающей средой накладывает ограничение на количество вещества, участвующего в фазовом переходе. Такую ситуацию можно, хотя и грубо, описать с помощью временной зависимости скачка плотности между магматической линзой и астеносферой. Мы принимаем зависимость  $c(t) = c_0(1 - \exp(-\gamma t))$ , где  $c(t)$  – скачок плотности, а  $c_0$  и  $\gamma$  – константы, которые можно оценить при исследовании конкретного бассейна.

Мы рассматриваем двумерную модель с Ньютоновской реологией и аппроксимируем функцию тока, вязкость и непрерывную компоненту плотности бикубическими сплайнами. Для нахождения функции тока используется метод Галеркина, а плотность и вязкость определяется из систем обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложения этих функций по базисным бикубическим сплайнам. Трудность учета скачков плотности состоит в том, что разрывные функции плохо приближаются сплайнами. Ниже мы покажем, как обойти эту трудность.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Использованные в работе обозначения для удобства перечислены в табл. 1

ТАБЛИЦА 1

Символ	Значение	Номер уравнения
$A(x, z, t)$	плотность или вязкость в уравнении переноса	(3), (6), (7)
$a_{ij}$	коэффициенты разложения плотности $\rho_1$ по базисным бикубическим сплайнам	(10), (12)
$b_{ij}$	коэффициенты разложения вязкости $\mu$ по базисным сплайнам	(10), (13)
$c_{ij}$	коэффициенты разложения функции тока $\psi$ по базисным бикубическим сплайнам	(10), (11), (14)
$c(t)$	скачок плотности на кривой $\mathcal{L}$	(15)
$c_0$	окончательное значение скачка плотности	
$\hat{c}_1(t), \hat{c}_2(t)$	плотность по разные стороны кривой $\mathcal{L}$	
$C_{ijkl}$	коэффициенты системы линейных уравнений для функций тока $\psi$	(11)
$D_{ijkl}$	коэффициенты систем обыкновенных дифференциальных уравнений для $\rho_1$ и $\mu$	(12), (13)
$\delta A$	любая из пробных функций для $A$	(6), (7)
$\delta\psi$	любая из пробных функций для $\psi$	(6), (7)
$E_{ijkl}$	коэффициенты в правых частях уравнений для $\rho_1$ и $\mu$	(12), (13)
$F_{ijkl}$	коэффициенты в правых частях уравнений для $\psi$ (соответствуют непрерывной компоненте плотности)	(11)
$\mathcal{F}$	дифференциальное выражение в левой части уравнения относительно $\psi$	(1), (2)
$\Phi_{kl}$	дополнительный член в правой части (11), соответствующий скачку плотности	(11), (15)
$g$	ускорение силы тяжести	(1), (6), (7), (15)
$\gamma$	скорость нарастания скачка плотности	(4)
$H$	вертикальный размер модели	(1)-(4), (6)-(8)
$\psi$	функция тока	(10)
$\psi_{MN}$	приближенное значение функции тока	(4)
$L$	горизонтальный размер модели	(9)
$\mathcal{L}$	кривая, на которой плотность разрывна	(8), (9)
$\mathcal{L}_0$	начальное положение кривой $\mathcal{L}$	(2), (5), (7), (9)
$\mu$	вязкость	
$\mu_{\text{тип}}$	характерное значение вязкости	(5)-(7), (9)
$\mu_0(x, z)$	начальное распределение вязкости	(10)
$\mu_{MN}$	приближенное значение вязкости	(1), (5)
$\rho$	плотность	
$\rho_{\text{тип}}$	характерное значение плотности	(5)
$\rho_0(x, z)$	начальное распределение плотности	(9)
$\rho_1$	непрерывная компонента плотности	(9)
$\rho_2$	разрывная компонента плотности	(9)

ТАБЛИЦА 1 (окончание)

Символ	Значение	Номер уравнения
$\rho_{01}(x, z)$	начальное распределение непрерывной компоненты плотности	(9)
$\rho_{02}(x, z)$	начальное распределение разрывной компоненты плотности	
$\rho_{MN}$	приближенное значение плотности	(10)
$sp_i(x)sp_j(z)$	базисные бикубические сплайны для $\psi$	(10), (15)
$\widehat{sp}_i(x)\widehat{sp}_j(z)$	базисные бикубические сплайны для $\rho$ и $\mu$	(10)
$t$	время	
$T$	масштаб времени	
$\Omega$	область, в которой рассчитывается течение	
$\Omega_1, \Omega_2$	области по обе стороны кривой $\mathcal{L}$	
$x, z$	горизонтальная и вертикальная координаты	
$x_0, z_0$	координаты точки на кривой $\mathcal{L}$	
$x_\beta, z_\beta$	координаты вершин ломаной, которая аппроксимирует кривую $\mathcal{L}$ , $\beta = 1, 2, \dots, B$	

### Постановка задачи

В двумерной задаче классические уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости записываются в терминах функции тока  $\psi$  в виде

$$\mathcal{F} = -g \frac{\partial \rho}{\partial x}, \tag{1}$$

где

$$\mathcal{F} = 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \mu \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right). \tag{2}$$

Кроме того, вязкость  $\mu$  и плотность  $\rho$  удовлетворяют уравнению переноса

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial x}, \tag{3}$$

где  $A$  обозначает  $\mu$  или  $\rho$ ;  $x$  – горизонтальная координата;  $z$  – вертикальная координата (глубина), ось  $z$  направлена вверх;  $g$  – ускорение силы тяжести.

Мы рассматриваем течение в прямоугольнике  $\Omega$  :  $-L \leq x \leq L$ ,  $-H \leq z \leq 0$ . На границе  $\Omega$  выполняются следующие условия идеального скольжения:

$$\begin{aligned} \psi = \partial^2 \psi / \partial x^2 = 0 \quad \text{при } x = -L \text{ и } x = L, \\ \psi = \partial^2 \psi / \partial z^2 = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } x = -H. \end{aligned}$$

Будем задавать начальные условия (см. ниже) с помощью функций, симметричных относительно оси  $x = 0$ . Ввиду такой симметрии можно рассматривать половину области:  $0 \leq x \leq L$ ,  $-H \leq z \leq 0$ . В дальнейшем под  $\Omega$  подразумевается именно половина ранее определенной области. Условия на границе теперь приобретают вид

$$\begin{aligned}\psi = \partial^2 \psi / \partial x^2 = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = L, \\ \psi = \partial^2 \psi / \partial z^2 = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } z = -H.\end{aligned}\tag{4}$$

В момент  $t = 0$  задаются начальные распределения плотности и вязкости:

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(x, z), \quad \mu|_{t=0} = \mu_0(x, z).\tag{5}$$

Задача состоит в нахождении  $\psi$ ,  $\rho$  и  $\mu$  в  $\Omega$  для всех  $t$  из уравнений (1)–(3), граничных условий (4) и начальных условий (5).

### Определение решения

В случаях, когда плотность  $\rho$  разрывна, уравнение (1) теряет смысл, поскольку  $\partial\rho/\partial x$  не существует всюду в области  $\Omega$ . Поэтому решение задачи (1)–(5) нужно определять в слабом смысле.

*Определение 1.* Решением задачи (1)–(5) называется совокупность функций  $\psi(x, z, t)$ ,  $\rho(x, z, t)$  и  $\mu(x, z, t)$ , удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(\mu, \psi, \delta\psi) = g \iint_{\Omega} \rho \frac{\partial \delta\psi}{\partial x} dx dz, \\ \iint_{\Omega} \frac{\partial A}{\partial t} \delta A dx dz = - \iint_{\Omega} A \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \delta A}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \delta A}{\partial x} \right) dx dz,\end{aligned}\tag{6}$$

где

$$\mathcal{G}(\mu, \psi, \delta\psi) = \iint_{\Omega} \left[ 4\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \frac{\partial^2 \delta\psi}{\partial x \partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \delta\psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \delta\psi}{\partial x^2} \right) \right] dx dz$$

для любых пробных функций  $\delta\psi$  и  $\delta A$ , а также граничным условиям (4) и начальным условиям (5). В качестве пробных функций  $\delta\psi$  принимаются дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям (4), для которых существует интеграл  $\mathcal{G}(\mu, \psi, \delta\psi)$ . Пробные функции  $\delta A$  – любые непрерывно дифференцируемые функции вплоть до границы  $\Omega$ .

Выражение (6) получается с помощью умножения (1) и (2) на пробные функции  $\delta\psi$  и  $\delta A$  соответственно и интегрирования результатов по частям с учетом граничных условий. Очевидно, такое определение не является строгим; чтобы не утомлять читателя, мы не указали, к каким функциональным пространствам принадлежат искомые и пробные функции. Строгое определение решения и его свойства приводятся в [7–9].

Плотность  $\rho$  не обязательно является непрерывной функцией. Представим ее в виде суммы двух компонент: непрерывной  $\rho_1$  и разрывной  $\rho_2$ :  $\rho = \rho_1 + \rho_2$ . Положим при  $t = 0$

$$\rho_1|_{t=0} = \rho_{01}(x, z), \quad \rho_2|_{t=0} = \rho_{02}(x, z),$$

где  $\rho_{01}$  и  $\rho_{02}$  – заданные функции, причем  $\rho_{01}$  непрерывна, а  $\rho_{02}$  терпит разрыв вдоль заданной кривой  $\mathcal{L}_0$ :

$\rho_{02} = \hat{c}_1$  при  $(x, z)$  с одной стороны  $\mathcal{L}_0$ ,  
 $\rho_{02} = \hat{c}_2$  при  $(x, z)$  с другой стороны  $\mathcal{L}_0$ .

Считается, что функции  $\hat{c}_1$  и  $\hat{c}_2$  не зависят от пространственных координат.

Чтобы явно выделить скачок плотности, преобразуем правую часть первого уравнения (6). На рис. 1 схематически представлена область  $\Omega$ , которая разделяется кривой  $\mathcal{L}$  на две части  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ ;  $\rho_1 = \hat{c}_1(t)$  в  $\Omega_1$  и  $\rho_2 = \hat{c}_2(t)$  в  $\Omega_2$ .

Интегрируя в правой части (6) по частям, получим:

$$\begin{aligned} g \iint_{\Omega} \rho \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} dx dz &= \\ &= g \iint_{\Omega} \rho_1 \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} dx dz + g \iint_{\Omega_1} \hat{c}_1(t) \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} dx dz + g \iint_{\Omega_2} \hat{c}_2(t) \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} dx dz = \\ &= g \iint_{\Omega} \rho_1 \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} dx dz + g \int_{-H}^0 \left[ \hat{c}_2(t) \int_0^{x(z)} \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} dx + \hat{c}_1(t) \int_{x(z)}^L \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} dx \right] dz = \\ &= g \iint_{\Omega} \rho_1 \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} dx dz + g \int_{-H}^0 \{ \hat{c}_2(t) [\delta \psi(x(z), z) - \delta \psi(0, z)] + \\ &+ \hat{c}_1(t) [\delta \psi(L, z) - \delta \psi(x(z), z)] \} dz = \\ &= g \iint_{\Omega} \rho_1 \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} dx dz + g [\hat{c}_2(t) - \hat{c}_1(t)] \int_{\mathcal{L}} \delta \psi(x, z) dz. \end{aligned}$$

Здесь  $\delta \psi(0, z) = \delta \psi(L, z) = 0$ , поскольку пробные функции  $\delta \psi$  удовлетворяют тем же граничным условиям, что и  $\psi$ . Теперь мы можем дать окончательное определение искомого решения.

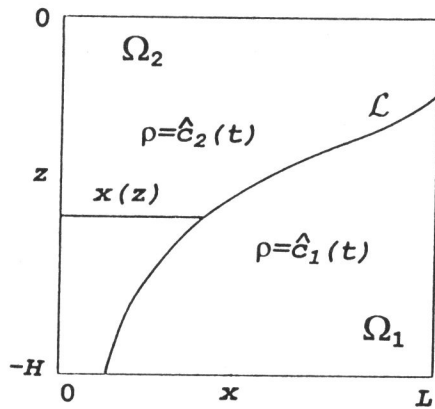


Рис. 1. Область  $\Omega$ , разделенная кривой  $\mathcal{L} : x = x(z)$  на части  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , в пределах которых плотность принимает значения  $\hat{c}_1(t)$  и  $\hat{c}_2(t)$

*Определение 2.* Решением задачи (1)–(5) называется совокупность функций  $\psi(x, z, t)$ ,  $\rho_1(x, z, t)$ ,  $\mu(x, z, t)$  и семейство кривых  $\mathcal{L}$ , удовлетворяющих уравнениям

$$\mathcal{G}(\mu, \psi, \delta\psi) = g \iint_{\Omega} \rho_1 \frac{\partial \delta\psi}{\partial x} dx dz + gc(t) \int_{\mathcal{L}} \delta\psi(x, z) dz, \quad (7a)$$

$$g \iint_{\Omega} \frac{\partial A}{\partial t} \delta A dx dz = - \iint_{\Omega} A \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \delta A}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \delta A}{\partial x} \right) dx dz, \quad (7б)$$

где  $A$  обозначает  $\rho_1$  или  $\mu$ , а  $\delta\psi$  и  $\delta A$  – произвольные пробные функции; кривая  $\mathcal{L}(t)$  получается сдвигом начальной кривой  $\mathcal{L}_0$  по траекториям системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad x|_{t=0} = x_0, \quad z|_{t=0} = z_0, \quad x_0, z_0 \in \mathcal{L}; \quad (8)$$

функция  $\psi$  удовлетворяет граничным условиям (4); функции  $\mu$  и  $\rho_1$  и кривая  $\mathcal{L}$  удовлетворяют начальным условиям

$$\mu|_{t=0} = \mu_0(x, z), \quad \rho_1|_{t=0} = \rho_{10}(x, z), \quad \mathcal{L}|_{t=0} = \mathcal{L}_0, \quad (9)$$

где  $\mathcal{L}_0$  – кривая в области  $\Omega$ ; кроме того, задается функция  $c(t) = \hat{c}_2(t) - \hat{c}_1(t)$ .

*Замечания.* Согласно определению, нужно задавать лишь скачок плотности  $c(t)$ , а не величины  $\hat{c}_1$  и  $\hat{c}_2$  по отдельности. Определение 2 годится лишь в том случае, когда скачок плотности  $c$  не изменяется вдоль кривой  $\mathcal{L}$ . Кривая  $\mathcal{L}$  должна быть либо замкнутой, либо должна начинаться и оканчиваться на границе области  $\Omega$ . Определение 2 очевидным образом обобщается на случай нескольких кривых  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_k$ ; в этом случае нужно задавать начальное положение каждой из них и относящиеся к ним скачки плотности  $c_1(t), c_2(t), \dots, c_k(t)$ .

### Численный метод

Искомые функции  $\psi$ ,  $\mu$  и  $\rho_1$  раскладываются по базисным бикубическим сплайнам:

$$\begin{aligned} \psi_{MN}(x, z, t) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij}(t) \text{sp}_i(x) \text{sp}_j(z), \\ \rho_{1,MN}(x, z, t) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \hat{\text{sp}}_i(x) \hat{\text{sp}}_j(z), \\ \mu_{MN}(x, z, t) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N b_{ij}(t) \hat{\text{sp}}_i(x) \hat{\text{sp}}_j(z). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\text{sp}_i(x) \text{sp}_j(z)$  и  $\hat{\text{sp}}_i(x) \hat{\text{sp}}_j(z)$  – базисные бикубические сплайны. Эти сплайны описаны в [5] и более подробно в [8]. Кривая  $\mathcal{L}$  задается координатами  $B$  точек, расположенных на ней достаточно часто:  $x_\beta, z_\beta \in \mathcal{L}$ ,  $\beta = 1, 2, \dots, B$ . Мы принимаем зависимость  $c(t) = c_0(1 - \exp(-\gamma t))$ , где константы  $c_0$  и  $\gamma$  оцениваются в конкретных случаях.

К уравнениям относительно  $\psi$ ,  $\mu$  и  $\rho_1$  применяется метод Галеркина. В соответствующие уравнения (7) подставляются представления (10), результаты умножаются на  $\text{sp}_k(x) \text{sp}_l(z)$  (пробные функции для  $\psi$ ) или на  $\hat{\text{sp}}_k(x) \hat{\text{sp}}_l(z)$  (пробные

функции для  $\mu$  или  $\rho_1$ ) и произведения интегрируются по частям с учетом граничных условий, в случае  $\psi$  – дважды. В результате получаются системы уравнений относительно  $c_{ij}(t)$ ,  $a_{ij}(t)$  и  $b_{ij}(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, M$ ,  $l = 1, 2, \dots, N$ ):

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij}(t) C_{ijkl} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) F_{ijkl} + \Phi_{kl}(t), \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (da_{ij}/dt) D_{ijkl} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) E_{ijkl}, \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (db_{ij}/dt) D_{ijkl} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N b_{ij}(t) E_{ijkl}. \tag{13}$$

К системам (11)–(13) добавляются уравнения, описывающие движение кривой  $\mathcal{L}$ :

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij}(t) \text{sp}_i(x) \frac{\partial \text{sp}_j(z)}{\partial z}, \tag{14}$$

$$\frac{dz}{dt} = - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij}(t) \text{sp}_j(z) \frac{\partial \text{sp}_i(x)}{\partial x},$$

$$x|_{t=0} = x_\beta, \quad z|_{t=0} = z_\beta, \quad \beta = 1, 2, \dots, B.$$

Выражения для  $C$ ,  $D$ ,  $F$  и  $E$  (мы опускаем индексы) приведены в [6]. Читатель может сам легко получить эти выражения, произведя соответствующие подстановки и интегрирование.

Член  $\Phi_{kl}(t)$  в правой части (11) получен из второго слагаемого в правой части уравнения (7а), где принято  $\delta\psi(x, z) = \text{sp}_k(x)\text{sp}_l(z)$ :

$$\Phi_{kl}(t) = gc(t) \int_{\mathcal{L}} \text{sp}_k(x)\text{sp}_l(z) dz. \tag{15}$$

### Алгоритм расчета решения

Численное решение задачи состоит в определении функций  $\psi$ ,  $\rho_1$  и  $\mu$  и кривой  $\mathcal{L}$  для последовательных моментов времени.

В начальный момент  $t = 0$  задаются:  $\rho_{01}(x, z)$ ,  $\mu_0(x, z)$ ,  $c(t)$  и точки  $x_\beta, z_\beta$ ,  $\beta = 1, 2, \dots, B$ . Функции  $\rho_{01}(x, z)$  и  $\mu_0(x, z)$  фактически задаются наборами  $a_{ij}(0)$  и  $b_{ij}(0)$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ . Эти наборы получаются с помощью разложения  $\rho_{01}(x, z)$  и  $\mu_0(x, z)$  по базисным бикубическим сплайнам. В процессе решения рассчитываются коэффициенты  $c_{ij}(t_e)$ ,  $a_{ij}(t_e)$  и  $b_{ij}(t_e)$  разложений  $\psi_{MN}(x, z, t)$ ,  $\rho_{1, MN}(x, z, t)$  и  $\mu_{MN}(x, z, t)$  по базисным сплайнам (10) и функции  $x_\beta(t_e)$ ,  $z_\beta(t_e)$ , и моменты времени  $t_e$ ,  $e = 1, 2, \dots, E$ . Для этого решаются системы обыкновенных дифференциальных уравнений (12)–(14), например методом Рунге-Кутты. Для вычисления правых частей в уравнениях (12)–(14) нужно рассчитывать коэффициенты  $c_{ij}(t)$ , которые определяются из (11).



В правые части уравнения (11) входят интегралы (15). Для их расчета аппроксимируем кривую  $\mathcal{L}$  ломаной с вершинами в точках  $x_\beta, z_\beta, \beta = 1, 2, \dots, B$  и находим интеграл в правой части (15) по формуле трапеций. После несложных преобразований получим выражение

$$\Phi_{kl} = \frac{gc(t)}{2} \left[ Q_{kl}^{(1)}(z_2 - z_1) + Q_{kl}^{(B)}(z_B - z_{B-1}) + \sum_{\beta=2}^{B-1} Q_{kl}^{(\beta)}(z_{\beta+1} - z_{\beta-1}) \right],$$

где

$$Q_{kl}^{(\beta)} = \text{sp}_k(x_\beta) \text{sp}_l(z_\beta).$$

Остальные величины в правых частях уравнений (11)–(13) рассчитываются по формулам, приведенным в [6] или [8].

## РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В расчетах использовались безразмерные переменные. Масштаб времени  $T$  в данном случае определяется как  $T = \mu_{\text{тип}} / (\rho_{\text{тип}} g H)$ , где  $\mu_{\text{тип}}$  и  $\rho_{\text{тип}}$  – характерные значения вязкости и плотности соответственно.

### Простейшие случаи

Применимость описанного метода иллюстрируется двумя простейшими моделями. В первой из них тяжелое эллипсоидное включение погружается в более легкой окружающей среде. Вязкость в этой модели постоянна, а скачок плотности равен 0.3 (не зависит от времени). Безразмерные координаты выбраны так, что область  $\Omega$  является квадратом  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ . В расчетах использовался набор базисных сплайнов с  $M = 13$  и  $N = 15$ .

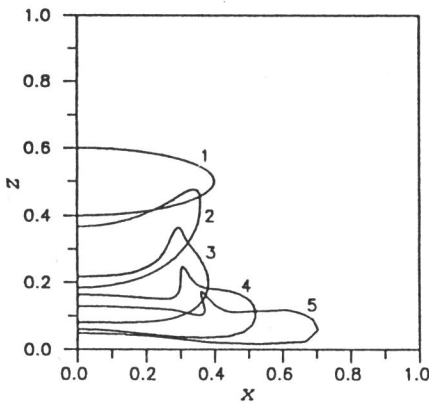


Рис. 2. Погружение anomalно плотной линзы в более легкой окружающей среде. Цифры у кривых соответствуют моментам безразмерного времени: 1 –  $t = 0$ ; 2 –  $t = 130$ ; 3 –  $t = 276$ ; 4 –  $t = 465$ ; 5 –  $t = 775$

На рис. 2 представлено положение кривой  $\mathcal{L}$  в последовательные моменты времени. Хорошо видно, что в процессе погружения тяжелое включение деформируется;

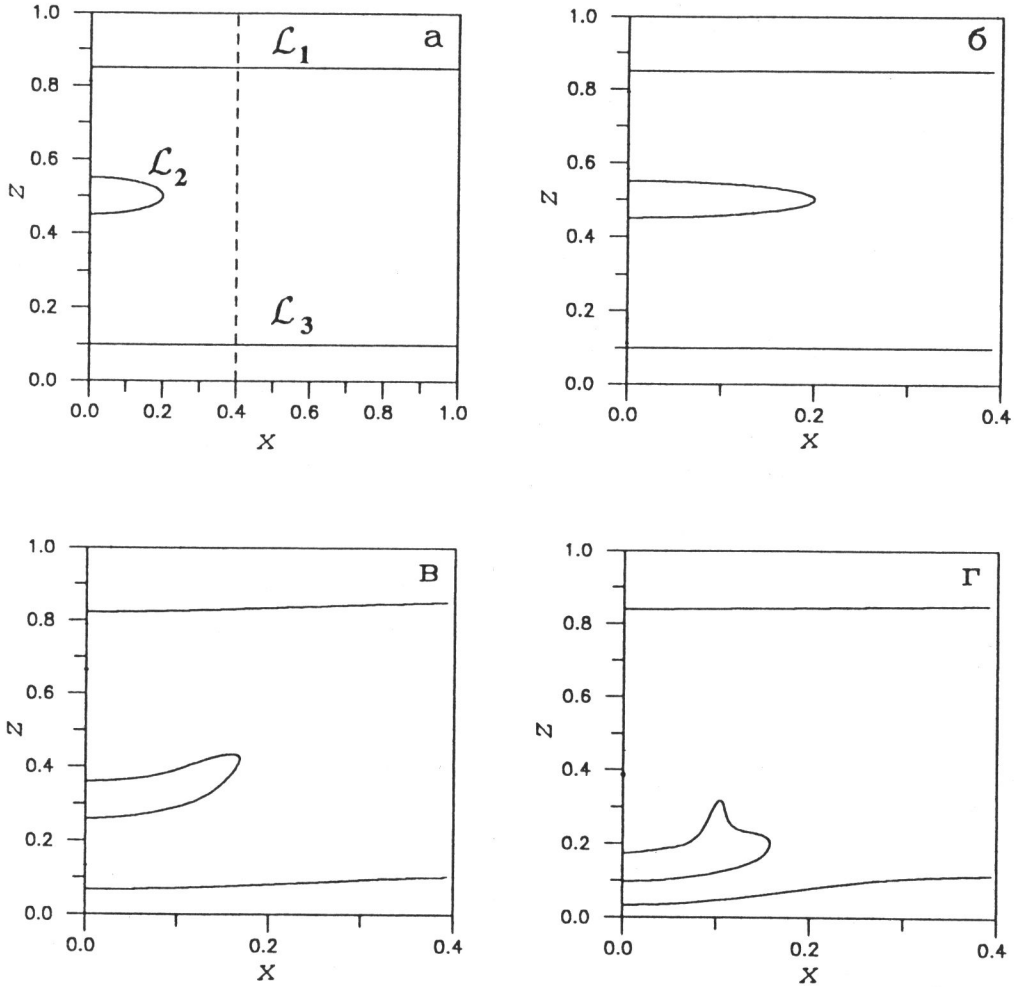


Рис. 3. Погружение линзы в модели с тремя скачками плотности

*a* – начальное положение кривых  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$ ,  $\mathcal{L}_3$ , на которых заданы скачки плотности; *б-г* – положение тех же кривых, но с растяжением по горизонтальной оси: *б* – в начальный момент  $t = 0$ , *в* – в момент  $t = 380$ , *г* – в момент  $t = 1083$  (время безразмерное)

его край затягивается наверх течением вытесненного снизу материала, и в результате образуется выступ. В процессе растекания включения у нижней границы выступ уменьшается.

Вторая простейшая модель иллюстрирует движение трех кривых:  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$  и  $\mathcal{L}_3$ . На рис. 3, *a* представлены начальные положения кривых  $\mathcal{L}_1$  ( $z = 0.85$ ),  $\mathcal{L}_2$  (эллипс) и  $\mathcal{L}_3$  ( $z = 0.1$ ). Скачки плотности  $c_1 = -0.2$ ,  $c_2 = 0.2$  и  $c_3 = -0.3$  выбраны так, чтобы безразмерная плотность выше  $\mathcal{L}_1$  равнялась 0.1, ниже  $\mathcal{L}_3$  составляла 0.6, внутри  $\mathcal{L}_2$  была 0.5, а между  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$ , и  $\mathcal{L}_3$  принимала значение 0.3. Штриховая линия  $x = 0.4$  на рис. 3, *a* отделяет область  $0 \leq x \leq 0.4$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , которая

растянута на рис. 3,б-г для большей наглядности. Последовательные этапы погружения тела, ограниченного кривой  $\mathcal{L}_2$ , приводятся на рис. 3,б-г. Мы видим, что тяжелое включение опускается не до нижней границы, а до уровня примерно  $z = 0.1$ , поскольку плотность ниже этого уровня превосходит плотность включения. В процессе погружения включение деформируется; его край поднимается и на его верхней части, как и в случае первой модели, образуется выступ. Кривая  $\mathcal{L}_1$  вначале изгибается вниз, а затем начинает возвращаться к первоначальному положению. Этого следовало ожидать: при  $t \rightarrow \infty$  начинают сказываться эффекты изостазии.

#### Упрощенная модель эволюции Иллинойского бассейна

Используя описанный подход, мы рассчитали упрощенную модель эволюции Иллинойского осадочного бассейна. Распределение вязкости и непрерывной компоненты плотности приводится на рис. 4.

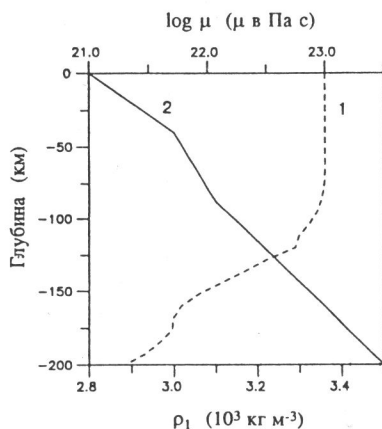


Рис. 4. Зависимость от  $z$  начальных распределений вязкости (1) и непрерывной компоненты плотности (2), принятых при расчете модели Иллинойского бассейна. В начальный момент вязкость и непрерывная компонента плотности не зависят от  $x$

В расчетах приняты значения:  $\mu_{\text{тип}} = 10^{23}$  Па с,  $\rho_{\text{тип}} = 3.5 \times 10^3$  кг м<sup>-3</sup>,  $L = 600$  км (половина области) и  $H = 200$  км; кривая  $\mathcal{L}$ , ограничивающая линзу, первоначально является эллипсом. Скачок плотности на кривой  $\mathcal{L}$  зависит от времени:  $c(t) = c_0(1 - \exp(-\gamma t))$ ; в расчетах принято  $c_0 = 0.13$  и  $\gamma = 0.1$ . На рис. 5 приведены стадии формирования осадочного бассейна (прогиб фундамента) в результате погружения anomalно тяжелой линзы. Выделенная штриховой линией на рис. 5,а,б малая часть области, содержащая линзу, для наглядности растянута на рис. 5,в, где представлены положения кривой  $\mathcal{L}$  в последовательные моменты времени. Для тех же моментов времени рассчитана топография поверхности (рис. 5,г). Расчет топографии проведен по методике, описанной в [5].

Расчеты (см. рис. 5) показывают, что линза, первоначально располагавшаяся на глубине примерно 60–70 км, опускается за 75 млн лет примерно на 7 км. В результате происходит погружение осадочного бассейна на 1.23 км. Затем, как и следовало ожидать, образовавшаяся впадина начинает уменьшаться: линза удаляется от поверхности, попадает в слои с меньшей вязкостью и поэтому слабее воздействует на топографию. В то же время материал астеносферы стремится

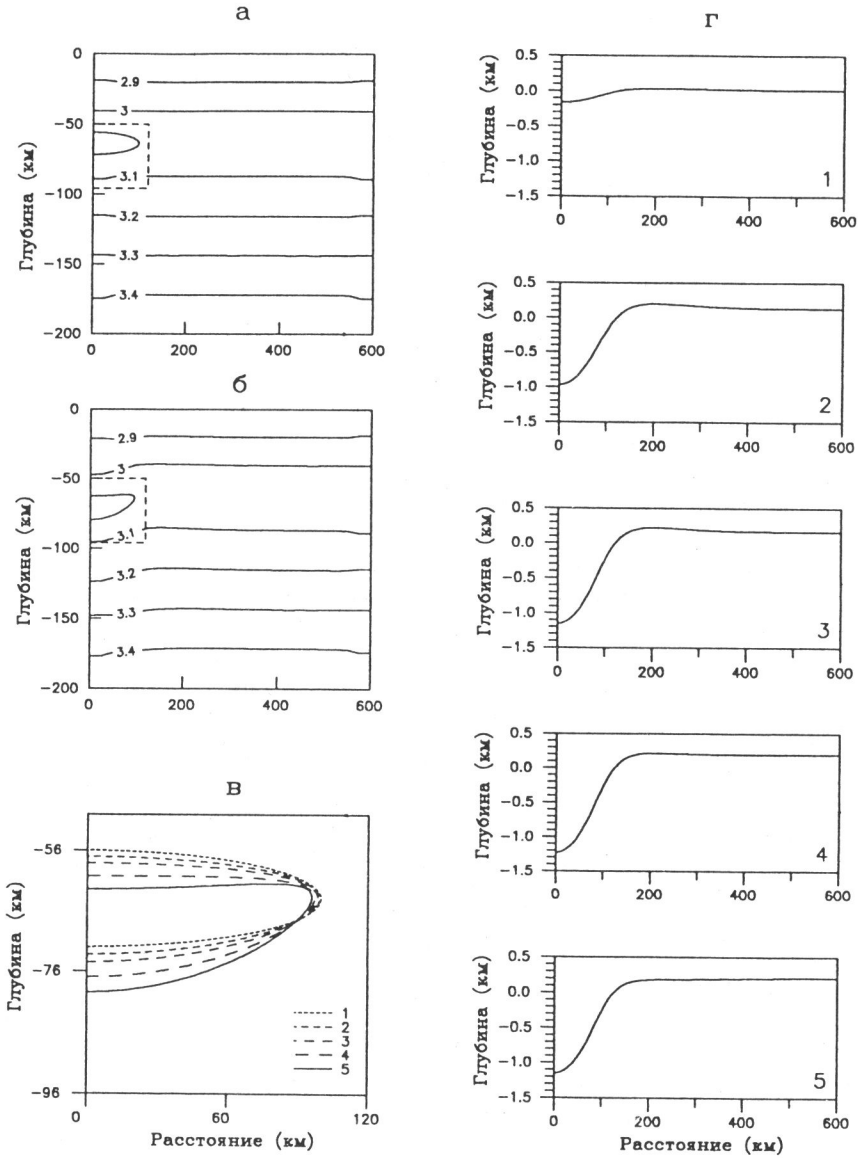


Рис. 5. Последовательное положение погружающейся тяжелой линзы и соответствующая топография

а, б – положение линзы и распределение компоненты плотности в момент  $t = 5$  млн лет (а) и  $t = 110$  млн лет (б); в – то же (в увеличенном масштабе) в моменты времени: 1 – 5 млн лет, 2 – 30 млн лет, 3 – 48 млн лет, 4 – 75 млн лет, 5 – 110 млн лет; г – топография поверхности для тех же пяти моментов времени

заполнить бассейн. Глубина бассейна по прошествии еще 35 млн лет становится равной 1.15 км. Заполнение бассейна происходит во много раз медленнее, чем его образование.

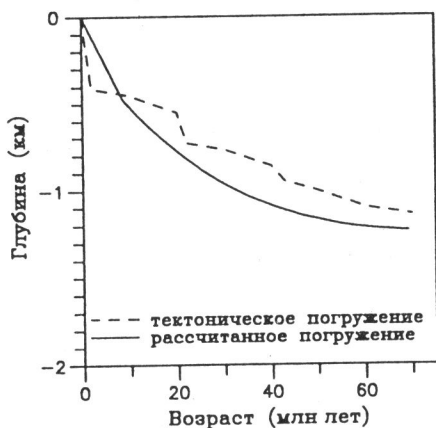


Рис. 6. Графики погружения фундамента Иллинойского бассейна

В модели не была учтена нагрузка, которая добавляется в процессе осадконакопления. Если ее учесть, то глубина бассейна увеличится; кроме того, после прекращения воздействия линзы на поверхность слои осадочных пород могут подняться и подвергнуться эрозии; возможно, этим можно объяснить пробелы в стратиграфических колонках.

Численные результаты, полученные для описанной модели, хорошо согласуются с выводами [10]. На рис. 6 приводятся кривые погружения фундамента Иллинойского бассейна: кривая тектонического погружения бассейна, полученная в результате палеорекострукции фундамента (backstripping procedure) [10]; и кривая погружения, рассчитанная для нашей модели.

## ВЫВОДЫ

Численные результаты показывают, что описанный в работе усовершенствованный метод расчета может успешно применяться при моделировании осадочных бассейнов, образующихся в результате погружения тяжелых тел в астеносфере.

Бикубические сплайны хорошо подходят для аппроксимации непрерывных зависимостей плотности и вязкости от координат. Однако в реальных ситуациях эти зависимости могут и не быть непрерывными: материал магматической линзы после фазового перехода становится плотнее по сравнению с окружающей средой, т.е. возникает скачок плотности на границе линзы. В результате уже нельзя непосредственно аппроксимировать плотность бикубическими сплайнами: они не подходят для описания разрывных функций. Такая трудность преодолена в данной работе: предложенный метод расчета, с одной стороны, сохраняет точность, присущую аппроксимации сплайнами, а с другой стороны, он допускает скачки плотности.

Мы предположили, что вязкость является гладкой функцией. Преодоление этого недостатка (учет скачков вязкости) даст возможность рассчитывать топографию свободной поверхности не приближенно, как это делается, например, в данной работе, а более точно. Авторы надеются усовершенствовать модель, включив в нее скачки вязкости.

нее скачки вязкости.

Предложенная модель формирования осадочного бассейна допускает фазовый переход, зависящий от времени. Такая модификация модели позволяет приблизительно описать зависимость количества вещества, участвующего в фазовом переходе, от времени. В дальнейшем авторы предполагают учитывать тепловые эффекты в моделях эволюции осадочных бассейнов.

*Благодарности.* Работа выполнена при поддержке Международного Научного Фонда (проект МНЕ000) и Российского Фонда Фундаментальных Исследований (код проекта 94-05-16260). Авторы выражают признательность В.Л. Новикову за ряд ценных замечаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лобковский Л.И., Милановский Е.Е., Никишин А.М., Клутинг С. Новые механизмы погружения пострифтовых осадочных бассейнов и их приложение к бассейнам, расположенным на территории бывшего СССР // Тезисы Международного симпозиума "Геодинамическая эволюция осадочных бассейнов". М.: 1992. С.89.
2. Ringwood A.E., Green D.H. An experimental investigation of the gabbro-eclogite transformation and some geophysical implications // Tectonophysics. 1966. Vol.3. P.383-427.
3. Green D.H., Ringwood A.E. A comparison of recent experimental data on the gabbro-garnet granulite-eclogite transition // J. Geology. 1972. Vol.80. P.277-288.
4. Carswell D.A. Eclogite facies rocks. N.-Y.: Blackie & Son; Chapman & Hall. 1990. 396 p.
5. Исмаил-заде А.Т., Лобковский Л.И., Наймарк Б.М. Геодинамическая модель формирования осадочного бассейна в результате образования и последующего фазового перехода магматической линзы в верхней мантии // Геодинамика и прогноз землетрясений. М.: Наука, 1994. С.139-155. (Вычисл. сейсмология; Вып. 26).
6. Лобковский Л.И., Исмаил-заде А.Т., Наймарк Б.М., Никишин А.М., Клутинг С. Механизм погружения земной коры и образования осадочных бассейнов // ДАН. 1993. Т. 330, N 6. С.256-260.
7. Наймарк Б.М. Существование и единственность решения задачи Релея-Тейлора // Теория и анализ сейсмологической информации. М.: Наука, 1985. С.35-46. (Вычисл. сейсмология; Вып.18).
8. Наймарк Б.М., Малевский А.В. Приближенный метод расчета развития гравитационной неустойчивости // Изв АН СССР. Физика Земли. 1986. N 2. С.44-53.
9. Наймарк Б.М. Существование и единственность в малом решения задачи Рэлея-Бенара // Проблемы сейсмологической информации. М.: Наука, 1988. С.94-114. (Вычисл. сейсмология; Вып.21).
10. Heidlauf D.T., Hsui A.T., Klein G.D. Tectonic subsidence analysis of the Illinois basin // J. Geology. 1986. Vol.94, No.6. P.779-794.