УДК 532.5+514.83

О ГЛАДКИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ СОБСТВЕННЫХ МОД ОПЕРАТОРА ПУАНКАРЕ В ШАРОВОМ СЛОЕ

Е.Л.Резников, Л.М.Розенкноп

Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук

Задача о спектре и собственных полях оператора Пуанкаре в шаровом слое, возникающая при анализе собственных колебаний жидкого ядра Земли, не допускает точного решения. В работе изложен один из приближенных подходов – построен гладкий галеркинский базис, упорядоченный по плавности. Критерием плавности выбран нормированный интеграл Дирихле. Полученный базис удобен для построения гладких приближений к главным модам оператора Пуанкаре в шаровом слое.

ON SMOOTH APPROXIMATION TO EIGENFUNCTIONS OF POINCARE'S OPERATOR IN A SPHERICAL SHELL

E. L. Reznikov and L. M. Rozenknop

International Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences

There are no exact solutions to the problem on spectrum and eigenvalues of Poincare's operator in a spherical shell. This problem arises in the studies of free oscillations of the earth's liquid core. We suggest a numerical approach to the problem and construct a Galerkin's basis ordered in smoothness. A normed Dirichlet's integral is chosen to be the smoothness criteria. The basis is convenient for constructing smooth approximations to prinsipal modes of Poincare's operator in a spherical shell.

ВВЕДЕНИЕ

Оператор Пуанкаре возникает в задаче об инерционных волнах в жидком ядре в рамках простейшей модели Земли. В этой модели внешнее ядро представляет собой невязкую несжимаемую жидкость, вращающуюся между двумя концентрическими сферами. Течения в жидком ядре Земли сами по себе весьма интересны для фундаментальной геофизики. С другой стороны, по современным представлениям магнитное поле Земли возбуждается течением проводящей жидкости внешнего ядра Земли. В кинематической теории магнитного динамо это течение считается заданным (см. [1-3]).

Анализ собственных колебаний жидкого ядра (в случае малых отклонений от твердотельного вращения) приводит к задаче о спектре и собственных полях оператора Пуанкаре в шаровом слое. Эта задача не допускает точного решения [4], поэтому, наряду с экспериментом (ссылки см. в [4]), поиск приближенных решений с помощью компьютера может быть полезен. Известно, как устроен непрерывный спектр оператора Пуанкаре вращающейся идеальной жидкости [5] – последовательности Вейля, определяющие эту часть спектра, представляют собой поля, быстро осциллирующие по пространству. Нас интересует: есть ли в этой задаче дискретный спектр. Поэтому мы будем рассматривать "плавные" поля и строить из них приближения к главным, наиболее плавным собственным (возможно, обобщенным) модам оператора Пуанкаре. В данной работе описано построение гладкого галеркинского базиса, упорядоченного по плавности. Критерием плавности выбран нормированный интеграл Дирихле, определенный на гладких полях. Пример использования такого функционала описан в [6]. Полученный базис удобен для построения гладких приближений к главным модам в шаровом слое и может быть полезен в более общей задаче о течении вязкой жидкости во вращающемся шаровом слое для описания решений вне пограничных слоев.

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$\begin{cases} \lambda \mathbf{q} = A\mathbf{q} \equiv [\mathbf{1}_z, \mathbf{q}] - \nabla\Phi, \quad \operatorname{div}\mathbf{q} = 0, & (1) \\ (\mathbf{q}, \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0. & (2) \end{cases}$$

Здесь A – оператор Пуанкаре, возникающий в гидродинамике вращающейся жидкости; Φ – неизвестная скалярная функция (потенциал); Ω – шаровой слой с внутренним радиусом r_0 и внешним, равным единице; $\mathbf{1}_z$ – единичный вектор, направленный вдоль оси z. Этот оператор кососимметричен, его спектр всюду плотен на $[-\imath, \imath]$ ($\imath$ – мнимая единица). Концы отрезка не принадлежат точечному спектру оператора A [4, 5]. Точное решение задачи (1), (2) не известно. Поиск приближенного решения, например методом Галеркина, требует выбора подходящего базиса в соответствующем пространстве функций.

Обозначим через $V(\Omega)$ гильбертово пространство гладких бездивергентных полей в слое Ω, удовлетворяющих граничному условию (2), со скалярным произведением

$$\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle = \int\limits_{\Omega} (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2^*)dv$$

(значок * здесь и далее означает комплексное сопряжение чисел и матриц). В работе [6] был предложен функционал $\mathfrak{R}(\mathbf{q})$, позволяющий различать гладкие поля по плавности (по степени осциллируемости) в пространстве. В данной работе мы строим базис в $V(\Omega)$, элементы которого упорядочены по возрастанию $\mathfrak{R}(\mathbf{q})$. Такой базис удобен для построения плавных галеркинских приближений к собственным или квазисобственным (обобщенным) решениям задачи (1), (2).

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Перечислим ряд известных фактов, используемых в работе.

Введем в Ω сферические координаты r, θ, φ. Известно (см. [7]), что $2n+1$ сферических функций n-го порядка

$$P_n^{m^+}(\theta,\varphi) = \sin(m\varphi)P_n^{(m)}(\cos\theta),$$
$$P_n^{m^-}(\theta,\varphi) = \cos(m\varphi)P_n^{(m)}(\cos\theta), \quad m = 0, 1, ..., n,$$

являются собственными для оператора Δ_s – угловой части оператора Лапласа:

$$\Delta_s P_n^m = -n(n+1)P_n^m, \tag{3}$$

$$\Delta_s = \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right], \tag{4}$$

$$P_n^{(m)}(\cos\theta) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\Big|_{x=\cos\theta},$$

$P_n(x)$ – полином Лежандра n-й степени.

Символ P_n^m в (3) и далее обозначает любую из функций P^{m^+} и $P_n^{m^-}$ (когда это допустимо). Знаки "+" и "−" соответствуют $\sin(m\varphi)$ и $\cos(m\varphi)$ в формулах для сферических функций, в обеих функциях одно и то же $m > 0$. Пусть (l, m) – упорядоченная пара верхних индексов функций P_k^l и P_n^m. Определим на таких парах (l, m) функцию:

$$\gamma_{lm} = \begin{cases} 1, & \text{если знаки в паре образуют сочетание } (+,-), \\ 0, & \text{в случае пар } (+,+) \text{ и } (-,-), \\ -1, & \text{для сочетания } (-,+). \end{cases}$$

Эта функция будет полезна при записи некоторых формул.

Сферические функции удовлетворяют соотношениям [7]

$$\int\limits_{S_1} P_k^l P_n^m \, d\sigma = \delta_{kn}\delta_{lm}(1-|\gamma_{lm}|)Z_{kl}, \tag{5}$$

$$\int\limits_{S_1} (\nabla_s P_k^l, \nabla_s P_n^m) \, d\sigma = k(k+1)\delta_{kn}\delta_{lm}(1-|\gamma_{lm}|)Z_{kl}, \tag{6}$$

где S_1 – единичная сфера; $\nabla_s = \mathbf{e}_\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e}_\varphi\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$ – угловой градиент; $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ – орты локального базиса,

$$Z_{kl} = \int\limits_{S_1} (P_k^l)^2 \, d\sigma. \tag{7}$$

Из (3) и (4) следует, что

$$(P_k^l)''_\theta + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}(P_k^l)'_\theta + \left(k(k+1) - \frac{l^2}{\sin^2\theta}\right) P_k^l = 0. \tag{8}$$

Напомним, что векторные поля, удовлетворяющие соотношениям

$$\mathbf{B}_t = \mathrm{rot}(T(\mathbf{r})\mathbf{r}) = [\nabla T, \mathbf{r}] \quad \text{и} \quad \mathbf{B}_p = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}(P(\mathbf{r})\mathbf{r})$$

($T(\mathbf{r})$ и $P(\mathbf{r})$ – произвольные скалярные функции), называются соответственно тороидальными и полоидальными полями. Можно показать [1, 8], что

$$\mathrm{rot}\mathbf{B}_p = -\mathrm{rot}(\Delta P(\mathbf{r})\mathbf{r}). \tag{9}$$

Произвольное поле $\mathbf{B}$ из $V(\Omega)$ может быть представлено в виде: $\mathbf{B} = \mathbf{B}_t + \mathbf{B}_p$, где $\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{B}_p$ определяются полем $\mathbf{B}$ однозначно [1, 8].

3. ВЫБОР БАЗИСА В ПРОСТРАНСТВЕ БЕЗДИВЕРГЕНТНЫХ ПОЛЕЙ В ШАРОВОМ СЛОЕ

Построим базис в $V(\Omega)$ из тороидальных и полоидальных полей вида

$$\mathbf{t}_\alpha = c_{t_\alpha}\mathrm{rot}(R_i(r)P_k^l(\theta,\varphi)\mathbf{r}),$$
$$\mathbf{p}_\beta = c_{p_\beta}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}(\tilde{R}_j(r)P_n^m(\theta,\varphi)\mathbf{r}).$$

Здесь α и β обозначают тройки индексов (i,k,l) и (j,n,m). Множители c_{t_α} и c_{p_β} и функции $R_i(r)$ и $\tilde{R}_j(r)$ будут выбраны позднее. Мы хотим, чтобы эти поля удовлетворяли граничному условию (2). Поля $\mathbf{t}_\alpha$ не имеют радиальной компоненты, поэтому для них условие (2) выполняется при любых R_i. Чтобы поля $\mathbf{p}_\beta$ удовлетворяли (2), должны выполняться условия

$$\tilde{R}_j(r_0) = \tilde{R}_j(1) = 0. \tag{10}$$

Матрица Грама системы полей $\{\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{p}_\beta\}$ состоит из элементов трех видов: $\langle\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_\beta\rangle$, $\langle\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{p}_\beta\rangle$, $\langle\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta\rangle$. Используя (5), (6) и (9), можно вычислить эти элементы:

а. $$\langle\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_\beta\rangle = \int\limits_\Omega \left(\mathrm{rot}(R_iP_k^l\mathbf{r}), \mathrm{rot}(R_jP_n^m\mathbf{r})\right) dv = \int\limits_{r_0}^{1} r^2R_iR_j\,dr \int\limits_{S_1} \left(\nabla_s P_k^l, \nabla_s P_n^m\right) d\sigma =$$
$$= k(k+1)\delta_{kn}\delta_{lm}(1-|\gamma_{lm}|)Z_{kl}\int\limits_{r_0}^{1} r^2R_iR_j\,dr.$$

б. $$\langle\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{p}_\beta\rangle = \int\limits_\Omega (\mathrm{rot}(R_iP_k^l\mathbf{r}),\ \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}(\tilde{R}_jP_n^m\mathbf{r}))dv =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}[R_i P_k^l \mathbf{r},\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\tilde{R}_j P_n^m \mathbf{r})]dv + \int\limits_{\Omega} (R_i P_k^l \mathbf{r},\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\tilde{R}_j P_n^m \mathbf{r}))dv =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega} ([R_i P_k^l \mathbf{r},\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\tilde{R}_j P_n^m \mathbf{r})], \mathbf{e}_r)d\sigma - \int\limits_{\Omega} (R_i P_k^l \mathbf{r}, \operatorname{rot}(\Delta(\tilde{R}_j P_n^m \mathbf{r})))dv = 0.$$

в. $\langle \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta \rangle = \int\limits_{\Omega} (\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\tilde{R}_i P_k^l \mathbf{r}), \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\tilde{R}_j P_n^m \mathbf{r}))dv =$

$$= \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}[\operatorname{rot}(\tilde{R}_j P_n^m \mathbf{r}), \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\tilde{R}_i P_k^l \mathbf{r})]\, dv - \int\limits_{\Omega} (\operatorname{rot}(\tilde{R}_j P_n^m \mathbf{r}), \operatorname{rot}(\Delta(\tilde{R}_i P_k^l)\mathbf{r}))dv.$$

Первый интеграл преобразуется к поверхностному и обращается в нуль, так как в подынтегральном выражении появляется множитель $\tilde{R}_j$, равный нулю на концах отрезка. Далее, так как

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \Delta_s\right),$$

то

$$\Delta(\tilde{R}_i P_k^l) = -\frac{P_k^l}{r^2}\left(k(k+1) - \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\right)\tilde{R}_i$$

и второй интеграл приобретает вид

$$\int\limits_{r_0}^{1} \tilde{R}_i B_k(\tilde{R}_j)\, dr \int\limits_{S_1} (\nabla_s P_k^l, \nabla_s P_n^m)\, d\sigma,$$

где

$$B_k = k(k+1) - \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right).$$

На множестве гладких функций на $[r_0, 1]$, удовлетворяющих (10), B_k – положительный самосопряженный оператор. Окончательно:

$$\langle \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta \rangle = k(k+1)\delta_{kn}\delta_{lm}(1 - |\gamma_{lm}|)Z_{kl} \int\limits_{r_0}^{1} \tilde{R}_i B_k(\tilde{R}_j)\, dr.$$

Если $\{R_i\}$ и $\{\tilde{R}_j\}$ выбрать так, чтобы $\int\limits_{r_0}^{1} r^2 R_i R_j\, dr$ и $\int\limits_{r_0}^{1} \tilde{R}_i B_k(\tilde{R}_j)\, dr$ равнялись нулю при $i \neq j$, то матрица Грама полученной системы станет диагональной. Если положить затем

$$c_{t_\alpha} = \left[k(k+1) Z_{kl} \int\limits_{r_0}^{1} r^2 R_i^2 \, dr \right]^{-1/2}, \tag{11}$$

$$c_{p_\beta} = \left[k(k+1) Z_{kl} \int\limits_{r_0}^{1} \tilde{R}_j B_k(\tilde{R}_j) \, dr \right]^{-1/2}, \tag{12}$$

то матрица Грама станет единичной. Функции R_i и $\tilde{R}_j$, кроме того, должны быть выбраны так, чтобы построенная система $\{\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{p}_\beta\}$ оказалась полной. Тогда она образует ортонормальный базис в $V(\Omega)$. Выбор функций R_i и $\tilde{R}_j$ описан в п.6.

4. МАТРИЦА ОПЕРАТОРА ПУАНКАРЕ В ВЫБРАННОМ БАЗИСЕ И СТРУКТУРА ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ

Предположим, что $\{R_i\}$, $\{\tilde{R}_j\}$ и множители c_{t_α}, c_{p_β} выбраны и базис $\{\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{p}_\beta\}$ построен. Найдем элементы матрицы оператора A в этом базисе:

$$\mathfrak{a}_{\alpha\beta} = \langle A\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{q}_\beta \rangle = \int\limits_{\Omega} ([\mathbf{1}_z, \mathbf{q}_\alpha], \mathbf{q}_\beta) \, dv.$$

Здесь $\mathbf{q}_\alpha$, $\mathbf{q}_\beta$ – произвольные базисные поля. Интеграл $\int\limits_{\Omega} (\nabla\Phi_\alpha, \mathbf{q}_\beta) \, dv = 0$, так как $\operatorname{div} \mathbf{q}_\alpha = 0$ и $\mathbf{q}_\beta$ удовлетворяет (2) на $\partial\Omega$. Пусть $\alpha = (i, k, l)$, $\beta = (j, n, m)$. Матрица оператора A состоит из элементов трех видов: $\langle A\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle$, $\langle A\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{p}_\beta \rangle$, $\langle A\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta \rangle$. Вычисления, которые мы здесь не приводим, дают:

$$\langle A\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle = c_{t_\alpha} c_{t_\beta} \int\limits_{\Omega} ([\mathbf{1}_z, \operatorname{rot}(R_i P_k^l \mathbf{r})], \operatorname{rot}(R_j P_n^m \mathbf{r})) \, dv = \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} \gamma_{lm} \frac{1}{k(k+1)},$$

$$\langle A\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta \rangle = c_{p_\alpha} c_{p_\beta} \int\limits_{\Omega} ([\mathbf{1}_z, \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\tilde{R}_i P_k^l \mathbf{r})], \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\tilde{R}_j P_n^m \mathbf{r})) \, dv =$$

$$= \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} \gamma_{lm} \frac{1}{k(k+1)},$$

$$\langle A\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{p}_\beta \rangle = c_{t_\alpha} c_{p_\beta} \int\limits_{\Omega} ([\mathbf{1}_z, \operatorname{rot}(R_i P_k^l \mathbf{r})], \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\tilde{R}_j P_n^m \mathbf{r})) \, dv =$$

$$= c_{t_\alpha} c_{p_\beta} \left[n(n+1) \int\limits_{r_0}^{1} r R_i \tilde{R}_j \, dr \int\limits_{S_1} \sin\theta \frac{\partial P_k^l}{\partial \theta} P_n^m \, d\sigma + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{r_0}^{1} r R_i \frac{\partial}{\partial r}(r \tilde{R}_j) \, dr \int\limits_{S_1} \cos\theta \, (\nabla_s P_k^l, \nabla_s P_n^m) \, d\sigma \right].$$

Интегралы по единичной сфере можно вычислить, пользуясь рекуррентными соотношениями для полиномов Лежандра [7]. Эти интегралы отличны от нуля при

$l = m$, $\gamma_{lm} = 0$ и $k - n = \pm 1$.

Из вычислений $\mathfrak{a}_{\alpha\beta}$ следует:

а. Каждому l соответствует инвариантное (относительно оператора A) подпространство $V^l(\Omega)$, и $V(\Omega) = \oplus_l V^l(\Omega)$.

б. Каждое $V^l(\Omega)$ распадается на два инвариантных подпространства: V_1^l, порожденное базисными полями

$$\{\mathbf{t}^l_{ik}, \mathbf{p}^l_{jn}, \quad k = l, l+2, l+4, \ldots, \quad n = l+1, l+3, l+5, \ldots\}, \qquad \text{и}$$

V_2^l, порожденное полями

$$\{\mathbf{t}^l_{ik}, \mathbf{p}^l_{jn}, \quad k = l+1, l+3, l+5, \ldots, \quad n = l, l+2, l+4, \ldots\}.$$

Отметим, что такая структура $V(\Omega)$ возникает при любом выборе $\{R_i\}$, $\{\tilde{R}_j\}$, дающем единичную матрицу Грама.

Замечание. В дальнейшем будем считать, что $l > 0$, так как $l = 0$ соответствует вырожденному случаю, который мы не рассматриваем.

5. КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА ПЛАВНОСТИ ПОЛЯ И ЕЕ ВИД В ИНВАРИАНТНОМ ПОДПРОСТРАНСТВЕ

Пусть $\tilde{V} = V_i^l$, $l > 0$, $i = 1$ или 2, $\{\mathbf{t}^l_{ik}, \mathbf{p}^l_{jn}\}$ – набор тороидальных и полоидальных полей, образующих базис в $\tilde{V}$. Функционал $\mathfrak{R}(\mathbf{q})$ имеет вид (см. [1])

$$\mathfrak{R}(\mathbf{q}) = \left[\frac{\int\limits_\Omega B\,dv}{\int\limits_\Omega |\mathbf{q}|^2 dv}\right]^{1/2},$$

где $B = \mathrm{Sp}(D^* D)$; $D = G^{1/2} Q G^{-1/2}$; G – метрический тензор в Ω; Q – тензор ковариантной производной поля $\mathbf{q}$. Все матрицы записываются в сферических координатах.

Пусть $\mathbf{q}$ – единичный вектор в $\tilde{V}$:

$$\mathbf{q} = \sum_\alpha c_\alpha \mathbf{q}_\alpha, \quad |\mathbf{q}|^2 = \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = \sum_\alpha |c_\alpha|^2 = 1.$$

Тогда:

$$D(\mathbf{q}) = \sum_\alpha c_\alpha D(\mathbf{q}_\alpha), \quad D^* D = D^*(\mathbf{q}) D(\mathbf{q}) = \sum_{\alpha,\beta} c^*_\alpha c_\beta D^*(\mathbf{q}_\alpha) D(\mathbf{q}_\beta).$$

Подставляя это выражение в формулу для $\mathfrak{R}(\mathbf{q})$, получаем

$$\mathfrak{R}^2(\mathbf{q}) = \sum_{\alpha,\beta} c^*_\alpha c_\beta M_{\alpha\beta},$$

где $M_{\alpha\beta} = \int\limits_\Omega \mathrm{Sp}(D^*(\mathbf{q}_\alpha) D(\mathbf{q}_\beta)) dv$.

Так как не существует ковариантно постоянных полей, удовлетворяющих условиям (2), то $\Re(\mathbf{q}) > 0$ для любого $\mathbf{q} \neq 0$ из $\tilde{V}$, и $\{M_{\alpha\beta}\}$ – положительно определенная матрица.

Выпишем выражения для $M_{\alpha\beta}$. Обозначим $\alpha = (i,k,l)$, $\beta = (j,n,l')$, $b_k = k(k+1)$. Элементы $M_{\alpha\beta}$ могут быть трех видов: $M(\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_\beta)$, $M(\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{p}_\beta)$, $M(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta)$. Матрицы $D(\mathbf{t}_\alpha)$ и $D(\mathbf{p}_\beta)$ вычисляются по формулам для ковариантных производных (см., например, [6]).После некоторых преобразований и интегрирования по угловым переменным (см. приложение А) элементы $M_{\alpha\beta}$ приобретают вид

$$M(\mathbf{t}_{ik}^l, \mathbf{t}_{jn}^{l'}) = \delta_{kn}(1 - |\gamma_{ll'}|) \int_{r_0}^{1} \left[b_k R_i R_j + r^2 R_i' R_j'\right] dr \left[\int_{r_0}^{1} r^2 R_i^2 dr \int_{r_0}^{1} r^2 R_j^2 dr\right]^{-1/2}, \quad (13)$$

$M(\mathbf{t}_{ik}^l, \mathbf{p}_{jn}^{l'}) = 0$ при любых k и n противоположной четности (т.е. в любом $\tilde{V}$),

$$M(\mathbf{p}_{ik}^l, \mathbf{p}_{jn}^{l'}) = \delta_{kn}(1 - |\gamma_{ll'}|) \times$$
$$\times \int_{r_0}^{1} \left[b_k^2 \frac{\tilde{R}_i \tilde{R}_j}{r^2} + 2b_k \left(\tilde{R}_i' \tilde{R}_j' - \frac{\tilde{R}_i \tilde{R}_j}{r^2}\right) + r^2 \left(\frac{1}{r}(r\tilde{R}_i)'\right)' \left(\frac{1}{r}(r\tilde{R}_j)'\right)'\right] dr \times$$
$$\times \left[\int_{r_0}^{1} \tilde{R}_i B_k(\tilde{R}_i) dr \int_{r_0}^{1} \tilde{R}_j B_k(\tilde{R}_j) dr\right]^{-1/2}. \quad (14)$$

6. ЗАВЕРШЕНИЕ ПОСТРОЕНИЯ БАЗИСА В ИНВАРИАНТНОМ ПОДПРОСТРАНСТВЕ

Нам осталось выбрать функции R_i и $\tilde{R}_j$, входящие в $\mathbf{t}_\alpha$ и $\mathbf{t}_\beta$. Схема выбора функций R_i и $\tilde{R}_j$ одинакова. По существу решается следующая задача: найти наборы функций $\{R_i\}$ и $\{\tilde{R}_j\}$, $i = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$, диагонализирующих одновременно матрицу Грама системы $\{\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{p}_\beta\}$ и матрицу $\{M_{\alpha\beta}\}$. Дополнительные граничные условия, необходимые для определения R_i и $\tilde{R}_j$, совпадают с условиями трансверсальности, которые возникли бы при поиске R_i и $\tilde{R}_j$ вариационным методом.

Из формул (13) и (14) видно, что диагонализацию матрицы $\{M_{\alpha\beta}\}$ можно проводить поблочно (блоки нумеруются индексом k и занимают главную диагональ этой матрицы). Полученные ниже (в пп.6.1, 6.2) функции R_i и $\tilde{R}_j$ зависят, конечно, от индекса k, но мы этот индекс будем опускать, чтобы не загромождать обозначения.

6.1. Выбор $\{R_i\}$ при фиксированном k

Для функций R_i дополнительные граничные условия принимают вид

$$R_i'(r_0) = R_i'(1) = 0. \quad (15)$$

На множестве таких функций введем скалярное произведение

$$(R_i, R_j)_1 = \int\limits_{r_0}^{1} r^2 R_i R_j \, dr. \tag{16}$$

Обозначим

$$T_k = \frac{1}{r^2} B_k = \frac{1}{r^2}\left(b_k - \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right)\right)$$

и рассмотрим оператор T_k на функциях, удовлетворяющих (15). Оператор B_k симметричен на таких функциях, поэтому собственные функции оператора T_k ортогональны относительно скалярного произведения (16). Спектр оператора T_k дискретен и все его собственные числа лежат правее b_k.

Интегрируя по частям и используя (15), получаем

$$\int\limits_{r_0}^{1} \left[b_k R_i R_j + r^2 R_i' R_j'\right] dr = \int\limits_{r_0}^{1} \left[b_k R_i R_j - R_i \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) R_j\right] dr = \int\limits_{r_0}^{1} R_i B_k R_j \, dr.$$

Теперь выражение в правой части (13) принимает вид

$$\int\limits_{r_0}^{1} r^2 R_i T_k R_j \, dr / |R_i|_1 |R_j|_1 = (R_i, T_k R_j)_1 / |R_i|_1 |R_j|_1.$$

Покажем, что в качестве R_i можно взять собственные функции оператора T_k на $[r_0, 1]$ с граничными условиями (15). Уравнение

$$T_k R = \lambda R \qquad (\lambda = \xi^2) \tag{17}$$

имеет общее решение

$$R = C_1 j_k(\xi r) + C_2 y_k(\xi r), \tag{18}$$

где j_k и y_k – сферические бесселевы функции k-го порядка [7]. Условия (15) дают систему уравнений для определения C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 j_k'(\xi r_0) + C_2 y_k'(\xi r_0) = 0 \\ C_1 j_k'(\xi) + C_2 y_k'(\xi) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Пользуясь соотношением

$$f_n'(z) = f_{n-1}(z) - \frac{n+1}{z} f_n(z) \tag{20}$$

для сферических бесселевых функций [10], можно записать определитель этой системы:

$$\det_1(\xi) = \begin{vmatrix} \xi j_{k-1}(\xi r_0) - \dfrac{k+1}{r_0} j_k(\xi r_0) & \xi y_{k-1}(\xi r_0) - \dfrac{k+1}{r_0} y_k(\xi r_0) \\ \xi j_{k-1}(\xi) - (k+1) j_k(\xi) & \xi y_{k-1}(\xi) - (k+1) y_k(\xi) \end{vmatrix}.$$

Нули $\det_1(\xi)$ дают набор $\{\xi_i\}$ и соответствующий набор $\{R_i\}$:

$$R_i(r) = C_1(\xi_i) j_k(\xi_i r) + C_2(\xi_i) y_k(\xi_i r),$$

где $C_1(\xi_i)$, $C_2(\xi_i)$ – решение системы (19) при $\xi = \xi_i$. Итак:

$$(R_i, R_j)_1 = \delta_{ij} \xi_i^2 |R_i|_1^2,$$
$$M(\mathbf{t}_{ik}^l, \mathbf{t}_{jn}^{l'}) = \delta_{kn} \delta_{ij} (1 - |\gamma_{ll'}|) \xi_i^2.$$

Построенные функции $\{R_i\}$ диагонализируют тороидальную часть матрицы $\{M_{\alpha\beta}\}$, числа $\xi_i = \Re(\mathbf{t}_{ik}^l)$ дают оценку плавности базисных полей.

6.2. Выбор $\{\tilde{R}_i\}$ при фиксированном k

Функции $\tilde{R}_i$ уже подчинены условиям (10). Пусть выполняется еще одно граничное условие

$$(r\tilde{R}_i')' = r\tilde{R}_i'' + \tilde{R}_i' = 0 \quad \text{в точках } r_0 \text{ и } 1. \tag{21}$$

Обозначим

$$(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j)_2 = \int_{r_0}^{1} \tilde{R}_i B_k \tilde{R}_j \, dr.$$

Оператор B_k симметричен и положителен на функциях, удовлетворяющих (10), поэтому $(\; , \;)_2$ – скалярное произведение на таких функциях. Условия (10) и (21) позволяют (см. приложение Б) записать правую часть (14) в виде

$$\int_{r_0}^{1} \tilde{R}_i B_k T_k \tilde{R}_j \, dr / (|\tilde{R}_i|_2 |\tilde{R}_j|_2)^{1/2} = (\tilde{R}_i, T_k \tilde{R}_j)_2 / (|\tilde{R}_i|_2 |\tilde{R}_j|_2)^{1/2}. \tag{22}$$

Ядра дифференциальных операторов B_k и T_k совпадают и состоят из линейных комбинаций функций r^k и $r^{-(k+1)}$. Рассмотрим функции $\tilde{R}$ вида

$$\tilde{R} = C_1 j_k(\varepsilon r) + C_2 y_k(\varepsilon r) + C_3 r^k + C_4 r^{-(k+1)}, \tag{23}$$

где первые два члена – общее решение (18) уравнения (17) при $\lambda = \varepsilon^2$, а оставшиеся два – из ядра оператора T_k. Такие функции удовлетворяют дифференциальному уравнению четвертого порядка:

$$T_k^2 \tilde{R} = \varepsilon^2 T_k \tilde{R}. \tag{24}$$

Возьмем в качестве $\tilde{R}$ функции вида (23), удовлетворяющие уравнению (24) и граничным условиям (10), и (21). Эти условия дают систему из четырех уравнений для определения C_n, $n = 1, \ldots, 4$. Соотношение (20) позволяет записать определитель этой системы в виде

$$\det{}_2(\varepsilon) = \begin{vmatrix} j_k(\varepsilon r_0) & y_k(\varepsilon r_0) & r_0^k & r_0^{-(k+1)} \\ -\varepsilon j_{k-1}(\varepsilon r_0) & -\varepsilon y_{k-1}(\varepsilon r_0) & \varepsilon^2 r_0^{k+1} - (2k+1) r_0^{k-1} & \varepsilon^2 r_0^{-k} \\ j_k(\varepsilon) & y_k(\varepsilon) & 1 & 1 \\ -\varepsilon j_{k-1}(\varepsilon) & -\varepsilon y_{k-1}(\varepsilon) & \varepsilon^2 - (2k+1) & \varepsilon^2 \end{vmatrix}.$$

Зная нули $\{\varepsilon_j\}$ функции $\det_2(\varepsilon)$, можно найти $C_n(\varepsilon_j)$, $n = 1, \ldots, 4$ и, тем самым, $\tilde{R}_j$. Для вычисления этих нулей выражение для $\det_2(\varepsilon)$ можно упростить, используя теорему Лапласа о разложении определителя и соотношение [10]:

$$\begin{vmatrix} j_k(\varepsilon) & y_k(\varepsilon) \\ j_{k-1}(\varepsilon) & y_{k-1}(\varepsilon) \end{vmatrix} = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Проверим, что

$$(\tilde{R}_i, T_k \tilde{R}_j)_2 = \varepsilon_i^2 \delta_{ij} (\tilde{R}_i, \tilde{R}_j)_2. \tag{25}$$

Действительно:

$$(\tilde{R}_i, T_k \tilde{R}_j)_2 = \int\limits_{r_0}^{1} \tilde{R}_i B_k T_k \tilde{R}_j \, dr = \int\limits_{r_0}^{1} r^2 \tilde{R}_i T_k^2 \tilde{R}_j \, dr = \varepsilon_j^2 \int\limits_{r_0}^{1} r^2 \tilde{R}_i T_k \tilde{R}_j \, dr =$$
$$= \varepsilon_j^2 \int\limits_{r_0}^{1} \tilde{R}_i B_k \tilde{R}_j \, dr = \varepsilon_j^2 (\tilde{R}_i, \tilde{R}_j)_2.$$

С другой стороны, оператор $B_k T_k$ симметричен на функциях, удовлетворяющих (10) и (21), поэтому $(\tilde{R}_i, T_k \tilde{R}_j)_2 = \varepsilon_i^2 (\tilde{R}_i, \tilde{R}_j)_2$, из чего следует (25). Построенные функции $\{\tilde{R}_j\}$ удовлетворяют нужным требованиям, и поэтому

$$M(\mathbf{p}_{ik}^l, \mathbf{p}_{jn}^{l'}) = \delta_{kn} \delta_{ij} (1 - |\gamma_{ll'}|) \varepsilon_i^2, \qquad \mathfrak{R}(\mathbf{p}_{ik}^l) = \varepsilon_i.$$

6.3. Полнота систем функций $\{R_i\}$ и $\{\tilde{R}_j\}$ при фиксированном k

Из описанных выше построений ясно, что $\{R_i\}$ и $\{\tilde{R}_j\}$ образуют ортогональные системы функций на $[r_0, 1]$ относительно скалярных произведений $(\, , \,)_1$ и $(\, , \,)_2$ соответственно. Из теории линейных дифференциальных операторов [11] вытекает, что эти системы функций полны в $L_2(r_0, 1)$ в нормах $| \; |_1$ и $| \; |_2$.

7. ПОСТРОЕНИЕ УПОРЯДОЧЕННОГО БАЗИСА

Произвольная функция на сфере разлагается в ряд Фурье по сферическим функциям [4]. Из этого факта и из полноты систем функций $\{R_i\}$ и $\{\tilde{R}_j\}$ при фиксированном k следует, что набор полей $\{\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{p}_\beta\}$ образует ортонормированный базис в $V(\Omega)$ (это можно извлечь из анализа коэффициентов Фурье разложения произвольного поля по системе $\{\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{p}_\beta\}$).

Теперь в каждом инвариантном подпространстве $\tilde{V}$ объединим наборы $\{\xi_i\}$ и $\{\varepsilon_j\}$ и упорядочим эти числа по возрастанию. В результате получим набор чисел $\{\Re_N\}$, $\Re_1 < \Re_2 < \ldots$ и соответствующую последовательность $\{\mathbf{q}_N\}$, $\Re_N = \Re(\mathbf{q}_N)$. Тороидальные и полоидальные поля в $\{\mathbf{q}_N\}$ перемешаны. Упорядоченная таким образом последовательность $\{\mathbf{q}_N\}$ и есть тот базис, который мы хотели построить.

Благодарность. Авторы благодарны М.М.Вишику за поддержку и ценные советы.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ $\{M_{\alpha\beta}\}$

Пусть $\mathbf{t}_\alpha = c_{t_\alpha}\mathrm{rot}(R_i P_k^l \mathbf{r})$, $\mathbf{p}_\beta = c_{p_\beta}\mathrm{rotrot}(\tilde{R}_j P_m^{l'} \mathbf{r})$.

Обозначим $\alpha = (i, k, l)$, $\beta = (j, m, l')$, $P_\alpha = P_k^l$, $P_\beta = P_m^{l'}$, $b_k = k(k+1)$, $b_m = m(m+1)$.

Формулы для ковариантной производной [9] и метрического тензора в сферических координатах дают выражения для матриц D (см. п.5):

$$D(\mathbf{t}_\alpha) = c_{t_\alpha}\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{R_i}{r\sin\theta}\dfrac{\partial P_\alpha}{\partial\varphi} & \dfrac{R_i}{r}\dfrac{\partial P_\alpha}{\partial\theta} \\ \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial R_i}{\partial r}\dfrac{\partial P_\alpha}{\partial\varphi} & \dfrac{R_i}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial P_\alpha}{\partial\varphi}\right) & -\dfrac{R_i}{r}\left[b_k P_\alpha + (P_\alpha)''_\theta\right] \\ -\dfrac{\partial R_i}{\partial r}\dfrac{\partial P_\alpha}{\partial\varphi} & -\dfrac{R_i}{r}(P_\alpha)''_\theta & -\dfrac{R_i}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial P_\alpha}{\partial\varphi}\right) \end{pmatrix},$$

$$D(\mathbf{p}_\beta) = c_{t_\beta} Q,$$

где Q – матрица, составленная из столбцов Q_1, Q_2, Q_3:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} b_m \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\tilde{R}_j}{r}\right) P_\beta \\ \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\tilde{R}_j)\right)\dfrac{\partial P_\beta}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r\tilde{R}_j)}{\partial r}\right)\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial P_\beta}{\partial\varphi} \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r^2}\left[b_m\tilde{R}_j - \dfrac{\partial}{\partial r}(r\tilde{R}_j)\right]\dfrac{\partial P_\beta}{\partial\theta} \\ \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\tilde{R}_j)(P_\beta)''_\theta + \dfrac{\tilde{R}_j}{r^2} b_m P_\beta \\ \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\tilde{R}_j)\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial P_\beta}{\partial\varphi}\right) \end{pmatrix},$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r^2 \sin\theta} \left[b_m \tilde{R}_j - \dfrac{\partial}{\partial r}(r\tilde{R}_j) \right] \dfrac{\partial P_\beta}{\partial \varphi} \\ \dfrac{1}{r^2} \dfrac{\partial}{\partial r}(r\tilde{R}_j) \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \left(\dfrac{\partial}{\partial \theta} \left(\dfrac{P_\beta}{\sin\theta} \right) \right) \\ - \left[b_m \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial \tilde{R}_j}{\partial r} P_\beta + \dfrac{1}{r^2} \dfrac{\partial (r\tilde{R}_j)}{\partial r} (P_\beta)''_\theta \right] \end{pmatrix}.$$

Вычислим теперь элементы M_{α_β} в каждом из трех случаев.

а. $M(\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_\beta) = \int\limits_\Omega \mathrm{Sp}(D^*(\mathbf{t}_\alpha) D(\mathbf{t}_\beta)) dV$. Преобразования с учетом формулы для ∇_s (см. п. 2.1) приводят к выражению

$$M_{\alpha\beta} = c_{t_\alpha} c_{t_\beta} \left\{ \int\limits_{r_0}^{1} R_i R_j \, dr \left[\int\limits_{S_1} (\nabla_s P_\alpha \cdot \nabla_s P_\beta) d\sigma + b_k b_m \int\limits_{S_1} P_\alpha P_\beta \, d\sigma \right] + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{r_0}^{1} r^2 R_i' R_j' \, dr \int\limits_{S_1}^{1} (\nabla_s P_\alpha \cdot \nabla_s P_\beta) d\sigma + \int\limits_{r_0}^{1} R_i R_j \, dr \int\limits_{S_1} W d\sigma \right\}, \qquad (\text{П}1)$$

где

$$W = 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial P_\alpha}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial P_\beta}{\partial \varphi} \right) + b_k P_\alpha (P_\beta)''_\theta + b_m (P_\alpha)''_\theta + 2 (P_\alpha)''_\theta (P_\beta)''_\theta.$$

Интегралы по единичной сфере в первых трех слагаемых в (П1) определены формулами (5) и (6). Осталось вычислить $I = \int\limits_{S_1} W d\sigma$. Из вида W следует, что $I = 0$ при $\gamma_{ll'} \neq 0$, из-за интегрирования по φ. Будем считать, что $\gamma_{ll'} = 0$ и введем обозначение $P_\alpha = h_\alpha(\varphi) \bar{P}_\alpha(\theta)$ $(h_\alpha(\varphi) = \sin l\varphi$ или $\cos l\varphi)$. Подставим это выражение для P_α в I и проинтегрируем по φ:

$$I = \int\limits_{S_1} W d\sigma = \pi \int\limits_0^\pi \sin\theta \, W_1 d\theta,$$

где

$$W_1 = 2l^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin\alpha} \bar{P}_\alpha \right) \left(\frac{1}{\sin\theta} \bar{P}_\beta \right) + b_k \bar{P}_\alpha \bar{P}_\beta'' + b_m \bar{P}_\beta \bar{P}_\alpha'' + 2 \bar{P}_\alpha'' \bar{P}_\beta''$$

и зависит только от θ. Для функций $\bar{P}_\alpha$ и $\bar{P}_\beta$ справедливо соотношение (8), так как оно не содержит дифференцирования по φ. Используя (8), получим

$$2\bar{P}_\alpha'' \bar{P}_\beta'' + b_k \bar{P}_\alpha \bar{P}_\beta'' + b_m \bar{P}_\beta \bar{P}_\alpha'' = \frac{l^2}{\sin^2\theta} (\bar{P}_\alpha \bar{P}_\beta)'' - \frac{2l^2 \bar{P}_\alpha' \bar{P}_\beta'}{\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \left(\bar{P}_\alpha' \bar{P}_\beta' \right)'. \qquad (\text{П}2)$$

Далее

$$2l^2\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\bar{P}_\alpha\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\bar{P}_\beta\right)=\frac{2l^2}{\sin^2\theta}\left(\bar{P}'_\alpha\bar{P}'_\beta-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(\bar{P}_\alpha\bar{P}_\beta\right)'+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\bar{P}_\alpha\bar{P}_\beta\right). \quad (\text{П}3)$$

Подстановка (П2) и (П3) в выражение для W_1 после преобразований дает в результате

$$\int\limits_0^\pi \sin\theta\, W_1 d\theta=\int\limits_0^\pi\left[l^2\left(\left(\frac{\bar{P}_\alpha\bar{P}_\beta}{\sin\theta}\right)''-\frac{\bar{P}_\alpha\bar{P}_\beta}{\sin\theta}\right)-\cos\theta\,(\bar{P}'_\alpha\bar{P}'_\beta)'\right]d\theta=$$

$$=\left[l^2\left(\frac{\bar{P}_\alpha\bar{P}_\beta}{\sin\theta}\right)'-\cos\theta\,\bar{P}'_\alpha\bar{P}'_\beta\right]\Bigg|_0^\pi-\int\limits_0^\pi\left[l^2\frac{\bar{P}_\alpha\bar{P}_\beta}{\sin\theta}+\bar{P}'_\alpha\bar{P}'_\beta\sin\theta\right]d\theta.$$

Легко проверить, что $[\ldots]|_0^\pi=0$ при любых $l>0$, поэтому

$$I=\pi\int\limits_0^\pi\sin\theta\,W_1 d\theta=-\pi\int\limits_0^\pi\sin\theta\left[l^2\frac{\bar{P}_\alpha\bar{P}_\beta}{\sin^2\theta}+\bar{P}'_\alpha\bar{P}'_\beta\right]d\theta=$$

$$=-\int\limits_{S_1}\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial P_\alpha}{\partial\varphi}\frac{\partial P_\beta}{\partial\varphi}+\frac{\partial P_\alpha}{\partial\theta}\frac{\partial P_\beta}{\partial\theta}\right]d\sigma=-\int\limits_{S_1}(\nabla_S P_\alpha,\ \nabla_S P_\beta)d\sigma. \quad (\text{П}4)$$

Теперь, возвращаясь к (П1) и пользуясь (11), (12) и (7), получим для $M(\mathbf{t}_\alpha,\ \mathbf{t}_\beta)$ формулу (13).

б. $M(\mathbf{t}_\alpha,\ \mathbf{t}_\beta)=\int\limits_\Omega \mathrm{Sp}(D^*(\mathbf{t}_\alpha)D(\mathbf{p}_\beta))dV$. После суммирования и некоторых преобразований получаем

$$M_{\alpha\beta}=\int\limits_{r_0}^1 a_1(r)dr\int\limits_{S_1}\left[\frac{\partial P_\alpha}{\partial\varphi}\frac{\partial P_\beta}{\partial\theta}-\frac{\partial P_\beta}{\partial\varphi}\frac{\partial P_\alpha}{\partial\theta}\right]d\sigma+\int\limits_{r_0}^1 a_2(r)dr\int\limits_{S_1}Y\,d\sigma,$$

где

$$Y=2\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial P_\alpha}{\partial\varphi}\right)(P_\beta)''_\theta-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial P_\beta}{\partial\varphi}\right)(P_\alpha)''_\theta\right)+$$
$$+b_m P_\beta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial P_\alpha}{\partial\varphi}\right)-b_k P_\alpha\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial P_\beta}{\partial\varphi}\right).$$

Функции $a_1(r)$ и $a_2(r)$ зависят от R_i и $\tilde{R}_j$. Их конкретный вид здесь не имеет значения. Обозначим $I_1=\int\limits_{S_1}\left[\frac{\partial P_\alpha}{\partial\varphi}\frac{\partial P_\beta}{\partial\theta}-\frac{\partial P_\beta}{\partial\varphi}\frac{\partial P_\alpha}{\partial\theta}\right]d\sigma$. Если $\gamma_{ll'}=0$, то $I_1=0$ из-за множителя $\int\limits_0^{2\pi}\sin l\varphi\cos l\varphi\,d\varphi$. Если же $\gamma_{ll'}\neq 0$, то

$$I_1=\pm l\pi\int\limits_0^{\pi_0}\left(\bar{P}_\alpha\frac{\partial\bar{P}_\beta}{\partial\theta}+\bar{P}_\beta\frac{\partial\bar{P}_\alpha}{\partial\theta}\right)d\theta=\pm l\pi(\bar{P}_\alpha\bar{P}_\beta)\,|_0^\pi=0 \text{ при } l>0.$$

Вычислим $I_2 = \int\limits_{S_1} Y\,d\sigma$. Если $\gamma_{ll'} = 0$, то $I_2 = 0$, по той же причине, что I_1. Пусть $\gamma_{ll'} \neq 0$. Интегрируя по φ, получим

$$I_2 = \pm l\pi \int\limits_0^\pi \sin\theta\, Y_1 d\theta,$$

где

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\bar P_\alpha}{\sin\theta}\right)\bar P''_\beta + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\bar P_\beta}{\sin\theta}\right)\bar P''_\alpha + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\bar P_\alpha}{\sin\theta}\right)(\bar P''_\beta + b_m\bar P_\beta) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\bar P_\beta}{\sin\theta}\right)(\bar P''_\alpha + b_k\bar P_\alpha).$$

Последнее выражение с помощью (8) приводится к виду

$$Y_1 = \frac{1}{\sin\theta}(\bar P'_\alpha \bar P'_\beta)' + \left(\frac{1}{\sin\theta}\right)'(\bar P_\alpha\bar P_\beta)'' + \frac{l^2}{\sin\theta}\left(\frac{\bar P_\alpha\bar P_\beta}{\sin\theta}\right)' + \frac{\cos^2\theta}{\sin^3\theta}(\bar P_\alpha\bar P_\beta)'.$$

Интегрирование по частям дает в результате

$$\int\limits_0^\pi \sin\theta Y_1\,d\theta = l^2\frac{\bar P_\alpha\bar P_\beta}{\sin^2\theta}\bigg|_0^\pi + \bar P'_\alpha\bar P'_\beta\big|_0^\pi - (\bar P_\alpha\bar P_\beta)'\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\bigg|_0^\pi. \qquad (\Pi 5)$$

Зная выражения для $\bar P_\alpha$ и $\bar P_\beta$, можно проверить, что (П5) равно нулю при $l > 0$ и различных четностях k и m. Таким образом, $M(\mathbf{t}_\alpha,\ \mathbf{p}_\beta) = 0$ в любом подпространстве $\tilde V$.

в. $M(\mathbf{p}_\alpha,\ \mathbf{p}_\beta) = \int\limits_\Omega \mathrm{Sp}(D^*(\mathbf{p}_\alpha)D(\mathbf{p}_\beta))dV$. При выводе формулы (14) используются (5)–(8), (11), (12) и (П4). Сам вывод довольно громоздок, и мы его приводить не будем.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. ВЫВОД ФОРМУЛЫ (22)

Пусть функции f и g удовлетворяют (10) и (21) и

$$I = \int\limits_{r_0}^1 \left[b_k^2\frac{fg}{r^2} + 2b_k\left(f'g' - \frac{fg}{r^2}\right) + r^2\left(\frac{1}{r}(rf)'\right)'\left(\frac{1}{r}(rg)'\right)'\right]dr.$$

Тогда

а. $\displaystyle\int\limits_{r_0}^1 f'g'dr = -\int\limits_{r_0}^1 gf''dr,$ так как $(f'g)\,\big|_{r_0}^1 = 0.$

б. $\displaystyle\int\limits_{r_0}^1 r^2\left(\frac{1}{r}(rf)'\right)'\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rg)\right)dr = \frac{1}{r}\frac{d(rg)}{dr}(r^2f'' + rf' - f)\,\big|_{r_0}^1 -$

$$-g\frac{d}{dr}(r^2f''+rf'-f)\,\Big|_{r_0}^{1}+\int\limits_{r_0}^{1} gr\frac{d}{dr}(r^2f''+rf'-f)dr.$$

Первые два члена в правой части последнего выражения равны нулю. В результате

$$I=\int\limits_{r_0}^{1} g\Psi f\,dr,$$

где

$$\Psi(f)=b_k^2\frac{f}{r^2}-2b_k\left(f''+\frac{f}{r^2}\right)+r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^2f''+rf'-f)\right)=$$
$$=r^2f^{(IV)}+4rf'''-2b_kf''+(b_k^2-2b_k)\frac{f}{r^2}.$$

в. $B_kT_k(f)=B_k(T_kf)=\left[b_k-\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)\right]\left(b_kf-2b_k\frac{f'}{r}-b_kf''\right).$

Если в последнем выражении выполнить все действия и сгруппировать члены, получим в точности Ψf. Следовательно,

$$I=\int\limits_{r_0}^{1} gB_kT_kf\,dr=(g,\,T_kf)_2,$$

и формула (22) доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моффат Г.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980. 339 с.
2. *Вишик М.М.* Периодическое динамо // Математические методы в сейсмологии и геодинамике. М.: Наука, 1986. С.186–215. (Вычисл. сейсмология; Вып.19).
3. *Желиговский В.А.* О генерации магнитного поля движением проводящей среды, имеющим внутренний масштаб // Компьютерный анализ геофизических полей. М.: Наука, 1990. С.161–181. (Вычисл. сейсмология; Вып.23).
4. *Гринспен Х.П.* Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеоиздат, 1975. 303 с.
5. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. М.: Наука, 1989. 416 с.
6. *Резников Е.Л., Розенкноп Л.М.* О главных модах оператора Пуанкаре в шаре // Геодинамика и прогноз землетрясений. М.: Наука, 1994. С.156–163. (Вычисл. сейсмология; Вып.26).
7. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
8. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford University press, 1961. 654 p.
9. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: МГУ, 1986. 263 с.
10. Справочник по специальным функциям / Под ред. М.Абрамовица и И.Стигана. М.: Наука, 1979. 830 с.
11. *Наймарк М.А.* Линейные диффренциальные операторы. М.: ГИТТЛ, 1954. 351 с.