УДК 532.5+514.83

О ТОРОИДАЛЬНЫХ И ПОЛОИДАЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ ПОЛЯХ ОПЕРАТОРА ПУАНКАРЕ В ШАРОВОМ СЛОЕ

Е.Л.Резников, Л.М.Розенкноп

Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук

В простейшей модели Земли внешнее ядро представляет собой невязкую несжимаемую жидкость, вращающуюся в шаровом слое. Изучение собственных колебаний этой жидкости при малых отклонениях от равновесия приводит к задаче о спектре оператора Пуанкаре. В работе строится базис в пространстве гладких полей, позволяющий проанализировать матрицу оператора и заключить, что полоидальных собственных полей в шаровом слое оператор Пуанкаре не имеет, а тороидальные собственные поля получаются сужением на шаровой слой тороидальных собственных полей, существующих в шаре.

ON TOROIDAL AND POLOIDAL EIGENFIELDS OF POINCARE'S OPERATOR IN A SPHERICAL SHELL

E.L. Reznikov and L.M. Rozenknop

International Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences

An inviscid incompressible fluid in a spherical shell rotating about some fixed axis is the simplest model of the Earth's outer core. Consideration of steady motions of this fluid leads to a spectral problem of Poincare's operator. We construct a basis in the Hilbert space of smooth fields and study the operator matrix in this basis. Poincare's operator is shown to have no poloidal eigenfields , but only toroidal obtained by restricting toroidal eigenfields to the spherical shell.

ВВЕДЕНИЕ

В простейшей модели Земли предполагается, что внешнее ядро представляет собой невязкую несжимаемую жидкость, вращающуюся между двумя концетрическими сферами. В рамках этой модели представляет интерес изучение собственных колебаний жидкости во внешнем ядре Земли. В случае малых отклонений от равновесия [1] мы приходим к задаче о спектре и собственных полях оператора Пуанкаре в шаровом слое. Точное решение этой задачи не известно. В работе [2] описано построение галеркинского базиса для поиска гладких приближений к главным, наиболее плавным собственным полям этой задачи. В данной работе также строится (более простой) галеркинский базис, но с другой целью – найти и описать, если они есть, тороидальные и полоидальные собственные поля. Анализ структуры матрицы оператора в построенном базисе позволяет заключить, что полоидальных собственных полей в шаровом слое оператор Пуанкаре не имеет, а тороидальные – только те, которые получаются сужением тороидальных собственных полей, существующих в шаре.

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Как видно из предисловия, в работе исследуются некоторые собственные поля следующей спектральной задачи:

$$\begin{cases} \lambda \mathbf{q} = A\mathbf{q} \equiv [\mathbf{1}_z, \mathbf{q}] - \nabla\Phi, \quad \operatorname{div}\mathbf{q} = 0, & (1) \\ (\mathbf{q}, \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0. & (2) \end{cases}$$

Здесь A – оператор Пуанкаре; Φ – неизвестный скалярный потенциал; Ω – шаровой слой с внутренним радиусом r_0 и внешним, равным единице; [,] – векторное произведение. Некоторые свойства этого оператора перечислены в [2, 3]. В данной работе мы строим естественный базис в соответствующем пространстве функций и матрицу оператора A в этом базисе. Анализ структуры оператора и его матрицы позволяет описать все собственные полоидальные и тороидальные поля.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Все обозначения, определения и факты, необходимые для понимания работы, содержатся в статье [2] (пп.1–4), публикуемой в настоящем сборнике. Для удобства мы приведем некоторые из них. Символ $V(\Omega)$ обозначает гильбертово пространство гладких бездивергентных полей в слое Ω, удовлетворяющих граничному условию (2), со скалярным произведением

$$\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle = \int_\Omega (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2^*) dv$$

(значок * здесь и далее означает комплексное сопряжение чисел и матриц). Для сферических функций n-го порядка используются обозначения (r, θ, φ – сферические координаты)

$$P_n^{m^+}(\theta, \varphi) = \sin(m\varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta),$$
$$P_n^{m^-}(\theta, \varphi) = \cos(m\varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta), \qquad m = 0, 1, ...n,$$

где $P_n^{(m)}(\cos\theta)$ – присоединенный полином Лежандра.

Символ P_n^m обозначает любую из функций P^{m^+} и $P_n^{m^-}$ (когда это допустимо). Знаки "+" и "−" соответствуют $\sin(m\varphi)$ и $\cos(m\varphi)$ в формулах для сферических функций.

Произвольное поле из $V(\Omega)$ разлагается в прямую сумму тороидального и полоидального полей (см. [2, 4]). Базис в $V(\Omega)$ строится из тороидальных и полоидальных полей вида

$$\mathbf{t}_\alpha = c_{t_\alpha}\mathrm{rot}(R_i(\mathrm{r})P_k^l(\theta,\varphi)\mathbf{r}),$$
$$\mathbf{p}_\beta = c_{p_\beta}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}(\tilde{R}_j(\mathrm{r})P_n^m(\theta,\varphi)\mathbf{r}).$$

Здесь α и β обозначают тройки индексов (i,k,l) и (j,n,m). Множители c_{t_α} и c_{p_β} и функции $R_i(\mathrm{r})$ и $\tilde{R}_j(\mathrm{r})$ будут выбраны ниже. Поля $\mathbf{t}_\alpha$ не имеют радиальной компоненты, поэтому для них условие (2) выполняется при любых R_i. Чтобы поля $\mathbf{p}_\beta$ удовлетворяли (2), должны выполняться условия

$$\tilde{R}_j(r_0) = \tilde{R}_j(1) = 0. \tag{3}$$

В работе [2] показано, что матрица Грама системы полей $\{\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{p}_\beta\}$ состоит из элементов трех видов:

а. $\langle \mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_\beta\rangle = k(k+1)\delta_{kn}\delta_{lm}(1-|\gamma_{lm}|)Z_{kl}\int\limits_{r_0}^{1} r^2 R_i R_j\,dr,$

б. $\langle \mathbf{t}_\alpha, \mathbf{p}_\beta\rangle = 0$ для любых $\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{p}_\beta$,

в. $\langle \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta\rangle = k(k+1)\delta_{kn}\delta_{lm}(1-|\gamma_{lm}|)Z_{kl}\int\limits_{r_0}^{1} \tilde{R}_i B_k(\tilde{R}_j)\,dr,$

где $Z_{kl} = \int\limits_{S_1}(P_k^l)^2\,d\sigma$ (S_1 – единичная сфера),

$$\gamma_{lm} = \begin{cases} 1, & \text{если знаки в паре } (l,m) \text{ образуют сочетание } (+,-),\\ 0, & \text{в случае пар } (+,+) \text{ и } (-,-),\\ -1, & \text{для сочетания } (-,+). \end{cases}$$

и $B_k = k(k+1) - \dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{d}{dr}\right)$ – положительный самосопряженный оператор на множестве гладких функций, удовлетворяющих (3). Функции $\{R_i\}$ и $\{\tilde{R}_j\}$ выбираются так, чтобы $\int\limits_{r_0}^{1} r^2 R_i R_j\,dr$ и $\int\limits_{r_0}^{1}\tilde{R}_i B_k(\tilde{R}_j)\,dr$ равнялись нулю при $i \neq j$. Если положить теперь

$$c_{t_\alpha} = \left[k(k+1)Z_{kl}\int\limits_{r_0}^{1} r^2 R_i^2\,dr\right]^{-1/2}, \tag{4}$$

$$c_{p_\beta} = \left[k(k+1)Z_{kl}\int\limits_{r_0}^{1} \tilde{R}_j B_k(\tilde{R}_j)\,dr\right]^{-1/2}, \tag{5}$$

то матрица Грама станет единичной. Выбор функций R_i и $\tilde{R}_j$, кроме того, должен обеспечивать полноту системы $\{\mathbf{t}_\alpha,\ \mathbf{p}_\beta\}$. Тогда она образует ортонормальный базис в $V(\Omega)$.

Если $\{R_i\}$, $\{\tilde{R}_j\}$ и коэффициенты c_{t_α}, c_{p_β} выбраны и базис $\{\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{p}_\beta\}$ построен, можно вычислить элементы матрицы оператора A в этом базисе:

$$\mathfrak{a}_{\alpha\beta} = \langle A\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{q}_\beta \rangle = \int\limits_\Omega ([\mathbf{1}_z, \mathbf{q}_\alpha], \mathbf{q}_\beta)\, dv.$$

Матрица оператора A содержит элементы трех видов: $\langle A\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle$, $\langle A\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{p}_\beta \rangle$, $\langle A\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta \rangle$. В работе [2] приведены формулы для этих элементов:

$$\langle A\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle = \delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{lm}\gamma_{lm}\frac{1}{k(k+1)}. \tag{6}$$

$$\langle A\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta \rangle = \delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{lm}\gamma_{lm}\frac{1}{k(k+1)}. \tag{7}$$

$$\langle A\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{p}_\beta \rangle = c_{t_\alpha}c_{p_\beta}\Bigg[n(n+1)\int\limits_{r_0}^{1} rR_i\tilde{R}_j\, dr \int\limits_{S_1} \sin\theta\,\frac{\partial P_k^l}{\partial\theta}P_n^m\, d\sigma + {}$$
$$+ \int\limits_{r_0}^{1} rR_i\frac{\partial}{\partial r}(r\tilde{R}_j)\, dr \int\limits_{S_1} \cos\theta\,(\nabla_s P_k^l, \nabla_s P_n^m)\, d\sigma\Bigg], \tag{8}$$

где $\nabla_s = \dfrac{\partial}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi$ – угловой градиент.

Интегралы по единичной сфере можно вычислить, пользуясь рекуррентными соотношениями для полиномов Лежандра [5]. Эти интегралы отличны от нуля при $l = m$, $\gamma_{lm} = 0$ и $k - n = \pm 1$. Выражения для них будут приведены в п. 4.

Из вычислений $\mathfrak{a}_{\alpha\beta}$ следует:

а. Каждому l соответствует инвариантное (относительно оператора A) подпространство $V^l(\Omega)$ и $V(\Omega) = \oplus_l V^l(\Omega)$.

б. Каждое $V^l(\Omega)$ распадается на два инвариантных подпространства:

V_1^l, порожденное базисными полями

$$\{\mathbf{t}_{ik}^l, \mathbf{p}_{jn}^l, \quad k = l, l+2, l+4, \ldots, \quad n = l+1, l+3, l+5, \ldots\}, \qquad \text{и}$$

V_2^l, порожденное полями

$$\{\mathbf{t}_{ik}^l, \mathbf{p}_{jn}^l, \quad k = l+1, l+3, l+5, \ldots, \quad n = l, l+2, l+4, \ldots\}.$$

Отметим, что такая структура $V(\Omega)$ возникает при любом выборе $\{R_i\}$, $\{\tilde{R}_j\}$, дающем единичную матрицу Грама. Как и в [2], мы не рассматриваем вырожденный случай $l = 0$.

3. ПОСТРОЕНИЕ БАЗИСА В ПРОСТРАНСТВЕ БЕЗДИВЕРГЕНТНЫХ ПОЛЕЙ В ШАРОВОМ СЛОЕ

Базисные поля $\{\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{p}_\beta\}$ зависят от функций R_i и $\tilde{R}_j$. Опишем их выбор.

3.1. Функции $\tilde{R}_j$ для полоидальных базисных полей

В качестве таких функций удобно выбрать собственные функции оператора $B_k = k(k+1) - \dfrac{d}{dr}\left(r^2 \dfrac{d}{dr}\right)$ с нулевыми граничными условиями (3). Эти функции не зависят от k и имеют вид

$$\tilde{R}_j = r^{-1/2} \sin\left(\frac{j\pi \ln(r)}{\ln(r_0)}\right), \qquad j = 1, 2 \ldots, \quad (r_0 < 1)$$

(нормировочный множитель принят равным единице). Набору $\{\tilde{R}_j\}$ соответствуют собственные значения λ_j^k (уже зависящие от k) и величины $\tilde{æ}_j^k$:

$$\lambda_j^k = \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{j\pi}{\ln(r_0)}\right)^2, \qquad \tilde{æ}_j^k = \left[\int\limits_{r_0}^{1} \tilde{R}_j B_k(\tilde{R}_j)\, dr\right]^{1/2} = \left[\lambda_j^k \left(-\frac{\ln(r_0)}{2}\right)\right]^{1/2}.$$

Система $\{\tilde{R}_j\}$ удовлетворяет нужным требованиям, так как она полна на отрезке $[r_0, 1]$ и $\int\limits_{r_0}^{1} \tilde{R}_i \tilde{R}_j\, dr = 0$ при $i \neq j$ (это следует из самосопряженности оператора B_k).

3.2. Функции R_i для тороидальных базисных полей

Положим $R_i = r^{-3/2} \cos\left(\dfrac{i\pi \ln(r)}{\ln(r_0)}\right)$, $i = 0, 1, \ldots$ (одинаково для всех k) и обозначим $æ_i = \left[\int\limits_{r_0}^{1} r^2 R_i^2\, dr\right]^{1/2}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, $æ_0 = (-\ln(r_0))^{1/2}$, $æ_i = (-\ln(r_0)/2)^{1/2}$, $i > 0$. Легко проверить, что $\int\limits_{r_0}^{1} r^2 R_i R_j\, dr = 0$ при $i \neq j$. Полнота набора функций $\{R_i\}$ есть следствие полноты системы $\{\cos(nx)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ на $[0, \pi]$.

3.3. Базис в $V(\Omega)$

Положим $c_{t_\alpha} = [k(k+1)Z_{kl}]^{-1/2}/æ_i$, $c_{p_\beta} = [k(k+1)Z_{kl}]^{-1/2}/\tilde{æ}_j^k$ (см. (4) и (5)). Полученная система полей $\{\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{p}_\beta\}$ имеет единичную матрицу Грама. Известно, что произвольная функция на сфере разлагается в ряд Фурье по сферическим функциям [5]. Из этого факта и из полноты систем функций $\{R_i\}$ и $\{\tilde{R}_j\}$ следует, что набор полей $\{\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{p}_\beta\}$ образует ортонормированный базис в $V(\Omega)$ (это вытекает из анализа коэффициентов Фурье разложения произвольного поля по системе $\{\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{p}_\beta\}$).

4. ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЦЫ ОПЕРАТОРА ПУАНКАРЕ В ПОСТРОЕННОМ БАЗИСЕ

При фиксированном l подпространство $V^l(\Omega)$ распадается на два инвариантных подпространства: V_1^l и V_2^l (см. п.2). Расположим базисные поля в этих подпространствах следующим образом (ниже указан порядок изменения индексов):

$$\text{в } V_1^l:\quad \underbrace{\overset{+}{0\,1\,2\ldots}\ \ \overset{-}{0\,1\,2\ldots}}_{k_{\rm T}=l}\quad \underbrace{\overset{+}{1\,2\,3\ldots}\ \ \overset{-}{1\,2\,3\ldots}}_{k_{\rm P}=l+1}\quad \underbrace{\overset{+}{0\,1\,2\ldots}\ \ \overset{-}{0\,1\,2\ldots}}_{k_{\rm T}=l+2}$$

$$\text{в } V_2^l:\quad \underbrace{\overset{+}{1\,2\,3\ldots}\ \ \overset{-}{1\,2\,3\ldots}}_{k_{\rm P}=l}\quad \underbrace{\overset{+}{0\,1\,2\ldots}\ \ \overset{-}{0\,1\,2\ldots}}_{k_{\rm T}=l+1}\quad \underbrace{\overset{+}{1\,2\,3\ldots}\ \ \overset{-}{1\,2\,3\ldots}}_{k_{\rm P}=l+2}$$

Здесь $k_{\rm T}$ и $k_{\rm P}$ – нижние индексы в обозначениях сферических функций, "+" и "−" относятся к верхним индексам (см. п. 2), числа $0,1,2,\ldots$ и $1,2,3,\ldots$ нумеруют соответственно функции R_i и $\tilde{R}_j$. Элементы матрицы оператора A выражаются формулами (6)–(8), но R_i и $\tilde{R}_j$ входят только в последнюю из них. Вычисления, которые мы здесь не приводим, дают

$$\langle A\mathbf{t}^l_{ik_{\rm T}}, \mathbf{p}^{l'}_{jk_{\rm P}}\rangle = \delta_{ll'}\delta_{1s}(\Pi_{k_{\rm T},l}\Pi_{k_{\rm P},l}æ_i\tilde{æ}_j^{k_{\rm P}})^{-1}d(k_{\rm T},k_{\rm P},l,i,j), \tag{9}$$

где l и l' могут быть l^+ или l^-, $s=|k_{\rm T}-k_{\rm P}|$, $\Pi_{k,l}=k(k+1)Z_{kl}$, а

$$d=\begin{cases} 0, & i\neq j,\ i \text{ и } j \text{ – одинаковой четности (0 – четное число!)}\\[2mm] -\dfrac{j\pi}{2}a_2(k_{\rm T},k_{\rm P},l), & i=j\\[2mm] \dfrac{j\ln(r_0)}{\pi(i^2-j^2)}(2k_{\rm P}(k_{\rm P}+1)a_1(k_{\rm T},k_{\rm P},l)+a_2(k_{\rm T},k_{\rm P},l)), & i \text{ и } j \text{ – разной четности,} \end{cases} \tag{10}$$

$$a_1(k_{\rm T},k_{\rm P},l)=\int\limits_{S_1}\sin\theta\,\frac{\partial P^l_{k_{\rm T}}}{\partial\theta}P^l_{k_{\rm P}}d\sigma, \tag{11}$$

$$a_2(k_{\rm T},k_{\rm P},l)=\int\limits_{S_1}\cos\theta\,(\nabla_s P^l_{k_{\rm T}},\nabla_s P^l_{k_{\rm P}})\,d\sigma. \tag{12}$$

Множитель δ_{1s} в (9) отличен от нуля только, когда $k_{\rm T}-k_{\rm P}=\pm1$. Вычисление интегралов (11), (12) дает

$$a_1(k,k-1,l)=-\frac{2(k+1)(k+l)!}{(2k+1)(2k-1)(k-l-1)!}\,, \tag{13}$$

$$a_1(k,k+1,l) = \frac{2k(k+l+1)!}{(2k+1)(2k+3)(k-l)!}\,, \tag{14}$$

$$a_2(k,k-1,l) = 2\frac{(k+l)(k^2-1)(k+l-1)!}{(2k+1)(2k-1)(k-l-1)!}\,, \tag{15}$$

$$a_2(k,k+1,l) = 2\frac{k(k+2)(k+l+1)!}{(2k+1)(2k+3)(k-l)!}\,. \tag{16}$$

5. СТРУКТУРА МАТРИЦЫ ОПЕРАТОРА ПУАНКАРЕ В ШАРОВОМ СЛОЕ

В каждом из подпространств V_1^l и V_2^l матрица оператора A состоит из трех блочных диагоналей (блок определяется парой нижних индексов сферических функций). Элементы вида (5), (6) образуют главную блочную диагональ, элементы вида (7) составляют две соседние диагонали. Таким образом, в любом из подпространств V_1^l и V_2^l оператор A можно представить в виде $A = J + S$, где J переводит базисные поля в поля того же типа (тороидальные в тороидальные, полоидальные в полоидальные), S – в поля другого типа. Оператор J имеет матрицу блочно-диагонального вида с блоками J_{ll}, $J_{l,l+1}$, $J_{l,l+2}, \ldots$ на диагонали, где

$$J_{lk} = \frac{l}{k(k+1)}J_0, \qquad J_0 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} + & - \end{array} \\ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Здесь символом "+" обозначены поля $\mathbf{t}_{ik}^{l+}$, $i = 0,1,2,\ldots$, если k – индекс тороидального поля, или $\mathbf{p}_{jk}^{l+}$, $j = 1,2,3,\ldots$, если k – индекс полоидального поля. Символ "$-$" имеет аналогичный смысл. Второй нижний индекс k, равный l, $l+1$, $l+2,\ldots$, нумерует попеременно поля обоих типов.

Матрица оператора S состоит из блоков, помеченных двумя индексами (соответствующими тороидальным и полоидальным базисным полям). Она кососимметрична, ее главная (блочная) диагональ – нулевая. Первый блочный столбец содержит один ненулевой блок с индексами $(l+1,\ l)$. Остальные столбцы содержат по два ненулевых блока: блок с индексами $(k-1,\ k)$ выше диагонали и блок с индексами $(k+1,\ k)$ ниже диагонали. Каждый ненулевой блок содержит две одинаковые (ненулевые) матрицы, образованные элементами вида (7) (одна соответствует паре "+,+", другая паре "$-$,$-$"). Например, блок с индексами $(k-1,\ k)$ имеет вид

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} + & \quad - \end{array} \\ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} & \begin{pmatrix} S_{k-1,k} & 0 \\ 0 & S_{k-1,k} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Косая симметрия матрицы S означает, что $S_{k-1,k} = -S_{k,k-1}$.

6. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ПОЛЕЙ ТОРОИДАЛЬНОГО И ПОЛОИДАЛЬНОГО ТИПОВ И ИХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Мы перечислим свойства, которые непосредственно вытекают из представления $A = J + S$ и вида матриц операторов J и S.

а. Каждое полоидальное или тороидальное собственное поле должно принадлежать ядру оператора S.

б. В разложении такого собственного поля по базисным полям может присутствовать только один индекс k (иначе оператор J растянет по разному части, относящиеся к разным k).

в. Собственные числа, отвечающие таким полям, принадлежат множеству

$$\left\{\pm\imath\frac{l}{k(k+1)},\ \ k = l,\, l+1,\, l+2, \dots\right\}$$

($\imath$ – мнимая единица).

г. Паре $\pm\imath l/k(k+1)$ возможных собственных значений соответствует пара

$$\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\begin{pmatrix}C_k\\0\end{pmatrix} \mp \imath \begin{matrix}+\\-\end{matrix}\begin{pmatrix}0\\C_k\end{pmatrix}$$

возможных собственных векторов. Здесь C_k – столбец действительных коэффициентов разложения собственного поля по базисным полям; для тороидальных полей $C_k = \{C_{ki},\ i = 0,1,2,\dots\}$, для полоидальных полей $C_k = \{C_{kj},\ j = 1,2,3\dots\}$. Значки "+" и "−" были объяснены выше.

7. УСТРОЙСТВО БЛОКОВ, ОБРАЗУЮЩИХ МАТРИЦУ ОПЕРАТОРА ПУАНКАРЕ

Матрица оператора J устроена просто. Рассмотрим матрицу оператора S. В каждом из подпростанств V_1^l и V_2^l матрица оператора S состоит из блочных столбцов. Первый столбец содержит один ненулевой блок (с индексами $l+1$, l), остальные – по два. Рассмотрим блочный столбец, образованный элементами

$$\langle A\mathbf{t}_{ik}^l, \mathbf{p}_{jm}^l\rangle, \quad i = 0,1,2,\dots,\ j = 1,2,3,\dots.$$

При $m = k-1$ ($k > l$) получается верхний ненулевой блок, при $m = k+1$ – нижний. Блочный столбец состоит из проекций образов тороидальных базисных полей на полоидальные. Верхний блок состоит из двух одинаковых матриц

$$S_{k-1,k} = \{\langle A\mathbf{t}_{ik}^l, \mathbf{p}_{j,k-1}^l\rangle\}, \quad i = 0,1,2,\dots,\ j = 1,2,3,\dots.$$

Используя формулы (9)–(12), приведем матрицу $S_{k-1,k}$ к удобному виду

$$S_{k-1,k} = (\Pi_{k,l}\Pi_{k-1,l})^{-1}\varepsilon\tilde{H}^{k-1}Z_{k-1,k}\Gamma. \tag{17}$$

Здесь

$$\varepsilon = \varepsilon(k, k-1, l) = -\frac{\ln(r_0)}{\pi}[2k(k-1)a_1(k, k-1, l) + a_2(k, k-1, l)],$$

$\tilde{H}^{k-1}$ – диагональная матрица с элементами $(h_1^{k-1}, h_2^{k-1}, \dots)$ на диагонали, где

$$h_j^{k-1} = \frac{j}{\tilde{æ}_j^{k-1}} = j\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{j\pi}{\ln(r_0)}\right)^2\left(-\frac{\ln(r_0)}{2}\right)\right)^{-1/2},$$

Γ – также диагональная матрица с элементами $(æ_0^{-1}, æ_1^{-1}, æ_2^{-1}, \dots)$. Матрица $Z_{k-1,k}$ содержит строки с номерами $j = 1, 2, 3, \dots$ и столбцы с номерами $i = 0, 1, 2, \dots$. Матрица $\tilde{Z} = \{z_{i,j}\}$, $i > 0$, $j > 0$, (матрица $Z_{k-1,k}$ без первого столбца) может быть представлена в виде: $\tilde{Z} = t(k, k-1, l)E - W$, где

$$t(k, k-1, l) = -\frac{\pi}{2}\frac{a_2(k, k-1, l)}{\varepsilon(k, k-1, l)}, \tag{18}$$

$$W = \{w_{ij}\}, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots,$$

$$w_{ij} = \begin{cases} 0, & i \text{ и } j \text{ – одинаковой четности} \\ -\dfrac{1}{i^2 - j^2}, & i \text{ и } j \text{ – разной четности.} \end{cases}$$

Покажем, что строки матрицы $Z_{k-1,k}$ линейно независимы. Возьмем произвольное N и рассмотрим строки с номерами $j = 1, 2, 3, \dots, N$. Эти строки и столбцы с номерами $i = 1, 2, 3, \dots, N$ образуют матрицу

$$\tilde{Z}_N = t(k, k-1, l)E_N - W_N.$$

Определитель этой матрицы $\det \tilde{Z}_N = \det(tE_N - W_N) \neq 0$, так как W_N – кососимметрична, и действительное число t не может быть собственным значением для W_N. Следовательно, строки матрицы $Z_{k-1,k}$ (и столбцы с номерами $i > 0$) линейно независимы. Заметим, что $\tilde{H}_N^{k-1}$ и Γ_N – невырожденные матрицы. Аналогично устроен нижний блок ($m = k + 1$). Блочные столбцы, составленные из проекций образов полоидальных базисных полей на тороидальные, состоят из матриц, траспонированных к рассмотренным.

8. ПОИСК СОБСТВЕННЫХ ПОЛЕЙ

Теперь мы исследуем вопрос о существовании тороидальных и полоидалных собственных полей.

8.1. Полоидальные собственные поля

Покажем, что таких полей в данной задаче нет. Пусть $\mathbf{q}_\mathrm{P}$ – предполагаемое собственное поле, $\mathbf{q}_\mathrm{P} = \sum_{j=1}^{\infty} C_{k_\mathrm{P}j}(\mathbf{q}_{k_\mathrm{P}j}^{+} \mp \imath\mathbf{q}_{k_\mathrm{P}j}^{-})$, $k_\mathrm{P} \geq l$, $\imath$ – мнимая единица. Здесь ситуация в V_1^l и V_2^l одинакова. Условие $S\mathbf{q}_\mathrm{P} = 0$ в матричном виде означает $S_{mk_\mathrm{P}}^{*}C_{k_\mathrm{P}} = 0$, где $m = k \mp 1$, или только $m = k + 1$, если $k_\mathrm{P} = l$. Равенство, например, $S_{k_\mathrm{P}-1,k_\mathrm{P}}^{*}C_{k_\mathrm{P}} = 0$, равносильно (см. (17))

$$\Gamma Z^*_{k-1,k}\tilde{H}^{k-1}C_{k_{\text{P}}} = 0.$$

Здесь Γ и $\tilde{H}^{k-1}$ – диагональные матрицы с ненулевыми элементами. Так как столбцы матрицы $Z^*_{k-1,k}$ линейно независимы (см. п.7), то последнее равенство возможно, только если $C_{k_{\text{P}}} = \{C_{k_{\text{P}}j}\}$ – нулевой набор. Случай $m = k+1$ разбирается аналогично. Полоидальных собственных полей, таким образом, не существует.

8.2. Тороидальные собственные поля

Пусть $\mathbf{q}_{\text{T}} = \sum_{i=1}^{\infty} C_{k_{\text{T}}i}(\mathbf{q}^+_{k_{\text{T}}i} \mp \imath\mathbf{q}^-_{k_{\text{T}}i})$ – предполагаемое собственное поле ($k_{\text{T}} \leq l$). $S\mathbf{q}_{k_{\text{T}}}$ в матричной записи – линейные комбинации столбцов матрицы типа S_{mk} . В п.7 показано, что S_{mk} пропорциональна $\tilde{H}^m Z_{mk}\Gamma$, где $\tilde{H}^m$ и Γ – диагональные матрицы с ненулевыми элементами на диагонали. Столбцы матрицы Z_{mk} с номерами $1, 2, 3, \ldots$ образуют линейно независимую систему. Поэтому для любого k_{T} размерность пространства решений уравнения $S\mathbf{q}_{k_{\text{T}}} = 0$ не превосходит единицы.

8.2.1. Пространство V_1^l. В этом случае $k_{\text{T}} = l,\ l+2,\ l+4, \ldots$.

а. $k_{\text{T}} = l$. Пусть $\mathbf{q}_l = \sum_{i=0}^{\infty} C_{li}(\mathbf{q}^+_{li} \mp \imath\mathbf{q}^-_{li})$ – предполагаемое тороидальное собственное поле. Возможное собственное значение $\lambda = 1/(l+1)$. Условие $S\mathbf{q}_l = 0$ в матричной записи имеет вид

$$S_{l+1,l}C_l = 0 \tag{19}$$

($S_{l-1,l}$ – отсутствует).

Известно [1], что оператор Пуанкаре в шаре имеет инвариантные подпространства, соответствующие верхнему индексу в P^l_m. В работе [6, п.9] показано, что в каждом таком подпространстве есть единственное тороидальное собственное поле с собственным значением $\lambda = 1/l+1$. Поскольку тороидальное поле не имеет нормальной компоненты, то сужение этого поля на шаровой слой $(r_0, 1)$ является собственным тороидальным полем оператора Пуанкаре в шаровом слое, так как оно удовлетворяет (1) и (2). Коэффициенты разложения этого поля по базису $\{\mathbf{q}_{li}\}$ дают набор $\{C_{li}\}$, удовлетворяющий (19). Других решений нет, так как размерность пространства решений не превосходит единицы.

б. $k_{\text{T}} > l$. Опять рассмотрим собственные поля $\mathbf{q}_{k_{\text{T}}} = \sum_{i=0}^{\infty} C_{k_{\text{T}}i}(\mathbf{q}^+_{k_{\text{T}}i} \mp \imath\mathbf{q}^-_{k_{\text{T}}i})$ – с возможными собственными значениями $\lambda = l/k_{\text{T}}(k_{\text{T}}+1)$. Соответствующий k_{T} блочный столбец матрицы оператора S содержит два ненулевых блока, состоящих из матриц $S_{k_{\text{T}}-1,k_{\text{T}}}$, $S_{k_{\text{T}}+1,k_{\text{T}}}$. Условие $S\mathbf{q}_{k_{\text{T}}} = 0$ означает, что один и тот же набор коэффициентов $C_{k_{\text{T}}} = \{C_{k_{\text{T}}i}\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ должен удовлетворять двум уравнениям:

$$S_{k_{\text{T}}-1,k_{\text{T}}}C_{k_{\text{T}}} = 0, \quad S_{k_{\text{T}}+1,k_{\text{T}}}C_{k_{\text{T}}} = 0.$$

Из описания матриц S_{mk} ($m = k \pm 1$) (см. п.8) видно, что столбец с номером $i = 0$ у матриц $Z_{k-1,k}$ и $Z_{k+1,k}$ одинаков, а матрицы $\tilde{Z}_{k-1,k}$ и $\tilde{Z}_{k+1,k}$ составлены из линейно независимых столбцов. Это означает, что если $C_{k_{\text{T}}} \neq 0$ существует, то должно выполняться равенство $t(k, k-1, l) = t(k, k+1, l)$, или (см. (18))

$$\frac{a_1(k,k+1,l)}{a_1(k,k-1,l)}\frac{a_2(k,k-1,l)}{a_2(k,k+1,l)} = \frac{k(k-1)}{(k+1)(k+2)}. \tag{20}$$

Но формулы (13)–(16) для $a_1(k,m,l)$ и $a_2(k,m,l)$ при $m = k \pm 1$ показывают, что левая часть (20) равна $-(k-1)/(k+2)$, т.е. соотношение (20) не выполняется ни при каком $k > l$. Следовательно, при $k_{\text{T}} > l$ в V_1^l нет тороидальных собственных полей.

8.2.2. Пространство V_2^l. В этом случае $k_{\text{T}} = l+1, l+3, l+5, \ldots$, и каждый блочный столбец матрицы оператора S содержит два ненулевых блока. Как и в п.8.2.1.б, можно показать, что в V_2^l нет тороидальных собственных полей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что оператор Пуанкаре в шаровом слое не имеет полоидальных собственных полей. Тороидальные же собственные поля – это только те, которые являются сужением на шаровой слой тороидальных собственных полей оператора Пуанкаре в шаре.

Благодарности. Авторы пользовались советами и поддержкой М.М.Вишика, которому выражают глубокую признательность.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гринспен Х.П.* Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеоиздат, 1975. 303 с.
2. *Резников Е.Л., Розенкноп Л.М.* О гладких приближениях главных мод оператора Пуанкаре в шаровом слое // Наст. сборник. С.70–85.
3. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. М.: Наука, 1989. 416 с.
4. *Моффат Г.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980. 339 с.
5. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
6. *Резников Е.Л., Розенкноп Л.М.* О главных модах оператора Пуанкаре в шаре // Геодинамика и прогноз землетрясений. М.: Наука, 1994. С.156–163. (Вычисл. сейсмология; Вып.26).