II. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

УДК 550.331

ТОНКАЯ ФРАКТАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ: ПРИМЕР СТРОГОГО АНАЛИЗА

Г. М. Молчан

Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук

Известны попытки исследовать мультифрактальную природу физических объектов типа эпицентров землетрясений, звездных скоплений и т.п. Эти попытки моделируются в работе точным математическим анализом тонкой фрактальной структуры нулей Z броуновского движения $w(t)$, $t > 0$. На Z задается естественная мера локального времени $w(t)$ и показывается, что она является мультифракталом с непрерывным спектром в интервале $[1/2,\ 3/4]$. Введение меры на фрактале субъективно. Поэтому Z рассматривается так же, как предел его изображений Z_ε, $\varepsilon \to 0$, с разной степенью разрешения. Элементы Z_ε состоят из скоплений (ε-кластеров) точек, у которых лакуны между точками меньше ε. Показано, что число ε-кластеров диаметром ε^α (α-тип) растет как $\varepsilon^{-f(\alpha)}$, где $f(\alpha)$ – линейная функция в интервале $[1,2]$. Объект Z интересен тем, что ε-кластеры типа α имеют разные пределы при $\varepsilon \to 0$. Правильный ответ дают верхние (ненаблюдаемые) пределы Z_{ε_n}, $\varepsilon_n = c^{-n}$, $c > 1$, $n = 1, 2, \ldots$, либо нижние пределы Z_{ε_n} при сверхбыстром (на практике нереалистичном) убывании $\varepsilon_n : \varepsilon_n/\varepsilon_{n+1} \to \infty$.

THE FINE FRACTAL STRUCTURE OF POINT SETS: AN EXAMPLE OF RIGOROUS ANALYSIS

G. M. Molchan

International Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences

There have been attempts to investigate the multifractal nature of physical objects like earthquake epicenters, star clusters etc. This is modeled here using a rigorous mathematical analysis of the fine fractal structure of zeroes Z of Brownian motion $w(t)$, $t > 0$. We use a natural measure of local time of $w(t)$ on Z and demonstrate that it is a multifractal with a linear spectral function in the range $[1/2,\ 3/4]$. The choice of a measure on a fractal is a procedure depending on the author's judgment. For this reason Z is also considered as the limit of its images Z_ε with varying degrees of point resolution ε, $\varepsilon \downarrow 0$. The elements of Z_ε

are intervals (ε-clusters) containing points with interpoint distances less that ε. It is shown that the number of ε-clusters of diameter ε^{α} (α-type) grows like $\varepsilon^{-f(\alpha)}$, where $f(\alpha)$ is a linear function in the interval [1,2]. The object Z is interesting in that ε-clusters of α-type have unexpected limits as $\varepsilon \downarrow 0$. The correct result is obtained from upper (unobsorvable) limits of Z_{ε_n}, $\varepsilon_n = c^{-n}$, $c > 1$, $n = 1, 2, \ldots$, or lower limits of Z_{ε_n} for ultrafast (practically unrealistic) decrease of ε_n : $\varepsilon_n/\varepsilon_{n+1} \to \infty$.

ВВЕДЕНИЕ

Фракталы, т.е. самоподобные иерархически организованные геометрические объекты нецелой размерности, стали предметом активного внимания в физических дисциплинах. Создается впечатление о тотальной фрактализации всего естествознания, что проявляется в потоке примеров и пересмотре концептуальных взглядов на природу физических сред. Применительно к геофизике об этом можно судить по книгам Мандельброта [1], Садовского [2] и Туркотта [3].

Попытка учесть более тонкую структуру фрактальных объектов привело к понятию *мультифрактала* (Фриш [4], Мандельброт [5]). К сожалению, естественные вопросы о мультифрактальности таких образований как гипоцентры землетрясений, звездные скопления или система тектонических разломов вызывают затруднения даже в идеальной (с точки зрения наблюдений) ситуации. Дело в том, что понятие мультифрактала связано с мерой на объекте и является характеристикой пары: мера и ее носитель.

Напомним соответствующие понятия. Пусть $\mu(dt)$ – вероятностная мера, заданная для простоты на единичном отрезке J, а $\mathcal{T}_n = \{\Delta_i^{(n)}\}$ – последовательность конечных разбиений J таких, что $\max_i |\Delta_i^{(n)}| = \delta^{(n)} \to 0$. Будем говорить, что мера μ имеет сингулярность типа α в интервале Δ, если $\mu(\Delta) \sim |\Delta|^{\alpha}$, т.е.

$$c_1/\varphi_1(1/|\Delta|) \le \mu(\Delta)|\Delta|^{-\alpha} \le c_2\varphi_2(1/|\Delta|),$$

где $\varphi_i(x)$ – некоторые фиксированные неубывающие функции, растущие на ∞ медленнее любой степени x^{ρ}, $\rho > 0$. Говорят, что мера μ мультифрактальна и имеет спектр $f(\alpha)$, $\alpha > 0$, если число $N^{(n)}(\alpha)$ злементов разбиения $\mathcal{T}_n$ с условием $\mu(\Delta) \sim |\Delta|^{\alpha}$ растет так, что

$$-\frac{\log N^{(n)}(\alpha)}{\log \delta} \to f(\alpha), \qquad n \to \infty$$

при некоторых различных значениях α. При этом неявно предполагается, что спектр один и тот же для широкого класса разбиений $\mathcal{T}_n$.

Термин мультифрактальности, введенный Фришем [4], оправдывает себя тем, что в ряде моделей хорошо развитой турбулентности, спектральная функция сингулярностей меры имеет размерностную интерпретацию [6]. А именно, $f(\alpha)$ совпадает с дробной размерностью множества таких точек t носителя μ, для которых $\mu(\Delta_t) \sim |\Delta_t|^{\alpha}$. Здесь $\{\Delta_t\}$ – последовательность интервалов Δ, содержащих t и $|\Delta_t| \downarrow 0$. Например, это могут быть элементы разбиений $\mathcal{T}_n$, а в идеальном случае – любая последовательность шаров с центром в точке t. В результате носитель мультифрактальной меры расслаивается на фрактальные подмножества с размерностями $f(\alpha)$, где α – показатель Гельдера-Липшица или тип сингулярности меры.

В широком классе случаев мультифракталы обладают еще одним важным свойством: преобразование Лежандра функции $f(\alpha)$,

$$(\mathcal{L}f)(q) = \min_{\alpha}(\alpha q - f(\alpha)),$$

совпадает с функцией Реньи $\tau(q)$. В простейшем случае разбиений $\mathcal{T}_n$ с равными интервалами функция Реньи определяется соотношением

$$\tau(q) := \lim_{n\to\infty} \frac{\log \sum p_i^q}{\log \delta}, \tag{1}$$

где $p_i = \mu(\Delta_i^{(n)})$ (общее определение будет дано ниже). В этом случае связь τ и f почти очевидна, поскольку

$$\sum_i |\mu(\Delta_i)|^q \simeq \sum_\alpha N^{(n)}(\alpha)\delta^{\alpha q} \simeq \int \delta^{\alpha q - f(\alpha)} d\pi(\alpha),$$

где $d\pi(\alpha)$ – некоторая мера. Последний интеграл при весьма общих условиях имеет порядок $O(\delta^{\mathcal{L}f(q)})$, когда $\delta \to 0$. Отсюда $\tau = \mathcal{L}f$.

Фиксируем перечисленные свойства модельных мультифракталов:

$$\text{(A)} \qquad f(\alpha) = \dim \mathcal{T}(\alpha), \qquad \cup_\alpha \mathcal{T}(\alpha) = \text{носитель } \mu,$$

где $\mathcal{T}(\alpha)$ – *подходящий* предел множеств $\mathcal{T}^{(n)}(\alpha) = \{\Delta_i^{(n)} : \mu(\Delta_i^{(n)}) \sim \left|\Delta_i^{(n)}\right|^\alpha\}$ (по-видимому, полной ясности о типе предела не существует);

$$\text{(B)} \qquad \tau(q) = \min_\alpha(\alpha q - f(\alpha)).$$

В приложениях эти свойства обычно постулируются для наблюдаемых мультифракталов и составляют содержание так называемого *мультифрактального формализма.* Если функция $-f(\alpha)$ строго выпукла, то условие (B) позволяет находить мультифрактальный спектр. Действительно, $\mathcal{L}\tau = \mathcal{L}^2 f = \hat{f}$, где $\hat{f}$ – верхняя граница выпуклой оболочки кривой $\{\alpha, f(\alpha)\}$. Поэтому $\mathcal{L}\tau = f$, если $-f$ выпукла. Свойство (B) можно рассматривать как необходимое условие полноты спектра сингулярностей меры.

Выбор меры μ на фрактале иногда диктуется физикой изучаемого объекта. Например, для рекуррентной последовательности $x_{n+1} = f(x_n)$ с бесконечным предельным циклом естественный выбор связан с инвариантной мерой на аттракторе. Однако в общем случае, когда динамика появления фрактала неизвестна или мы имеем дело с чисто геометрическим объектом, выбор меры субъективен и порой граничит с искусством [6]. В этих условиях представляет интерес коллекция примеров "странных" множеств с точным анализом их тонкой фрактальной структуры, включая и сами способы анализа. Пока таких примеров немного (строгие результаты по мультифрактальным мерам см. в [7–9]). Цель данной работы – изучить тонкую фрактальную структуру нулей Z одномерного броуновского движения. Эта задача выходит за рамки чистой математики и вполне аналогична тем вопросам, которые задаются на практике по отношению к природным точечным объектам. Задача возникла из вопроса Я. Г. Синая о мультифрактальности Z и приобрела определенную остроту благодаря гипотезе У. Фриша о монофрактальности этого множества.

Постановка задачи

Пусть Z – множество нулей броуновской траектории $w(t)$, $t > 0$; процесс $w(t)$ – гауссовский со средним 0 и корреляционной функцией $Ew(t)w(s) = \min(t, s)$. В силу того, что процессы $w(\lambda t)$ и $\sqrt{\lambda}w(t)$ имеют одни и те же конечномерные распределения (коротко $w(\lambda t) \overset{d}{=} \sqrt{\lambda}w(t)$), множество Z статистически автомодельно, т.е. $\lambda Z \overset{d}{=} Z$ для любого $\lambda > 0$. Известно также, что хаусдорфова размерность Z равна $1/2$. Поэтому множество Z является классическим примером стохастического фрактала.

Для анализа мультифрактальности Z У. Фриш предложил рассмотреть на Z меру локального времени процесса $w(t)$. Она определяется дифференциалом

$$L(dt) = \delta(w(t))dt.$$

Более точно

$$L(t) := L((0,t)) = \frac{d}{dx}\mu(t,x)\bigg|_{x=0},$$

где $\mu(t,x)$ – мера Лебега тех точек $s \in (0,t)$, где $w(s) < x$. С вероятностью 1 функцию $\mu(t,x)$ можно выбрать непрерывной по (t,x) и непрерывно дифференцируемой по x, [10]. Это ведет к корректному определению $L(dt)$.

Для гладких функций f

$$\delta(f(t))dt = \sum_i \delta(t-t_i)dt/|f'(t_i)|,$$

где t_i – нули f. Хотя последнее соотношение не имеет смысла для броуновской траектории, качественно оно показывает, что нули $w(t)$ по-разному взвешиваются мерой $L(dt)$. Эти веса зависят от поведения траектории $w(t)$ в окрестности нулевого уровня, что, вообще говоря, не имеет отношения к самому объекту Z.

Некоторым аргументом в пользу выбора $L(dt)$ на Z служит следующий результат П. Леви. Удалим из временной полуоси все лакуны между нулями $w(t)$ размера больше ε и зададим на оставшихся интервалах $\{\delta_i(\varepsilon)\} = Z_\varepsilon$ (назовем их ε-кластерами) лебегову меру $\mu_\varepsilon(dt)$. Тогда $L(dt)$ является пределом последовательности мер $c\mu_\varepsilon(dt)/\sqrt{\varepsilon}$ при $\varepsilon \to 0$. Иначе говоря, $\mu_\varepsilon(dt) = c_1 L(dt)\sqrt{\varepsilon} + o(\sqrt{\varepsilon})$. Это значит, что нейтральную равномерную меру на ε-кластерах при предельном переходе можно деформировать на величину порядка $o(\sqrt{\varepsilon})$. В свою очередь, сами сгущения $\delta_i(\varepsilon)$ на конечном отрезке имеют размер порядка $O(\varepsilon^\alpha)$, $\alpha \in [1,2]$ (см. ниже). Поэтому указанный предельный переход может вести к потере тонкой структуры множества Z. По этой же причине сомнительно изучение мультифрактальности Z с помощью аппроксимаций $w(t)$ случайным блужданием (этот путь используется и в компьютерных экспериментах и в теоретических исследованиях).

Мера локального времени $w(t)$ является содержательным объектом с точки зрения изучения его мультифрактальных свойств. Однако априори неясно, в какой степени эти свойства отражают тонкую фрактальную структуру множества Z. Поэтому ниже наряду с мультифрактальностью $L(dt)$ изучается структура размеров ε-кластеров.

Последовательность Z_ε интересна по следующей причине. Рассмотрим параметр ε как порог разрешения точек некоторого множества. Тогда, соединив все пары точек с расстоянием меньше ε, получим разбиение исходного множества на ε-кластеры. В одномерном случае Z это будут интервалы $\delta_i(\varepsilon)$. Поэтому Z_ε является образом Z при пороговом разрешении ε. Одновременно последовательность Z_ε является каскадом покрытий Z: Z_ε монотонно убывает, $Z_\varepsilon \subset Z_\delta$, $\varepsilon < \delta$, и $\cap_\varepsilon Z_\varepsilon = Z$. Как и полагается для покрытий, размеры ε-кластеров из фиксированного интервала $J = (0, t)$ равномерно малы при $\varepsilon \to 0$ в вероятностном смысле; вероятность того, что максимальный кластер из J будет меньше $\varepsilon \ln 1/\varepsilon$, сходится к единице при $\varepsilon \to 0$.

В работе [11] тонкая фрактальная структура эпицентров землетрясений изучается через скейлинговые свойства масс ε-кластеров. Под массой понимается число элементов кластера. В математических объектах типа Z более удобна геометрическая характеристика кластера – его диаметр, поскольку масса ε-кластера бесконечна с вероятностью 1.

Краткое изложение результатов

Мультифрактальность множества Z в обоих подходах проявляется в следующем:

1) мера $L(dt)$ относительно каскада покрытий Z_ε имеет непрерывный мультифрактальный спектр

$$f_L^*(\alpha) = \begin{cases} 3/2 - 2\alpha, & \alpha \in [1/2, 3/4], \\ -\infty & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

и τ-функцию Реньи $\tau_L^*(\alpha)$, обладающую В-свойством мультифрактального формализма: $\tau_L^* = \mathcal{L} f_L^*$. Из-за нестрогой выпуклости спектра функция τ_L^* не определяет его однозначно;

2) число ε-кластеров размера ε^α из $J = [0, t_0]$ растет как $\varepsilon^{-f_{CL}(\alpha)}$, где

$$f_{CL}(\alpha) = \begin{cases} 1 - \alpha/2, & \alpha \in [1, 2], \\ -\infty & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Функция f_{CL} является аналогом мультифрактального спектра Z, а точнее спектром размеров ε-кластеров. При этом по-прежнему имеет место В-свойство мультифрактального формализма: преобразование Лежандра f_{CL} совпадает с τ-функцией вида (1), где $p_i = |\delta_i(\varepsilon)|$, $\delta = \varepsilon \to 0$.

Сложнее дело обстоит с размерностной интерпретацией спектров. Пусть $Z^{(\varepsilon)}(\alpha)$ – совокупность ε-кластеров типа α в интервале $J = [0, t_0]$. Имеются в виду кластеры $\delta_i(\varepsilon)$, для которых $L(\delta_i) \sim |\delta_i|^\alpha$, если речь идет о мере $L(dt)$, и $|\delta(\varepsilon)| \sim \varepsilon^\alpha$, если речь идет о размерах кластера. Скажем, что $Z_\mu(\alpha)$ есть μ-предел $Z^{(\varepsilon)}(\alpha)$, если существует последовательность мер на $Z^{(\varepsilon)}(\alpha)$, сходящихся к нетривиальной мере μ с носителем $Z_\mu(\alpha)$. В условиях мультифрактального формализма ожидаемая размерность правильных пределов $Z^{(\varepsilon)}(\alpha)$ должна быть $f_L^*(\alpha)$ для случая $L(dt)$ и $f_{CL}(\alpha)/\alpha$ для случая кластерных размеров типа α. В действительности, для многих типов мер множество $Z_\mu(\alpha)$ статистически эквивалентно исходному множеству Z и, следовательно, имеет максимальную размерность 1/2 независимо от α. Оказывается этот факт слабо связан с мультифрактальным формализмом; он указывает лишь на то, что мера локального времени достаточна для изучения тонкой структуры множества Z.

Недавно Д. Долгопят (персональное сообщение) показал, что нижний предел $Z^{(\varepsilon)}(\alpha)$

$$Z_-(\alpha) = \cup_n \cap_{k\geq n} Z^{(\varepsilon_k)}(\alpha)$$

демонстрирует свойство монофрактальности Z, если $\varepsilon_k/\varepsilon_{k+1} = c > 1$; а именно,

$$\dim Z_-(\alpha) = 0, \quad \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$$

(α_i указаны выше). В тех же условиях верхний предел

$$Z_+(\alpha) = \cap_n \cup_{k\geq n} Z^{(\varepsilon_k)}(\alpha)$$

оказался тем подходящим пределом $Z^{(\varepsilon)}(\alpha)$, для которого выполнено А-свойство мультифрактального формализма:

$$\dim Z_+(\alpha) = \begin{cases} f_{L^*}(\alpha), & \alpha \in [1/2, 3/4), \\ f_{CL}(\alpha)/\alpha, & \alpha \in [1, 2). \end{cases}$$

Наконец, верхний и нижний пределы $Z^{(\varepsilon_k)}(\alpha)$ удовлетворяют свойству (А), если $\varepsilon_k/\varepsilon_{k+1} \to \infty$. Как видим, рассматриваемый фрактал не совсем обычен:

– выводы о тонкой структуре Z существенно зависят от выбора стратегии наблюдения. Если в моделях развитой турбулентности (мультифрактальные каскадные меры, [7]) пределы $Z_+(\alpha)$ и $Z_-(\alpha)$ удовлетворяют свойству (А) при экспоненциальном изменении масштаба, то для Z это имеет место только при сверхбыстром (быстрее экспоненциального) наращивания параметра разрешения ε. Такая стратегия на практике вряд ли реалистична;

– μ-пределы и нижний предел множеств $Z^{(\varepsilon)}(\alpha)$ можно отнести к категории наблюдаемых. Этого нельзя сказать о верхнем пределе. Дело в том, что с каждой точкой из $Z_+(\alpha)$ связана своя и возможно очень редкая бесконечная последовательность уровней разрешения $\{\varepsilon_{n_k}\}$, при которых эта точка идентифицируется как сингулярная типа α. Поэтому А-свойство предела $Z^{(\varepsilon_k)}(\alpha)$ является скорее математическим, нежели физическим фактом.

Заметим, что в обоих подходах области значений размерностных функций $f_{L^*}(\alpha)$ и $f_{CL}(\alpha)/\alpha$ совпадают. Это указывает на то, что оба подхода, по-видимому, равноправны при описании тонкой фрактальной структуры множества Z.

Статья организована следующим образом: разд. 1 содержит вспомогательные утверждения, доказательство которых вынесено в Приложение; разд. 2 содержит определения и расчеты τ-функции Реньи для меры $L(dt)$ и кластерных размеров; разд. 3 содержит предельные теоремы для ε-кластеров, расчеты спектров $f(\alpha)$ и проверку мультифрактального формализма; в разд. 4 указаны возможные обобщения результатов на другие случайные множества типа Z.

Основные обозначения

$\stackrel{d}{=}$ – равенство распределений;

d-lim или $\stackrel{d}{\to}$ – сходимость по распределению; для функциональных объектов оба символа означают сходимость конечномерных распределений;

$g_\alpha(t)$ – устойчивый процесс Леви с независимыми приращениями и преобразованием Лапласа $E\exp(-\theta g_\alpha(t)) = \exp(-t\theta^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$;

G_α – область притяжения устойчивого распределения $g_\alpha(1)$, (см. [12]).

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть $w(t)$, $t \geq 0$ *– броуновское движение,* Z *– множество его нулей.* Вероятностную структуру Z можно описать посредством локального времени $L(t)$ (см. [10]). Случайный процесс $L(t)$ имеет неубывающие непрерывные траектории, точки роста которых идентичны по распределению нулям Z. Обратная функция к $L(t)$, взятая непрерывной справа, представляет односторонний устойчивый процесс Леви $t(L)$ с показателем $1/2$. Точнеее, $t(L)$ допускает представление

$$t(L) = \int_0^L \int_0^\infty \tau\pi(dl, d\tau) \tag{2}$$

через пуассоновскую меру π с интенсивностью

$$E\pi(dl, d\tau)/dld\varepsilon = (2\pi\tau^3)^{-1/2} = p(\tau).$$

Здесь переменная τ описывает величину скачка $t(L)$ или величину интервала между нулями $w(t)$, а переменная l – уровень локального времени.

Зададимся порогом разрешения ε на множестве Z, соединив все пары точек из Z с расстоянием меньше ε. Возникший граф Z_ε распадается на связные кластеры $\delta_i(\varepsilon)$. В рассматриваемой одномерной ситуации кластеры образуют интервалы длины $|\delta_i(\varepsilon)|$. Их дополнение к R^1_+ состоит из лакун $\Delta_i(\varepsilon)$ размером $|\Delta_i| \geq \varepsilon$. Функция локального времени постоянна на Δ_i и имеет приращения

$$L_i(\varepsilon) = \int_{\delta_i(\varepsilon)} dL(t)$$

в кластерных интервалах $\delta_i(\varepsilon)$.

Утверждение 1. Вероятностная структура серии случайных величин

$$S_\varepsilon = \{|\Delta_i(\varepsilon)|,\, L_i(\varepsilon),\, |\delta_i(\varepsilon)|,\, i = 1, \ldots, \nu(t,\varepsilon),\, t \in \delta_\nu(\varepsilon) \cup \Delta_\nu(\varepsilon)\},$$

связанных с ε-кластерами из интервала $[0,t]$, определяется соотношением

$$S_\varepsilon \stackrel{d}{=} \{\varepsilon\xi_i^+,\, \sqrt{\pi\varepsilon/2}\eta_i,\, \varepsilon\xi_i^-,\, i = 1, \ldots, \nu(t/\varepsilon)\},$$

где $\nu(t/\varepsilon) \geq 1$ – наибольшее число, для которого

$$\sum_{i=1}^{\nu-1} (\xi_i^+ + \xi_i^-) < t/\varepsilon. \tag{3}$$

Здесь $(\xi_i^+, \nu_i, \xi_i^-)$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов, у которых ξ_i^+ и (ν_i, ξ_i^-) независимы, ξ_i^+ имеет плотность распределения

$$f_+(\tau) = 1/2\tau^{-3/2}, \qquad \tau \geq 1, \tag{4}$$

а распределение пары (η, ξ^-) определяется преобразованием Лапласа

$$E\exp(-s_1\eta - s_2\xi^-) = [1 + s_1 - \int_0^1 (1-\exp(-s_2\tau))d\tau^{-1/2}]^{-1}. \tag{5}$$

В частности, η имеет экспоненциальную плотность

$$f_\eta(x) = \exp(-x), \qquad x > 0, \tag{6}$$

а ξ^- такова, что

$$P(\xi^- > x) < c\exp(æx), \qquad æ = 0.567, \tag{7}$$

$$P(\xi^- < x) = \sqrt{x}/\pi(1+o(1)), \qquad x \to 0, \tag{8}$$

т.е. ξ^- имеет моменты $E(\xi^-)^q$ для всех $q > -1/2$.

Утверждение 2. Функция распределения $F_\rho(x)$ случайной величины

$$\eta_\rho = \eta^\rho \xi^- = \eta^\rho \int_0^1 \ell\pi([0,\eta]\times d\ell)$$

имеет следующую асимптотику:
а) при $x \to 0$

$$F_\rho(x) = \begin{cases} o(x^N), & \rho < -2, \ N\text{– любое}, \\ c_\rho x^{1/(2+\rho)}(1+o(1)), & \rho > -2, \end{cases}$$

б) при $x \to \infty$

$$1 - F_\rho(x) = c_\rho \begin{cases} o(x^{-N}), & \rho > 0, \ N\text{– любое}, \\ x^{2/\rho}(1+o(1)), & -4 < \rho < 0, \ 2/\rho \neq -1, -2, \ldots, \\ x^{1/(2+\rho)}(1+o(1)), & \rho < -4. \end{cases}$$

Анализ мультифрактальности связан с изучением статистик вида

$$\sum_{i=1}^{\nu(t/\varepsilon)} F(\xi_i^-, \nu_i),$$

где число слагаемых зависит от элементов суммы. Этого можно избежать, заменив ν на момент $\nu^* \geq \nu$ первого перескока уровня t/ε суммами $\sum_1^n \xi_i^+$, не зависящими от $\{\xi_i^-, \nu_i\}$. О близости ν и ν^* дает представление следующее

Утверждение 3. Величина $\nu^*(u) \geq \nu(u)$ и

$$d\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^\theta(\nu^*(t/\varepsilon) - \nu(t/\varepsilon)) = \begin{cases} 0, & \theta > 1/4, \\ \infty, & \theta < 1/4. \end{cases}$$

Следовательно, как и для $\nu(t/\varepsilon)$,

$$d\text{-}\lim \sqrt{\pi\varepsilon/2}\,\nu^*(t/\varepsilon) = L(t), \qquad \varepsilon \to 0.$$

Утверждение 4. Пусть $\zeta_i = f(\xi_i^-, \eta_i) \geq 0$. Если

$$P(\zeta_i > x) = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha}(1+o(1)), \qquad x \to \infty, \;\; \alpha \in (0,1), \tag{9}$$

то

$$d\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{1/2\alpha} \sum_{i=1}^{\nu(t/\varepsilon)} \zeta_i[\sqrt{\varepsilon}\nu(t/\varepsilon)]^{\beta} = g_\alpha(\sqrt{2/\pi}cL(t))(\sqrt{2/\pi}L(t))^{\beta}, \tag{10}$$

где $g_\alpha(u)$ *– устойчивый процесс Леви с показателем* α *и независимый от* $L(t)$.

Если $m = E\zeta_i < \infty$, *то*

$$d\text{-}\lim \sqrt{\varepsilon} \sum_{i=1}^{\nu(t/\varepsilon)} \zeta_i[\sqrt{\varepsilon}\nu(t/\varepsilon)]^{\beta} = m[\sqrt{2/\pi}L(t)]^{1+\beta}. \tag{11}$$

Доказательства утверждений 1–4 вынесены в Приложение.

Утверждение 5. Пусть $\varphi(\varepsilon) \uparrow \infty$, $\varepsilon \downarrow 0$. *Тогда при фиксированном* t

$$P\{\varepsilon^2/\varphi(\varepsilon) < |\delta_i(\varepsilon)| < \varepsilon \ln 1/\varepsilon, \;\; i = 1, \dots, \nu(t,\varepsilon)\} \to 1, \quad \varepsilon \downarrow 0. \tag{12}$$

Доказательство. Обозначим через $\bar{\delta}_\varepsilon$ и $\underline{\delta}_\varepsilon$ максимум и минимум из величин

$$\{|\delta_i(\varepsilon)|, \;\; i = 1, \dots, \nu(t,\varepsilon)\}$$

соответственно. Пусть $A_\varepsilon = \{\nu_\varepsilon < \varepsilon^{-æ'}\}$, $\nu_\varepsilon = \nu(t/\varepsilon)$, тогда

$$P\{\bar{\delta}_\varepsilon > x\} \le P\{\max(\xi_i^-, \, i = 1, \dots, \nu_\varepsilon) > x/\varepsilon, \, A_\varepsilon\} + P(\bar{A}_\varepsilon) <$$
$$< \varepsilon^{-æ'} P(\xi_i^- > x/\varepsilon) + P(\bar{A}_\varepsilon).$$

Используя оценку (7), имеем при $1/2 < æ' < æ$

$$P\{\bar{\delta}_\varepsilon > \varepsilon \ln 1/\varepsilon\} < c\varepsilon^{æ - æ'} + P(\bar{A}_\varepsilon) = o(1).$$

В самом деле, $P(\bar{A}_\varepsilon) \to 0$, поскольку $\nu_\varepsilon\sqrt{\varepsilon}/\varphi(\varepsilon) \xrightarrow{d} 0$, если $\varphi \uparrow \infty$ с $\varepsilon \downarrow 0$.

Аналогично, полагая $x = \varepsilon^2/\varphi(\varepsilon)$ и $A_\varepsilon = \{\nu_\varepsilon < \varepsilon^{-1/2}\sqrt[4]{\varphi(\varepsilon)}\}$, имеем

$$P\{\underline{\delta}_\varepsilon < x\} \le P\{\min(\xi_i^-, \, i = 1, \dots, \nu_\varepsilon) < x/\varepsilon, \, A_\varepsilon\} + P(\bar{A}_\varepsilon) <$$
$$< P(\xi_i^- < x/\varepsilon)\varepsilon^{-1/2}\sqrt[4]{\varphi(\varepsilon)} + P(\bar{A}_\varepsilon) < c\sqrt{\varepsilon/\varphi}\varepsilon^{-1/2}\varphi^{1/4}(\varepsilon) + P(\bar{A}_\varepsilon) = o(1).$$

В последнем неравенстве использована оценка (8). Искомая вероятность (12) допускает оценку

$$P > 1 - P(\bar{\delta}_\varepsilon > \varepsilon \ln 1/\varepsilon) - P(\underline{\delta}_\varepsilon < \varepsilon^2/\varphi(\varepsilon)) \to 1, \qquad \varepsilon \downarrow 0.$$

Доказательство закончено.

2. ФУНКЦИЯ РЕНЬИ $\tau(q)$

В работе [9] дано обобщение τ-функции на случай разбиений носителя меры с неравными ячейками. Следуя [9], определим $\tau(q)$ для меры $L(dt)$ на $J = [0,1]$. Рассмотрим ε-кластеры как элементы разбиения $\mathcal{T}_\varepsilon$ интервала J. Уточнение разбиения вне Z_ε не требуется, поскольку L-мера дополнения ε-кластеров равна нулю. Рассмотрим функцию

$$\Phi_\varepsilon(q,\tau) = \sum_i l_i^q(\varepsilon)|\delta_i(\varepsilon)|^{-\tau}, \quad \delta_i(\varepsilon) \subset J, \tag{13}$$

где

$$l_i(\varepsilon) = L_i(\varepsilon)/\sum_i L_i(\varepsilon), \quad \delta_i(\varepsilon) \subset J$$

суть нормированные приращения локального времени на ε-кластерах. Если τ^* таково, что существуют пределы

$$d\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} \Phi_\varepsilon(q,\tau) = \begin{cases} \infty, & \tau > \tau^*, \\ 0, & \tau < \tau^*, \end{cases} \tag{14}$$

тогда функция $\tau_L^*(q) : q \to \tau^*$ является функцией Реньи или τ-функцией сингулярностей меры $L(dt)$.

В определении τ^* требуется равномерная малость ячеек $\delta_i(\varepsilon)$, где рассматриваются ненулевые приращения меры $L(dt)$. Утверждение 5 показывает, что размеры ε-кластеров из фиксированного отрезка равномерно малы в стохастическом смысле:

$$P\left\{|\delta_i| \in (\varepsilon^2/\ln 1/\varepsilon,\ \varepsilon \ln 1/\varepsilon),\ \delta_i \in J\right\} \to 1, \quad \varepsilon \to 0.$$

Если существует τ-функция меры (1), то она совпадает с обобщенной $\tau^*(q)$ для случая покрытий $\mathcal{T}$ с равными ячейками. Однако исходное определение (1) оказывается содержательным и в случае общих разбиений $\mathcal{T}_n$. Ниже (1) используется в качестве определения τ-функции для размеров приращений меры $L(dt)$ на ε-кластерах, а также для размеров самих кластеров.

Теорема 1. *Рассмотрим ε-кластеры нулей Z на отрезке [0,1]. Справедливы утверждения:*

а) τ-функция сингулярностей меры $L(dt)$ есть

$$\tau_L^*(q) = \min((q-1)/2,\ 3q/4), \quad |q| < \infty;$$

б) τ-функция размеров приращений $L(dt)$ на ε-кластерах имеет вид

$$\tau_L(q) := d\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} \ln \sum_{i=1}^{\nu_\varepsilon} L_i^q(\varepsilon)/\ln\varepsilon = \min((q-1)/2, q), \quad |q| < \infty;$$

в) τ-функция размеров ε-кластеров имеет вид

$$\tau_{CL}(q) := d\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} \ln \sum_{i=1}^{\nu_\varepsilon} |\delta_i(\varepsilon)|^q/\ln\varepsilon = \min(q - 1/2,\ 2q).$$

Здесь ν_ε – число ε-кластеров в интервале [0,1].

Доказательство. а) Элемент суммы (13) записывается как

$$\ell_i^q(\varepsilon)|\delta_i(\varepsilon)|^{-\tau} \stackrel{d}{=} \varepsilon^{-\tau}\eta_i^q[\xi_i^-]^{-\tau}\left[\sum_{i=1}^{\nu_\varepsilon}\eta_i\right]^{-q}.$$

Поскольку

$$\zeta = \eta^q/[\xi_i^-]^{-\tau} = [\eta^\rho\xi_i^-]^{-\tau}, \qquad \rho = -q/\tau,$$

то можно использовать утверждение 2 для нахождения асимптотики $P(\zeta > x)$ при $x \to \infty$. Нетрудно видеть, что

$$P(\zeta > x) = cx^{-\alpha}(1+o(1)), \qquad x\to\infty, \qquad 0<\alpha<1,$$

где

$$\alpha = \begin{cases} (2\tau-q)^{-1}, & \tau > \max(q/4,(q+1)/2), \\ -2/q, & \tau < q/4, q<-2, 2\tau \neq qn,\ n=1,2,\dots . \end{cases} \tag{15}$$

В области параметров (q,τ):

$$D = \{(q,\tau):\ \tau < (q+1)/2,\ \ q > -2\} \tag{16}$$

величина ζ имеет конечное среднее $E\zeta < \infty$.

Остается применить утверждение 4, чтобы получить предельное распределение (13). Имеем

$$\Phi_\varepsilon(q,\tau) \stackrel{d}{=} \varepsilon^{-\tau}\sum_{i=1}^{\nu_\varepsilon}\eta_i^q[\xi_i^-]^{-\tau}\nu_\varepsilon^{-q}\left[\nu_\varepsilon^{-1}\sum_{i=1}^{\nu_\varepsilon}\eta_i\right]^{-q}.$$

Если $\alpha = \alpha(\tau,q)$ определено соотношением (15), то

$$\varepsilon^{1/(2\alpha)}\sum_{i=1}^{\nu_\varepsilon}\eta_i^q[\xi_i^-]^{-\tau}[\sqrt{\varepsilon}\nu_\varepsilon]^{-q} \xrightarrow{d} g_\alpha(\hat{c}L(1))\left[\sqrt{2/\pi}L(1)\right]^{-q} = X,$$

где $g_\alpha(\cdot)$ и $L(1)$ независимы, $\hat{c} = c\Gamma(1-\alpha)\sqrt{2/\pi}$. При всех параметрах (q,τ)

$$\nu_\varepsilon^{-1}\sum_{i=1}^{\nu_\varepsilon}\eta_i \xrightarrow{d} E\eta = 1.$$

Поэтому

$$\varepsilon^{\tau+0.5(\alpha^{-1}-q)}\Phi_\varepsilon(q,\tau) \xrightarrow{d} X, \qquad \varepsilon\to 0. \tag{17}$$

Если $(q,\tau)\in D$, то согласно утверждению 4

$$\varepsilon^{\tau+0.5(\alpha^{-1}-q)}\Phi_\varepsilon(q,\tau) \xrightarrow{d} \left[\sqrt{2/\pi}L(1)\right]^{1-q}E\zeta, \qquad \varepsilon\to 0. \tag{18}$$

Соотношения (17), (18) определяют асимптотику $\Phi_\varepsilon(q,\tau)$ для всех параметров (q,τ) за исключением счетной серии полупрямых:

$$2\tau - q = 1,\ q \ge -2;\ 4\tau - nq = 0,\ q < -2,\ n = 1, 2, 4, 6, \dots .$$

Функции $\tau \to \Phi_\varepsilon(q,\tau)$ монотонны, поэтому для определения $\tau^*(q)$ достаточно знать асимптотику $\Phi_\varepsilon(q,\tau)$ для всюду плотного множества параметров (q,τ). Из предельных соотношений (17), (18) получаем в соответствии с (14) уравнения для τ^*:

$$\begin{cases} \tau + 0.5(\alpha^{-1}(q,\tau) - q) = 0, & (q,\tau)\bar{\in} D, \\ \tau + 0.5(1-q) = 0, & (q,\tau) \in D, \end{cases} \tag{19}$$

где α и D определены соответственно в (15) и (16). Значение $\alpha^{-1} = 2\tau - q$ ведет к противоречию при всех q, а $\alpha^{-1} = -q/2$ дает искомый вид $\tau_L^*(q)$ при $q \le -2$. При $q \ge -2$ функция $\tau_L^*(q)$ определяется вторым уравнением (19).

Доказательство остальных утверждений совершенно аналогично.

3. МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОСТЬ Z

Экспоненциальные показатели

Теорема 2. Пусть $N_\varepsilon^{(\alpha)}(t)$ – число ε-кластеров в интервале $(0,t)$ типа α, т.е. подчиненных одному из фиксированных условий

$$\begin{array}{ll} \text{(а)} & |\delta_i(\varepsilon)|^\alpha \varphi(|\delta_i(\varepsilon)|) < L_i(\varepsilon) < x|\delta_i(\varepsilon)|^\alpha, \\ \text{(б)} & \varepsilon^\alpha \varphi(\varepsilon) < L_i(\varepsilon) < x\varepsilon^\alpha, \\ \text{(в)} & \varepsilon^\alpha \varphi(\varepsilon) < |\delta_i(\varepsilon)| < x\varepsilon^\alpha, \end{array} \tag{20}$$

где $\varphi \ge 0$ – неубывающая функция, непрерывная в 0, $\varphi(0) = 0$, и

$$\varphi(x)x^{-\rho} \to \infty,\ x \to 0\ \ \forall \rho > 0.$$

Тогда имеет место сходимость случайных процессов

$$d\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} N_\varepsilon^{(\alpha)}(t)\varepsilon^{f(\alpha)} = \begin{cases} C_{\alpha,x}L(t), & \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2), \\ \Pi_\Lambda(t), & \Lambda = \lambda_x L(t),\ \ \alpha = \alpha_2, \end{cases}$$

где $\Pi_\Lambda(t)$ – пуассоновский процесс со случайной интенсивностью $\Lambda(t)$; $f(\alpha)$, интервал $[\alpha_1, \alpha_2]$ и λ_x определяются следующей таблицей соответственно:

$$\begin{array}{llll} \text{(а)} & f_L^*(\alpha) = 3/2 - 2\alpha, & \alpha \in [1/2, 3/4], & \lambda_x = cx^2, \\ \text{(б)} & f_L(\alpha) = 1 - \alpha, & \alpha \in [1/2, 1], & \lambda_x = (2/\pi)x, \\ \text{(в)} & f_{CL}(\alpha) = 1 - \alpha/2, & \alpha \in [1, 2], & \lambda_x = \sqrt{2x/\pi^3}. \end{array}$$

Для $\alpha \bar{\in} [\alpha_1, \alpha_2]$, предел $d\text{-}\lim N_\varepsilon^{(\alpha)}(t) = 0$.

Преобразование Лежандра $\mathcal{L}f$ указанных функций $f(\alpha)$ совпадает с соответствующими τ-функциями из теоремы 1.

Замечание. Теорема 2 показывает, что число ε-кластеров типа α на фиксированном отрезке имеет степенной порядок роста по ε: $O(\varepsilon^{-f(\alpha)})$. Вне указанного интервала α показатель $f(\alpha)$ естественно доопределить: $f(\alpha) = -\infty$, поскольку $P(N_\varepsilon^{(\alpha)}(t_0) = 0) \to 1,\ \varepsilon \to 0$. Полученная функция $f(\alpha)$ определяет мультифрактальные спектры: (а) сингулярностей меры $L(dt)$, (б) приращений меры $L(dt)$ на

ε-кластерах и (в) размеров ε-кластеров. Совпадение $\mathcal{L}f$ с соответствующими τ-функциями означает выполнение B-условия мультифрактального формализма для рассматриваемых характеристик мультифрактальности Z.

Доказательство. Пусть $A_i^{(\alpha)}$ – события типа (20).

Шаг 1: оценка вероятности $P(A_i^{(\alpha)})$. В терминах случайных величин (20)(а) эквивалентно событию

$$A_i^{(\alpha)}: \ c(\varepsilon\xi_i^-)^\alpha\varphi(\varepsilon\xi_i^-) < \varepsilon^{1/2}\eta_i < (\varepsilon\xi_i^-)^\alpha cx, \qquad c = \sqrt{2/\pi}.$$

Оценим вероятность $A_i^{(\alpha)}$:

$$P(A_i^{(\alpha)}) = P(\eta_i[\xi_i^-]^{-\alpha} < cx\varepsilon^{\alpha-1/2}) - P(\eta_i[\xi_i^-]^{-\alpha} < c\varphi(\varepsilon\xi_i^-)\varepsilon^{\alpha-1/2}) := P_1 - P_2.$$

Используя утверждение 2, находим асимптотику P_1 при $\varepsilon \to 0$:

$$P_1(\varepsilon) = \begin{cases} 1 - o(\varepsilon^{-N}) \ \ \forall N, & \alpha \in (0,1/2), \\ P(\eta/\sqrt{\xi^-} < cx), & \alpha = 1/2, \\ c_\alpha x^2\varepsilon^{2\alpha-1}(1+o(1)), & \alpha > 1/2, \ \alpha \neq 2,3,\dots . \end{cases} \tag{21}$$

В силу монотонности φ

$$\varphi(\varepsilon\xi^-) < \varphi(\varepsilon^{1-\rho}), \ \text{ если } \ \xi^- < \varepsilon^{-\rho}, \ \ \rho \in (0,1).$$

Отсюда

$$P_2(\varepsilon) \le P(\eta(\xi^-)^{-\alpha} < c\varepsilon^{\alpha-1/2}\varphi(\varepsilon^{1-\rho})) + P(\xi^- > \varepsilon^{-\rho}). \tag{22}$$

Пусть $\alpha \ge 1/2$. Тогда первое слагаемое в (22) имеет порядок $o(\varepsilon^{2\alpha-1})$. Это следует из (21) с $x = \varphi(\varepsilon^{1-\rho}) \to 0$, $\varepsilon \to 0$. Оценка второго слагаемого из (22) следует из (7):

$$P(\xi^- > \varepsilon^{-\rho}) \le c\exp(-æ\varepsilon^{-\rho}).$$

Пусть $\alpha < 1/2$. Имеем

$$\begin{aligned} P(A_i^{(\alpha)}) &\le P(\eta(\xi^-)^{-\alpha} > c\varepsilon^{\alpha-1/2}\varphi(\varepsilon\xi^-)) \le \\ &\le P(\eta(\xi^-)^{-\alpha} > c\varepsilon^{\alpha-1/2}\varphi(\varepsilon^{1+n})) + P(\xi^- < \varepsilon^n) \le \\ &\le P(\eta(\xi^-)^{-\alpha} > c\varepsilon^{(\alpha-1/2)/2}) + P(\xi^- < \varepsilon^n), \qquad \forall n > 0, \varepsilon < \varepsilon_0. \end{aligned} \tag{23}$$

В последнем неравенстве использовано то обстоятельство, что

$$\varepsilon^{-c_1}\varphi(\varepsilon^{c_2}) \to \infty, \ \ c_i > 0, \ \ \varepsilon \to 0.$$

В силу (21) первое слагаемое в (23) имеет порядок $O(\varepsilon^{-N})$, $\forall N$. То же верно и для второго слагаемого в силу оценки (8) и произвольности n.

Итак, в случае (а) теоремы 2

$$P(A_i^{(\alpha)}) = \begin{cases} o(\varepsilon^N), & \alpha \in (0,1/2), \\ P_1(\varepsilon)(1+o(1)), & \alpha \ge 1/2, \ \ \alpha \neq 2,3,\dots . \end{cases} \tag{24}$$

Шаг 2: $N_\varepsilon^{(\alpha)}(t) \xrightarrow{d} 0$, *если* $\alpha \bar{\in} [\alpha_1, \alpha_2]$. Продолжим случай (а). Имеем $(\alpha_1, \alpha_2) = (1/2, 3/4)$. Представим $N_\varepsilon^{(\alpha)}(t)$ в виде

$$N_\varepsilon^{(\alpha)}(t) = \sum_{i=1}^{\nu(t/\varepsilon)} \chi_i, \tag{25}$$

где χ_i – характеристическая функция события $A_i^{(\alpha)}$. Согласно (21), (24)

$$E\chi_i = P(A_i^{(\alpha)}) = O(\varepsilon^{1/2+\delta}), \qquad \delta \neq \delta(\alpha) > 0.$$

Пусть

$$B_n = \left\{\omega : \sum_{i=1}^{n} \chi_i > 1/2\right\}, \qquad n_\varepsilon = \varepsilon^{-1/2-\rho},\ 0 < \rho < \delta.$$

Тогда

$$P(N_\varepsilon^{(\alpha)}(t) > 1/2) = P(B_{\nu(t/\varepsilon)}, \nu(t/\varepsilon) \le n_\varepsilon) + P(\nu(t/\varepsilon) > n_\varepsilon) < \\ < P(B_{n_\varepsilon}, \nu(t/\varepsilon) \le n_\varepsilon) + o(1) \le P(B_{n_\varepsilon}) + o(1).$$

По неравенству Чебышева

$$P(B_{n_\varepsilon}) < 2n_\varepsilon P(A_i^{(\alpha)}) = O(\varepsilon^{\delta-\rho}) = o(1), \qquad \varepsilon \to 0.$$

Поэтому

$$P(\max_{[0,T]} N_\varepsilon^{(\alpha)}(t) > 1/2) = P(N_\varepsilon^{(\alpha)}(T) > 1/2) = o(1), \qquad \varepsilon \to 0.$$

Шаг 3: предел $\varepsilon^{f(\alpha)} N_\varepsilon^{(\alpha)}(t)$ при $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$. В силу представления (25) предельное распределение $N_\varepsilon^{(\alpha)}(t)$ находится так же, как предельное распределение сумм (10) из утверждения 4. Различие в том, что χ_i есть функция ξ_i^-, η_i и параметра ε, что никак не отражается на способе доказательства.

Сначала вместо (25) рассматриваются модифицированные суммы

$$\xi_\varepsilon^*(t) = \sum_{i=1}^{\nu^*(t/\varepsilon)} \chi_i \varepsilon^{f(\alpha)},$$

где $\nu^*(t/\varepsilon)$ не зависит от $\{A_i^{(\alpha)}\}$. Преобразование Лапласа распределения вектора $\xi_\varepsilon^*(t_1) \dots \xi_\varepsilon^*(t_N)$ имеет вид

$$\Phi_\varepsilon = E\exp(-\sum_{i=1}^{N} \theta_i \xi_\varepsilon^*(t_i)) = E\exp(-\sum_{i=1}^{N} \psi_{\varepsilon,k} \Delta\nu_k^*),$$

где

$$\Delta\nu^*(k) = \nu^*(t_k/\varepsilon) - \nu^*(t_{k-1}/\varepsilon),$$

$$\psi_{\varepsilon,k} = -\ln[1 - (1 - \exp(-\sum_{i=k}^{N} \theta_i \varepsilon^{f(\alpha)}))P(A^{(\alpha)})].$$

В случае (а) теоремы 2 $f(\alpha) = 3/2 - 2\alpha$, $(\alpha_1, \alpha_2) = (1/2, 3/4)$,

$$P(A^{(\alpha)}) = c_{\alpha,x}\varepsilon^{1/2-f(\alpha)}(1+o(1)), \tag{26}$$

где

$$c_{\alpha,x} = \begin{cases} P(\eta/\sqrt{\xi^-} < \sqrt{2/\pi}x), & \alpha = 1/2, \\ c_\alpha x^2, & \alpha > 1/2. \end{cases} \tag{27}$$

Пусть $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2)$. Тогда $f(\alpha) > 0$ и

$$\psi_{\varepsilon,k} = c_{\alpha,x}\sum_{i=k}^{N}\theta_i\varepsilon^{1/2}(1+o(1)),$$

где $o(1) \to 0$, $\varepsilon \to 0$ равномерно по θ_i из конечного интервала $[0,\Theta]$. В силу того, что

$$\varepsilon^{1/2}\Delta\nu_k^* \xrightarrow{d} \sqrt{2/\pi}(L(t_k) - L(t_{k+1})), \qquad \varepsilon \to 0,$$

имеем

$$\psi_\varepsilon := \sum_{k=1}^{N}\psi_{\varepsilon,k}\Delta\nu_k^* \xrightarrow{d} \sqrt{2/\pi}c_{\alpha,x}\sum_{i=1}^{N}\theta_i L(t_i) = \psi_0, \qquad \varepsilon \to 0.$$

Учитывая ограниченность $\exp(-\psi_\varepsilon) < 1$, имеем

$$\Phi_\varepsilon = E\exp(-\psi_\varepsilon) \to E\exp(-\psi_0), \qquad \varepsilon \to 0.$$

Значит,

$$d\text{-}\lim\xi_\varepsilon^*(t) = \sqrt{2/\pi}c_{\alpha,x}L(t).$$

Пусть $\alpha = \alpha_2$. Тогда $f(\alpha) = 0$ и

$$\psi_{\varepsilon,k} = \left(1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^{N}\theta_i\right)\right)c_{\alpha_2,x}\varepsilon^{1/2}(1+o(1)).$$

Поэтому

$$\psi_\varepsilon \xrightarrow{d} \sqrt{2/\pi}c_{\alpha_2,x}\sum_{k=1}^{N}\left(1-\exp\left(-\sum_{i=k}^{N}\theta_i\right)\right)[L(t_k) - L(t_{k-1})]$$

и

$$d\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0}\xi_\varepsilon^*(t) = \Pi_\Lambda(t),$$

где Π_Λ – пуассоновский процесс со случайной мерой интенсивности

$$d\Lambda(t) = c_{\alpha_2,x}\sqrt{2/\pi}dL(t),$$

независимой от событий Π. В случае (a) теоремы 2 имеем $c_{\alpha_2,x} = c_{\alpha_2}x^2$ (см. (27)). Теперь, учитывая близость $\nu^*(t/\varepsilon)$ и $\nu(t/\varepsilon)$ (утверждение 3), покажем, что

$$\Delta_\varepsilon(t) = (\xi_\varepsilon^*(t) - N_\varepsilon^{(\alpha)}(t)\varepsilon^{f(\alpha)} \xrightarrow{d} 0.$$

В самом деле,

$$P(\Delta_\varepsilon(t) > y) = P\left(\sum_{i=1}^{\nu^*-\nu} \chi_{\nu+i}\varepsilon^{f(\alpha)} > y\right), \qquad \nu^* = \nu^*(t/\varepsilon), \quad \nu = \nu(t/\varepsilon).$$

Величина ν является марковским моментом, т.е. событие $\{\nu = m\}$ измеримо относительно $\{\xi_i^\pm\ i = 1, \ldots, m\}$. Поэтому в последнем соотношении величины $\chi_{\nu+i}$ можно заменить на χ_i, причем $\nu^* - \nu$ уже не зависит от $A_i^{(\alpha)}$. Но

$$P\left(\sum_{i=1}^{\nu^*-\nu} \chi_i\varepsilon^{f(\alpha)} > y\right) < P\left(\sum_{i=1}^{\nu^*-\nu} \chi_i\varepsilon^{f(\alpha)} > y, \nu^* - \nu < \varepsilon^{-\theta}\right) +$$

$$+P(\nu^* - \nu > \varepsilon^{-\theta}) < P\left(\sum_{i=1}^{\varepsilon^{-\theta}} \chi_i\varepsilon^{f(\alpha)} > y\right) + P(\nu^* - \nu > \varepsilon^{-\theta}) <$$

$$< \varepsilon^{f(\alpha)-\theta} P(A^{(\alpha)})/y + P(\nu^* - \nu > \varepsilon^{-\theta}). \tag{28}$$

В (28) использовано неравенство Чебышева. Пусть $1/4 < \theta < 1/2$, тогда первое слагаемое в (28) имеет порядок $O(\varepsilon^{1/2-\theta})$ (см. (26)), а второе имеет порядок $o(1)$ в силу утверждения 4. Ввиду произвольности y

$$d\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} \Delta_\varepsilon(t) = 0.$$

Шаг 4: случаи (б), (в) *теоремы* 2. Доказательство повторяет предыдущие шаги. Требует конкретизации асимптотика вероятности $P(A^{(\alpha)})$. Интервал $[\alpha_1, \alpha_2]$ определяется такими значениями α, при которых $N_\varepsilon^{(\alpha)}(t) \neq o(1)$. Это условие эквивалентно условию $\nu(t/\varepsilon)P(A^{(\alpha)}) \neq o(1)$ или $\varepsilon^{-1/2}P(A^{(\alpha)}) \neq o(1)$, $\varepsilon \downarrow 0$.

Случай (б):

$$P(A^{(\alpha)}) = P(\sqrt{2/\pi}\varepsilon^{\alpha-1/2}\varphi(\varepsilon) \le \eta_i \le \sqrt{2/\pi}x\varepsilon^{\alpha-1/2}).$$

С учетом (6)

$$P(A^{(\alpha)}) = \begin{cases} o(\varepsilon^N)\ \forall N, & 0 < \alpha < 1/2, \\ 1 - \exp(-\sqrt{2/\pi}x) + o(1), & \alpha = 1/2, \\ \sqrt{2/\pi}x\varepsilon^{1/2-f(\alpha)}(1 + o(1)), & \alpha > 1/2, \end{cases}$$

где $f(\alpha) = 1 - \alpha$. Отсюда $(\alpha_1, \alpha_2) = (1/2, 1)$ и

$$\Lambda(t) = \sqrt{2/\pi}x\sqrt{2/\pi}L(t) = 2/\pi x L(t).$$

Случай (в):

$$P(A^{(\alpha)}) = P(\varepsilon^{\alpha-1}\varphi(\varepsilon) < \xi^- \le x\varepsilon^{\alpha-1}).$$

С учетом (7), (8)

$$P(A^{(\alpha)}) = \begin{cases} o(\varepsilon^N)\ \forall N, & 0 < \alpha < 1, \\ P(\xi^- \le x) + o(1), & \alpha = 1, \\ \sqrt{x}/\pi\varepsilon^{1/2-f(\alpha)}(1 + o(1)), & \alpha > 1, \end{cases}$$

где $f(\alpha) = 1 - \alpha/2$. Отсюда $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, 2)$ и

$$\Lambda(t) = \sqrt{x}/\pi\sqrt{2/\pi}L(t) = \sqrt{2x/\pi^3}L(t).$$

Экспоненциальные показатели как размерности

Пусть $\delta_i^{(\alpha)}(\varepsilon)$ – кластеры типа α, определенные одним из условий (а, б, в) в теореме 2. Второе свойство мультифрактального формализма для меры $L(dt)$ должно выражаться в том, что $f_L^*(\alpha)$, $\alpha \in [1/2, 3/4]$, совпадает с размерностью $D(\alpha)$ подходящего предела $Z_0^{(\alpha)}$ множеств $Z_\varepsilon^{(\alpha)} = \cup_i\{\delta_i^{(\alpha)}(\varepsilon)\}$.

Размерностная интерпретация экспонент $f(\alpha)$ в случаях, отличных от меры, требует уточнения. Случай (в) теоремы 2 связан с аномально малыми ε-кластерами размера $\delta \sim \varepsilon^\alpha$. Их число растет как $\varepsilon^{-f_{CL}(\alpha)} = \delta^{-f_{CL}(\alpha)/\alpha}$, поэтому роль размерности должна играть функция $D_{CL}(\alpha) = f_{CL}(\alpha)/\alpha$, $\alpha \in [1, 2]$.

На роль размерности $Z_0^{(\alpha)}$ во всех рассматриваемых случаях может претендовать критический индекс $D(\alpha)$, определяемый из условия

$$d\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{\delta_i \subset J} \left|\delta_i^{(\alpha)}(\varepsilon)\right|^\rho = \begin{cases} 0, & \rho > D(\alpha), \\ \infty, & \rho < D(\alpha). \end{cases}$$

В случаях (а), (в) теоремы 2 критический индекс $D(\alpha)$ совпадает с данными выше определениями размерности Z_0^α, а в случае (б) приводит к функции $D_L(\alpha) = f_L(\alpha)/(2\alpha)$, $\alpha \in [1/2, 1]$. Результат легко получить, используя утверждения 1 и 3.

Теорема 2 дает поучительный пример предела подмножеств $Z_\varepsilon^{(\alpha)}$. Процесс $N_\varepsilon^{(\alpha)}(t)$ порождает считающую меру $dN_\varepsilon^{(\alpha)}(t)$ для ε-кластеров типа α: носитель меры состоит из правых граничных точек кластеров $\delta_i^{(\alpha)}(\varepsilon)$. Сходимость конечномерных распределений процессов $\varepsilon^{f(\alpha)} N_\varepsilon^{(\alpha)}(t)$ с неубывающими траекториями влечет слабую сходимость мер [13], т.е. для финитных непрерывных функций φ

$$\int \varphi(t) dN_\varepsilon^{(\alpha)}(t) \varepsilon^{f(\alpha)} \xrightarrow{d} \int \varphi(t)\, d\mu^{(\alpha)}(t), \tag{29}$$

где предельная мера $\mu^{(\alpha)}$ пропорциональна мере $dL(t)$ либо пуассоновской мере со случайной мерой интенсивности $cdL(t)$. Это значит, что предельная мера сосредоточена на множестве Z и стохатически непрерывна. Поэтому сходимость (29) можно распространить на финитные ограниченные функции. Отсюда получаем

Следствие к теореме 2. Пусть $[\alpha_1, \alpha_2]$ – интервал спектрального параметра α, указанного в теореме 2 для разных видов сингулярностей Z. Тогда носитель $Z_0^{(\alpha)}$ предельной меры для $\varepsilon^{f(\alpha)} dN_\varepsilon^{(\alpha)}(t)$ статистически эквивалентен Z, т.е.

$$\dim Z_0^{(\alpha)} = 1/2 > D(\alpha), \qquad \alpha \in (\alpha_1 \alpha_2].$$

Для сравнения рассмотрим биноминальную каскадную меру μ_p на [0,1], т.е. распределение случайной величины $\sum_{n\geq 1} \omega_n 2^{-n}$, где ω_n – независимы, $\omega_n = 0$ или 1 с вероятностями p и $1-p$. Тогда нормированные меры $dN_n^{(\alpha)}(t)$, считающие те двоичные интервалы длины 2^{-n}, для которых $\mu_p(\Delta) \sim |\Delta|^\alpha$, сходятся к мере Лебега. В то же время указанные интервалы типа α и ранга n имеют верхний и нижний пределы при $n \to \infty$, подтверждающие мультифрактальный формализм. Поэтому соотношение (29) более важно по другой причине. Оно говорит о том, что появление ε-кластеров типа α управляется с ростом t мерой локального времени. Иначе говоря, эта мера вполне приемлема для описания тонкой структуры нулей броуновского движения. Априори это было неясно. Как уже было отмечено, своеобразие объекта Z в том, что для него верхний и нижний пределы $Z_{\varepsilon_n}^{(\alpha)}$ существенно различны даже для экспоненциально убывающей последовательности ε_n. A-свойством мультифрактального формализма обладают и нижние, и верхние пределы Z_{ε_n} лишь при сверхбыстром (на практике нереалистичном) убывании $\varepsilon_n : \varepsilon_n/\varepsilon_{n+1} \to \infty$.

4. ОБОБЩЕНИЯ

Центральную роль в изучении нулей броуновского движения играет связь Z с процессом Леви $t(L)$, обладающим однородными независимыми односторонними приращениями и плотностью скачков (см. (2)) $p(\tau) = c\tau^{-\beta-1}$, $\beta = 1/2$. Множество Z идентифицировалось с замыканием области значений $t(L)$. При такой трактовке Z результаты работы автоматически переносятся на процессы Леви с любым показателем $\beta \in (0,1)$. В частности, спектральная функция ε-кластеров $f_{CL}(\alpha) = (2-\alpha)\beta$, $\alpha \in [1,2]$, а спектральная функция меры $L(dt)$ есть $f_L^*(\alpha) = 3\beta - 2\alpha$, $\alpha \in [\beta, 3\beta/2]$. Здесь $L[0,t]$ – непрерывная модификация обратной функции к $t(L)$. Наконец, интервал $[0,\beta]$ определяет область значений всех функций размерности $D(\alpha)$.

Заметим, что процессы Леви вполне естественно появляются в рамках сейсмостатистики. Если принять пуассоновскую гипотезу о природе сейсмичности, то процесс накопления освободившейся энергии при землетрясениях является процессом Леви индекса $\beta = b/A$, где b – наклон в законе повторяемости, а A – константа связи энергии (E) с магнитудой (M) : $E \propto 10^{AM}$. При $\gamma = 0.75\ldots 1$; $A = 1.5\ldots 1.8$ индекс $\beta = 0.4\ldots 0.67$.

Если положить

$$p(\tau) = 2\pi^{-1/2}\exp(-\tau)(1-\exp(-2\tau))^{-3/2}, \qquad \tau > 0,$$

получим процесс $t(L)$, обратный к локальному времени процесса $x(t)$ Орнштейна-Уленбека [14]:

$$dx(t) + x(t)dt = dw(t), \qquad x(0) = 0, \quad t \geq 0.$$

Поэтому множество нулей $x(t)$ может быть изучено также, как и нули броуновского движения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1

Пусть $\delta_i(\varepsilon)$ – ε-кластеры, $\Delta_i(\varepsilon)$ – интервалы между ε-кластерами и $L_i(\varepsilon)$ – приращения локального времени $L(t)$ на $\delta_i(\varepsilon)$. Пусть $t(L)$ – обратная функция к $L(t)$ и (2) – ее представление через пуассоновскую меру $\pi(d\ell \times d\tau)$ с интенсивностью $p(\tau) = (2\pi\tau^3)^{-1/2}$. Отсюда следует, что скачки $t(L)$ размером больше ε (они же интервалы $\Delta_i(\varepsilon)$) устроены следующим образом: на оси L моменты скачков ℓ_i образуют пуассоновский процесс

$$\pi(\ell) = \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \pi([0,\ell) \times d\tau), \qquad \pi(0) = 0$$

с параметром интенсивности

$$\Lambda_\varepsilon = \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} p(\tau)\, d\tau = \sqrt{2/\pi}\varepsilon^{-1/2}.$$

Размеры $\Delta_i(\varepsilon)$ скачков взаимно независимы, не зависят от моментов скачков ℓ_i и от кластеров $\delta_i(\varepsilon)$, связанных с мерой π в полосе $0 < \tau \le \varepsilon$. Плотность распределения $|\Delta_i|$ имеет вид

$$f_\Delta(\tau) = p(\tau)/\Lambda_\varepsilon = 0.5\sqrt{\varepsilon}\tau^{-3/2}, \qquad \tau > \varepsilon.$$

После нормировки $|\Delta_i| = \varepsilon\xi_i^+$ приходим к (4).

Величины $\ell_i - \ell_{i-1}$ определяют приращения локального времени $L_i(\varepsilon)$ в кластерных интервалах $\delta_i(\varepsilon)$. И поскольку $\{\ell_i\}$ – точки скачков $\pi(\ell)$, $L_i(\varepsilon)$ независимы и экспоненциально распределены с параметром Λ_ε. После нормировки $L_i = \sqrt{\pi\varepsilon/2}\eta_i$ приходим к (6).

Размер кластера представляется в виде

$$|\delta_i(\varepsilon)| = \int\limits_{\ell_{i-1}}^{\ell_i} \int\limits_{0}^{\varepsilon} \tau\pi(d\ell \times d\tau) = \int\limits_{0}^{\varepsilon} \tau\pi[(\ell_{i-1}, \ell_i) \times d\tau].$$

Из свойств пуассоновости π следует независимость $(L_i, |\delta_i|)$ для разных i. Пусть $\ell_i - \ell_{i-1} = L$. Тогда условное среднее записывается как

$$E(\exp(-s|\delta_i|) \mid L) = \exp\left\{-L\int\limits_{0}^{\varepsilon}(1 - \exp(-s\tau))(2\pi\tau^3)^{-1/2}\, d\tau\right\}.$$

Учитывая, что L экспоненциально распределено, имеем

$$E\exp(-s_1 L(\varepsilon) - s\delta(\varepsilon)) = \Lambda_\varepsilon[\Lambda_\varepsilon + s_1 + \int\limits_{0}^{\varepsilon}(1 - \exp(-s\tau))(2\pi\tau^3)^{-1/2}\, d\tau]^{-1}. \quad (\text{П}1)$$

После подстановки сюда Λ_ε и нормировки: $L = \sqrt{\varepsilon\pi/2}\eta$, $\delta = \varepsilon\xi^-$ получим (5).

При $s_1 = 0$ из (П1) получаем преобразование Лапласа $\varphi(s)$ распределения ξ^-. Интегрированием по частям $\varphi(s)$ приводится к виду

$$\varphi(s) = [1 - \int\limits_{0}^{1}(1 - \exp(-s\tau))\, d\tau^{-1/2}]^{-1} = [1 + s\int\limits_{0}^{1}\exp(-s\tau)\mu(d\tau)]^{-1}, \quad (\text{П}2)$$

где μ – вероятностная мера на [0,1] с плотностью

$$\dot{\mu}(\tau) = \tau^{-1/2} - 1, \qquad \tau \in (0,1).$$

Очевидно, что $1/\varphi(s)$ продолжается на всю комплексную плоскость до целой функции. Из оценки

$$|1/\varphi - 1| = |z \int_0^1 \exp(-z\tau)\mu(d\tau)| < r \exp r, \qquad |z| < r$$

следует, что $\varphi(z)$ регулярна в окрестности $|z| \leq r$, если $r \exp r < 1$. Из неравенства Бернштейна получаем экспоненциальную оценку распределения ξ^-:

$$P(\xi^- > x) < \varphi(-r)\exp(-rx),$$

где в качестве r можно взять $r = æ > 1/2$ с условием $æ \exp æ < 1$. В частности, $æ = 0.567$. Это доказывает (7).

После замены переменных в (A2) : $s\tau = u^2$, имеем

$$\varphi(s) = [\exp(-s) + \sqrt{2s} \int_0^{\sqrt{2s}} \exp(-u^2/2)\, du]^{-1} = (\pi s)^{-1/2}(1 + o(1)), \qquad s \to \infty.$$

Поэтому согласно тауберовой теореме (см. [12]) имеем (8):

$$P\{\xi^- < x\} = \pi^{-1}\sqrt{x}(1 + o(1)), \qquad x \to 0.$$

Отсюда следует конечность моментов ξ^- для отрицательных степеней

$$E[\xi^-]^q = |q| \int_0^\infty x^{q-1} P(\xi^- > x)\, dx < \infty, \qquad q \in (-1/2, 0).$$

Из экспоненциального затухания $P(\xi^- > x)$ следует конечность указанных моментов для всех $q > 0$.

Соотношение (3) выражает то очевидное обстоятельство, что множество $\bigcup_i(\delta_i(\varepsilon) \cup \Delta_i(\varepsilon))$, $i = 1, \dots, \nu(t, \varepsilon)$, должно накрывать отрезок $(0, t)$. Первый ε-кластер начинается с точки 0. Это следует из закона 0-1 Колмогорова. Поэтому число ε-кластеров, покрывающих $Z \cap [0, t]$, не меньше 1.

Доказательство утверждения 2

Пусть

$$\eta_\rho = \xi^- \eta^\rho = \eta^\rho \int_0^1 \tau\pi((0, \eta) \times d\ell).$$

Следуя выводу преобразования Лапласа распределения (ξ^-, η), имеем

$$\varphi_\rho(\theta) = E\exp(-\theta\eta_\rho) = E(E\exp(-\theta\eta_\rho) \mid \eta) =$$
$$= E\exp\{-\eta\int_0^1(1-\exp(-\theta\eta^\rho x))[2x^{3/2}]^{-1}\,dx =$$
$$= \int_0^\infty \exp\{-\eta(1-\int_0^1(1-\exp(-\theta\eta^\rho x))\,dx^{-1/2})\}\,d\eta.$$

Положим $\theta = s^{-\rho}$ и сделаем замену $\eta = su$. Имеем

$$\varphi_\rho(\theta) = s\int_0^\infty \exp(-s\psi(u))\,du, \tag{П3}$$

где

$$\psi(u) = u + u^{1+\rho}\int_0^1 \exp(-u^\rho\tau)\mu(d\tau) =$$
$$= u(\exp(-u^\rho) + \sqrt{2u^\rho}\int_0^{\sqrt{2u^\rho}} \exp(-x^2/2)\,dx). \tag{П4}$$

В последнем равенстве сделана замена $u^\rho\tau = x^2/2$. Элементарная выкладка дает

$$\frac{d}{du}\psi(u) = \exp(-u^\rho) + \sqrt{2u^\rho}(1+\rho/2)\int_0^{\sqrt{2u^\rho}} \exp(-x^2/2)dx.$$

Отсюда следует, что при $\rho > -2$ функция $\psi(u)$ монотонно растет от 0 до ∞. Используя асимптотику

$$\int_x^\infty \exp(-u^2/2)du\exp(x^2/2) = x^{-1} - x^{-3} + o(x^{-3}),\quad x\to\infty,$$

имеем

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\pi}x^{1+\rho/2} + 1/2x^{1-\rho}\exp(-x^\rho)(1+o(1)), & x^\rho\to\infty,\\ x + x^{\rho+1} - 1/6x^{2\rho+1} + O(x^{3\rho+1}), & x^\rho \to 0. \end{cases} \tag{П5}$$

Найдем асимптотику $F_\rho(x) = P\{\eta_\rho < x\},\ x\to 0$.

Случай $\rho > -2,\ x\downarrow 0$. В силу (П3)

$$\varphi_\rho(\theta) = s\int_0^\infty \exp(-s\psi)dx(\psi),\quad \theta = s^{-\rho},$$

где $x(\psi)$ – возрастающая функция, обратная к $\psi(x)$. Согласно (П5)

$$x(\psi) = (\psi/\sqrt{\pi})^{2/(2+\rho)}(1+o(1)), \psi\to\infty, \rho>0 \text{ либо}(\psi\to 0, \rho<0).$$

Поэтому из тауберовых теорем следует

$$\varphi_\rho(\theta) = c_\rho s^{1-2/(2+\rho)}(1+o(1)) = c_\rho \theta^{-(2+\rho)^{-1}}(1+o(1)), \qquad \theta \to \infty, \tag{П6}$$

где

$$c_\rho = \Gamma(1 + 2/(2+\rho))\pi^{-1/(2+\rho)}.$$

В свою очередь, из асимптотики (П6) заключаем

$$F_\rho(x) = c_\rho / \Gamma\left((1 + 1/(2+\rho)\right) x^{1/(2+\rho)}(1+o(1)), \qquad x \downarrow 0. \tag{П7}$$

Случай $\rho < -2$, $x \downarrow 0$. Пусть $\rho_1 = -2 + (2n)^{-1}$, $\rho_2 = \rho - \rho_1 < 0$. Для любой пары неотрицательных случайных величин имеет место очевидное неравенство

$$P(\xi_1 \xi_2 < x) < P(\xi_1 < \sqrt{x}) + P(\xi_2 < \sqrt{x}), \qquad x > 0.$$

Положим $\xi_1 = \eta^{\rho_1}\xi^-$ и $\xi_2 = \eta^{\rho_2}$ и учтем, что η имеет экспоненциальное распределение. Тогда учитывая (П7), получим

$$P(\eta^\rho \xi^- < x) < F_{\rho_1}(\sqrt{x}) + \exp(-x^{-|2\rho_2|^{-1}}) = O(x^n), \quad x \to 0.$$

В силу произвольности выбора $n > 0$ имеем

$$F_\rho(x) = o(x^N), \qquad x \to 0, \quad \forall N > 0, \quad \rho < -2.$$

Найдем асимптотику $1 - F_\rho(x) = \bar{F}_\rho(x)$ при $x \to 0$.

Случай $\rho < -4$, $x \to \infty$. Найдем асимптотику

$$I(\theta) = \int_0^\infty \exp(-x\theta)\bar{F}_\rho(x)dx = \theta^{-1}(1 - \varphi_\rho(\theta)) =$$

$$= \theta^{-1} s \int_0^\infty [\exp(-sx) - \exp(-s\psi(x))]dx, \tag{П8}$$

где $\theta = s^{-\rho}$ при $\theta \to 0$, или, что то же, при $s \to 0$. Разобьем интеграл в (П8) на два $I_1 + I_2 = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^\infty$, где ε достаточно мало. Используя (П5), имеем

$$I_1 = \int_0^\varepsilon [\exp(-sx) - \exp(-s\psi(x))]dx = \int_0^\varepsilon [1 - \exp(-s\psi(x))]dx -$$

$$- \int_0^\varepsilon [1 - \exp(-sx)]dx = \int_0^\varepsilon [1 - \exp(-s' x^{-\rho'})]dx + O(s),$$

где $\rho' = -(1+\rho/2) > 1$ и $s' = \sqrt{\pi}s \to 0$.

После замены переменных $s' x^{-\rho'} = u$ имеем

$$I_1 = (s')^{1/\rho'}(\rho')^{-1} \int\limits_{s'/\varepsilon^{\rho'}}^{\infty} (1 - \exp(-u))u^{-1-1/\rho'}du + O(s) =$$
$$= \Gamma(1 - 1/\rho')(\sqrt{\pi}s)^{1/\rho'}(1 + o(1)), \qquad s \to 0.$$

Второй интеграл

$$|I_2| = \left| \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} [\exp(-sx) - \exp(-s\psi(x))]dx \right| \le s \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} |\psi(x) - x| dx.$$

Здесь

$$\psi(x) - x = \sqrt{\pi}x^{1+\rho/2}(1 + o(x^{-1})), \qquad x \to \infty,$$

где $1 + \rho/2 < -1$. Поэтому $I_2 = O(s) = o(I_1)$, $s \to 0$. Таким образом,

$$I(\theta) = \theta^{-1}s(I_1 + I_2) = c_\rho s^{-2/(2+\rho)}\theta^{-1}s(1 + o(1)) =$$
$$= c_\rho \theta^{-(3+\rho)/(2+\rho)}(1 + o(1)), \qquad \theta \to 0,$$

где $c_\rho = \Gamma((4 + \rho)/(2 + \rho))\pi^{-(2+\rho)^{-1}}$.

По тауберовой теореме

$$\bar{F}_\rho(x) = c_\rho/\Gamma((3 + \rho)/(2 + \rho))x^{(2+\rho)^{-1}}(1 + o(1)), \quad x \to \infty.$$

Случай $-2 > \rho > -4$, $x \to \infty$. Из представления (П8) следует

$$I(\theta) = (1 - \varphi_\rho(\theta))/\theta = \theta^{-1}s^2 \int\limits_0^{\infty} (\psi(x) - x)dx(1 + o(1)), \quad s \to 0.$$

Для этого достаточно проверить конечность величины

$$k = \int\limits_0^{\infty} (\psi(x) - x)dx = \int\limits_0^{\infty} x^{\rho+1}dx \int\limits_0^1 \exp(-\tau x^\rho)d\mu(\tau).$$

Меняя порядок интегрирования, получим явное выражение

$$k = -\Gamma(1 + 2\rho^{-1})\rho/(4 + \rho)/2.$$

Следовательно,

$$I(\theta) = -\Gamma(2\rho^{-1})/(4 + \rho)\theta^{-2/\rho-1}(1 + o(1)), \quad \theta \to 0,$$

а по тауберовой теореме

$$\bar{F}_\rho(x) = 0.5|\rho|/(4 + \rho)x^{2/\rho}(1 + o(1)), \quad x \to \infty.$$

Случай $\rho > -2$, $x \to \infty$. Рассмотрим условное преобразование Лапласа

$$E\{exp(-\theta\eta_\rho)|\eta\} = \exp\left(\eta\int_0^1 (1-\exp(-\theta\eta^\rho x))dx^{-1/2}\right).$$

Отсюда кумулянты η_ρ при фиксированном η определяются соотношениями

$$æ_r = -\eta\int_0^1 (\eta^\rho x)^r dx^{-1/2} = \eta^{r\rho+1}/(2r-1), \quad r = 1, 2, \ldots .$$

Но тогда условные моменты

$$E\{\eta_\rho^n|\eta\} = \sum_{i_1+\ldots+i_n=n} c_{i_1\ldots i_n} æ_{i_1}\ldots æ_{i_n} = \sum_{i=1}^n \eta^{n\rho+i}c_i, \qquad c_i > 0.$$

Значит безусловные моменты $E\eta_\rho^n = m_n(\rho) < \infty$, если только конечны моменты $E\eta^{n\rho+1}$ и $E\eta^{n(\rho+1)}$. Величина η имеет экспоненциальное распределение. Поэтому справедлива эквивалентность

$$m_n(\rho) < \infty \leftrightarrow n\rho + 2 > 0.$$

При $\rho > 0$ существуют все моменты, в остальных случаях

$$m_n(\rho) < \infty, \;\; m_{n+1}(\rho) = \infty \leftrightarrow \rho \in I_n = (-2/n, -2/(n+1)), \tag{П9}$$

т.е. при $\rho \in I_n$ ровно n моментов $m_i(\rho) < \infty$.

Согласно (П9) при $\rho \in I_n$ функция $\varphi_\rho(\theta)$ дифференцируема n раз. В силу соотношения

$$s^{2-2/(n+1)} < s^{-n\rho} = \theta^n < s^2, \qquad \rho \in I_n, \;\; |s| < 1$$

разложение $\varphi_\rho(\theta)$ вблизи нуля имеет вид

$$\varphi_\rho(\theta) = \sum_{k=0}^n \frac{(-\theta)^k}{k!} m_k(\rho) + c_n s^2(1+o(1)), \qquad \theta = s^{-\rho}. \tag{П10}$$

В самом деле. Пусть $\rho \in I_n$. Согласно (П3), (П4)

$$\varphi_\rho(\theta) = \int_0^\infty s\exp(-sx)\exp(-sx^{1+\rho}\psi_1(x^\rho))dx = 1 + \sum_{k=1}^n A_k + R_n, \tag{П11}$$

где

$$\psi_1(u) = \int_0^1 \exp(-u\tau)d\mu(\tau) \le 1$$

и

$$A_k = \int_0^\infty s\exp(-sx)\frac{(-sx^{1+\rho})^k}{k!}\psi_1^k(x^\rho)dx, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Остаточный член R_n допускает очевидную оценку

$$R_n < \int_0^\infty s\exp(-sx)\frac{\left(sx^{1+\rho}\psi_1(x^\rho)\right)^{n+1}}{(n+1)!}dx < \int_0^\infty s\exp(-sx)\frac{(sx^{1+\rho})^{n+1}}{(n+1)!} =$$
$$= cs^{\rho(n+1)} = o(s^2), \qquad (\Pi 12)$$

где

$$c = \Gamma((1+\rho)(n+1)+1)/\Gamma(n+2), \qquad n \geq 1.$$

Для оценки A_k заметим, что

$$\psi_1^k(u) = \int_0^k \exp(-u\tau)d\mu^{(k)}(\tau) = \sum_{p=0}^N \frac{(-u)^p}{p!}\mu_p^{(k)} + \theta_N\frac{k^{N+1}}{(N+1)!}u^{N+1}, \qquad (\Pi 13)$$

где $|\theta_N| < 1$ и $\mu^{(k)}$ – свертка k-го порядка меры μ; $\mu_p^{(k)}$ – моменты меры $\mu^{(k)}$.

Имеем

$$A_k = \int_0^\infty s\exp(-sx)\frac{(-sx^{1+\rho})^k}{k!}\left[\psi_1(x^\rho) - \sum_{p=0}^{n-k}\mu_p^{(k)}(-x^\rho)^p/p!\right]dx +$$
$$+\sum_{p=0}^{n-k}\int_0^\infty s\exp(-sx)\frac{(-sx^{1+\rho})^k}{k!}\frac{(-x^\rho)^p}{p!}\mu_p^{(k)}dx.$$

Первое слагаемое A_{k1} в A_k имет порядок s^2 при $k=1$ и $o(s^2)$ при $k>1$. Действительно, в силу (П13) величина A_{k1}, $k>1$, допускает оценку

$$A_{k1} \leq c\int_0^\infty s\exp(-sx)(sx^{1+\rho})^k x^{\rho(n-k+1)} =$$
$$= c\Gamma(\rho(n+1)+k+1)s^{\rho(n+1)} = o(s^2), \qquad (\Pi 14)$$

а при $k=1$

$$A_{k1} = -s^2\int_0^\infty \exp(-sx)x^{1+\rho}\left(\psi_1(x^\rho) - \sum_{p=0}^{n-1}\mu_p^{(k)}\frac{(-x^\rho)^p}{p!}\right)dx.$$

Подынтегральная функция при $s=0$ имеет порядок

$$O(x^{1+\rho(n+1)}) \qquad \text{при} \quad x\to\infty,$$

$$O(x^{1+\rho n}) \qquad \text{при} \quad x\to 0.$$

Для $\rho\in I_n$ обе особенности интегрируемы. Значит

$$A_{k1} = -s^2\int_0^\infty x^{1+\rho}\left(\psi_1(x^\rho) - \sum_{p=0}^{n-1}\mu_p^{(k)}\frac{(-x^\rho)^p}{p!}\right)dx(1+o(1)), \quad s\to 0. \qquad (\Pi 15)$$

Другие составляющие A_k вычисляются явно через Г-функцию. Поэтому

$$A_k = A_{k1} + \sum_{p=0}^{n-k} \frac{(-\theta)^{k+p}}{k!p!} \mu_p^{(k)} \Gamma(k+1+\rho(k+p)). \tag{П16}$$

Подставляя (П12), (П14)–(П16) в (П11), получим (П10). Пусть

$$\bar{F}_n(x) = \int_x^\infty \frac{(t-x)^n}{n!} dF_\rho(t).$$

Поскольку

$$\varphi_\rho(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-\theta)^k}{k!} m_k(\rho) + \frac{(-\theta)^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^\infty \exp(-\theta x) \bar{F}_n(x) dx,$$

то соотношение (П10) показывает, что

$$\int_0^\infty \exp(-\theta x) \bar{F}_n(x) dx = c_n \theta^{-2/\rho - n - 1}(1 + o(1)), \qquad \theta \to 0,$$

где $n < -2/\rho < n+1$. По тауберовой теореме заключаем, что

$$\bar{F}_n(x) = \tilde{c}_n x^{2/\rho + n}(1 + o(1)), \qquad x \to \infty.$$

Пользуясь правилом Лопиталя, отсюда находим

$$\tilde{c}_n = \lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}_n(x)}{x^{2/\rho+n}} = \lim_{x\to\infty} \frac{D^{(n)}\bar{F}_n(x)}{D^{(n)}x^{2/\rho+n}} = \frac{(-1)^n}{(2/\rho+n)\dots(2/\rho+1)} \lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}_\rho(x)}{x^{2/\rho}},$$

где $D^{(n)} = (d/dx)^n$. Следовательно, $1 - F_\rho(x) = \hat{c}_n x^{2/\rho}(1+o(1))$, что и требовалось.

Доказательство утверждения 3

Фиксируем $t = t_0$ и положим $\nu_\varepsilon = \nu(t_0/\varepsilon)$ и $\nu_\varepsilon^* = \nu^*(t/\varepsilon)$. Имеем

$$p_n = P\{\nu_\varepsilon^* - \nu_\varepsilon \ge n\} = P\left\{\sum_{i=1}^{n} \xi_{\nu_\varepsilon+i}^+ < \sum_{i=1}^{\nu_\varepsilon} \xi_i^-\right\}.$$

Момент ν_ε является марковским, т.е. событие $\{\nu_\varepsilon = m\}$ измеримо относительно $\{\xi_i^\pm, i = 1, \dots, m\}$. Поэтому

$$p_n = P\left\{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^+ < \sum_{i=1}^{\nu_\varepsilon} \xi_i^-\right\},$$

где $\{\xi_i^+\}$ не зависят от ν_ε и $\{\xi_i^-\}$.

Рассмотрим событие

$$B_\rho = \left\{ \omega : \sum_{i=1}^{\nu_\varepsilon} \xi_i^- < \varepsilon^{-1/2-\rho} \right\}.$$

Тогда

$$P(\bar{B}_\rho) = o(1), \ \ \rho > 0; \qquad P(B_\rho) = o(1), \ \ \rho < 0. \tag{П17}$$

В самом деле,

$$P(\bar{B}_\rho) < P\left(\sum_{i=1}^{\nu_\varepsilon} \xi_i^- > \varepsilon^{-1/2-\rho}, \ \nu_\varepsilon > \varepsilon^{-\theta} \right) + P(\nu_\varepsilon < \varepsilon^{-\theta}) <$$

$$< P\left(\frac{1}{n_\varepsilon} \sum_{1 \le i \le n_\varepsilon} \xi_i^- > \varepsilon^{-1/2-\rho+\theta} \right) + P(\nu_\varepsilon < n_\varepsilon), \qquad n_\varepsilon = \varepsilon^{-\theta}.$$

В силу закона больших чисел

$$n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^- \xrightarrow{d} E\xi^- = 1, \quad n \to \infty;$$

согласно П. Леви (см. [1])

$$d\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} \sqrt{\pi\varepsilon/2}\,\nu(t/\varepsilon) = L(t). \tag{П18}$$

Поэтому при $1/2 < \theta < 1/2 + \rho$ вероятность $P(\bar{B}_\rho) = o(1)$, $\rho > 0$. Аналогично показывается, что $P(B_\rho) = o(1)$, $\rho < 0$. Оценим p_n сверху. Пусть $\rho > 0$, имеем

$$p_{n_\varepsilon} \le P\left(\sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \xi_i^+ < \sum_{i=1}^{\nu_\varepsilon} \xi_i^-, \ B_\rho \right) + P(\bar{B}_\rho) \le$$

$$\le P\left(\frac{1}{n_\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \xi_i^+ < \varepsilon^{-1/2-\rho+2\theta} \right) + P(\bar{B}_\rho), \quad n_\varepsilon = \varepsilon^{-\theta}.$$

Случайные величины $\xi_i^+ \in G_{1/2}$, т.е.

$$\bar{S}_n(\xi^+) := n^{-2} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^+ \to g_{1/2}(c).$$

Поэтому, учитывая (П17), последняя оценка p_n есть $o(1)$ при $\varepsilon \to 0$, если $2\theta - 1/2 - \rho > 0$ и $\rho > 0$. Значит

$$P(\nu_\varepsilon^* - \nu_\varepsilon > \varepsilon^{-\theta}) = o(1).$$

Оценим p_n снизу. Пусть $\rho < 0$, имеем

$$p_{n_\varepsilon} \ge P\left(\sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \xi_i^+ < \sum_{i=1}^{\nu_\varepsilon} \xi_i^-, \ \bar{B}_\rho \right) \ge P(\bar{S}_n(\xi^+) < \varepsilon^{-1/2-\rho+2\theta}, \ \bar{B}_\rho) =$$

$$= P(\bar{S}_n(\xi^+) < \varepsilon^{-1/2-\rho+2\theta}) P(\bar{B}_\rho).$$

Пусть $\rho < 0$ и $1/2 + \rho - 2\theta > 0$. Тогда соотношения (П17) и $\xi^+ \in G_{1/2}$ дают

$$P(\nu_\varepsilon^* - \nu_\varepsilon < \varepsilon^{-\theta}) = 1 - p_{n_\varepsilon} = o(1), \quad \varepsilon \to 0, \ \theta < 1/4.$$

Предельное распределение $\nu^*(t/\varepsilon)\sqrt{\varepsilon}$ следует из (П18) и установленной близости $\nu^*(t/\varepsilon)$ и $\nu(t/\varepsilon)$.

Доказательство утверждения 4

Докажем сначала, что предел (10) имеет место, если заменить $\nu(t/\varepsilon)$ на $\nu^*(t/\varepsilon)$. Фиксируем моменты времени: $0 < t_1 \ldots < t_N$. Пусть

$$\xi_\varepsilon^*(t) = \varepsilon^{1/2\alpha} \sum_{i=1}^{\nu^*(t/\varepsilon)} \zeta_i [\sqrt{\varepsilon}\nu^*(t/\varepsilon)]^\beta, \tag{П19}$$

и, кроме того,

$$\Delta\nu_k^* = \nu^*(t_k/\varepsilon) - \nu^*(t_{k-1}/\varepsilon), \quad t_{-1} = 0,$$
$$\varphi(\theta) = E\exp(-\theta\zeta).$$

Пользуясь независимостью $\nu^*(t)$ и $\{\zeta_i\}$, найдем преобразование Лапласа для распределения вектора $\{\xi_\varepsilon^*(t_i), \ i = 1, \ldots, N\}$:

$$\Phi_\varepsilon := E\exp\left(-\sum_{i=1}^N \theta_i \xi_\varepsilon^*(t_i)\right) = E\exp\left(-\sum_{k=1}^N \psi_{\varepsilon,k} \cdot (\sqrt{\varepsilon}\Delta\nu_k^*)\right),$$

где

$$\psi_{\varepsilon,k} = -\ln\left[\varphi\left(\sum_{i=k}^N \theta_i (\sqrt{\varepsilon}\nu^*(t_i/\varepsilon))^\beta n_\varepsilon^{-1/\alpha}\right)\right]^{n_\varepsilon}, \qquad n_\varepsilon = \varepsilon^{-1/2}.$$

В силу (9) величины ζ_i принадлежат области притяжения G_α. Поэтому

$$n^{-1/\alpha}\sum_{i=1}^n \zeta_i \xrightarrow{d} g_\alpha(c), \qquad n \to \infty. \tag{П20}$$

Соответственно преобразования Лапласа этих распределений сходятся равномерно на любом конечном интервале $0 < \lambda < \Lambda$:

$$[\varphi(\lambda n^{-1/\alpha})]^n \to \exp(-\lambda^\alpha c), \qquad n \to \infty.$$

Согласно утверждению 3

$$\sum_{i=k}^N \theta_i (\sqrt{\varepsilon}\nu^*(t_i/\varepsilon))^\beta \xrightarrow{d} \sum_{i=k}^N \theta_i [\sqrt{2/\pi}L(t_i)]^\beta,$$

$$\sqrt{\varepsilon}\Delta\nu_k^* \xrightarrow{d} \sqrt{2/\pi}(L(t_k) - L(t_{k-1})).$$

Следовательно,

$$\psi_{\varepsilon,k} \xrightarrow{d} c\left(\sum_{i=k}^{N}\theta_i[\sqrt{2/\pi}L(t_i)]^\beta\right)^\alpha$$

и

$$\psi_\varepsilon := \sum_{k=1}^{N}\psi_{\varepsilon,k}(\sqrt{\varepsilon}\Delta\nu_k^*) \xrightarrow{d} c\sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{i=k}^{N}\theta_i(\sqrt{2/\pi}L(t_i))^\beta\right]^\alpha \sqrt{2/\pi}[L(t_k)-(L(t_{k-1})] := \psi_0.$$

Учитывая ограниченность

$$\exp(-\psi_\varepsilon) \le 1,$$

имеет место также сходимость средних

$$\Phi_\varepsilon = E\exp(-\psi_\varepsilon) \to E\exp(-\psi) = \Phi.$$

Полученный предел есть преобразование Лапласа для распределения вектора случайных величин

$$(\sqrt{2/\pi}L(t_i))^\beta g_\alpha(c\sqrt{2/\pi}L(t_k)), \quad k=1,\ldots,N,$$

где $g_\alpha(u)$ – процесс Леви с показателем α, независимый от $L(t)$.

Вернемся к исходному допредельному процессу (10). Он получается из (П19), если опустить символ $*$. Имеем

$$\xi_\varepsilon(t) = \xi_\varepsilon^*(t)[\nu_\varepsilon/\nu_\varepsilon^*]^\beta - \Omega_\varepsilon,$$

где

$$\Omega_\varepsilon = \varepsilon^{1/(2\alpha)}\sum_{i=1}^{\nu_\varepsilon^*-\nu_\varepsilon}\zeta_{\nu_\varepsilon+i}[\sqrt{\varepsilon}\nu_\varepsilon]^\beta \quad \text{и} \quad \nu_\varepsilon^* = \nu^*(t/\varepsilon), \quad \nu_\varepsilon = \nu(t/\varepsilon).$$

Очевидно

$$\nu_\varepsilon^*/\nu_\varepsilon = (\nu_\varepsilon^*-\nu_\varepsilon)\sqrt{\varepsilon}/(\nu_\varepsilon\sqrt{\varepsilon}) + 1 \xrightarrow{d} 1,$$

поскольку $(\nu_\varepsilon^*-\nu_\varepsilon)\sqrt{\varepsilon} \xrightarrow{d} 0$ и $\nu_\varepsilon\sqrt{\varepsilon} \xrightarrow{d} \sqrt{2/\pi}L(t)$. По той же причине

$$\Omega_\varepsilon = \Omega'_\varepsilon[(\nu_\varepsilon^*-\nu_\varepsilon)\sqrt{\varepsilon}]^{1/\alpha}[\sqrt{\varepsilon}\nu_\varepsilon]^\beta \xrightarrow{d} 0.$$

Здесь

$$\Omega'_\varepsilon = (\nu_\varepsilon^*-\nu_\varepsilon)^{-1/\alpha}\sum_{i=1}^{\nu_\varepsilon^*-\nu_\varepsilon}\zeta_{\nu_\varepsilon+i}.$$

Из марковости момента ν_ε следует, что

$$\Omega'_\varepsilon \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{æ}\zeta_i æ^{-1/2}, \qquad æ = \nu_\varepsilon^*-\nu_\varepsilon,$$

где ζ уже не зависит от $\nu_\varepsilon^*-\nu_\varepsilon$. По доказанному выше

$$\Omega'_\varepsilon \xrightarrow{d} g_\alpha(c), \qquad \varepsilon \to 0,$$

так как $\nu^*_\varepsilon - \nu_\varepsilon \to \infty$, $\varepsilon \to 0$. Следовательно,

$$d\text{-}\lim \xi_\varepsilon(t) = d\text{-}\lim \xi^*_\varepsilon(t).$$

Случай $E\zeta = m < \infty$ рассматривается аналогично, с той лишь разницей, что соотношение (П20) заменяется законом больших чисел:

$$n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \zeta_i \xrightarrow{d} m,$$

а величины $\alpha = 1$, $c = m$, $g_\alpha(u) \equiv u$. Это дает искомое соотношение (11).

Благодарности. Автор признателен Я.Г. Синаю и У. Фришу за стимулирующие дискуссии. Настоящая работа была поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (код проекта 93-011-16090) и Программой "Человек и Биосфера" Гос. Департамента США (грант 1753-300201).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mandelbrot B.* The fractal geometry of nature. San Francisco: Freeman and Co, 1982. 460 p.
2. *Садовский М.А., Болховитинов Л.Г., Писаренко В.Ф.* Деформирование геофизической среды и сейсмический процесс. М.: Наука, 1988. 99 с.
3. *Turcotte D.L.* Fractals and chaos in geology and geophysics. Cambridge Univ. Press, 1992. 221 p.
4. *Frish U., Parisi G.* On the singularity structure of fully developed turbulence // Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics / Ed. M. Ghil. North-Holland. N.-Y.: 1985. P.84–88.
5. *Mandelbrot B.B.* Multifractal measures, especially for the geophysicist // PAGEOPH. 1989. Vol.131, N 1/2. P.5–42.
6. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир. 1991. 293 с.
7. *Brown G., Michon G., Peyriére J.* On the multifractal analysis of measures // J. Stat. Phys. 1992. Vol.66, N 3/4. P.775–790.
8. *Holley R., Waymire E.C.* Multifractal dimension and scaling exponents for strongly bounded random cascased // Ann. of Appl. Probab. 1992. Vol.2, N 4. P.819–845.
9. *Halsey T., Jensen M., Kadanoff L., Procaccia I., Shraiman B.* Fractal measures and their singulazities: the characterization of strange sets // Phys. Rev. A. 1986. Vol.33, N 2. P.1141–1151.
10. *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории. М.: Мир, 1988. 394 с.
11. *Блантер Е.М., Шнирман М.Г.* О мультифрактальном подходе к вопросу кластеризации эпицентров // Проблемы прогноза землетрясений и интерпретация сейсмологических данных. М.: Наука, 1992. С.46–63. (Вычисл. сейсмология; Вып.25).
12. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2. М.: Мир, 1967. 752 с.
13. *Боровков А.А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986. 432 с.
14. *Hawkes J., Truman A.* Statistics of local time and exursions for the Ornstein-Uhlenbeck process // London Math. Soc. Lecture Note, Ser.167. Stochastic Analysis 1991 / Ed. M. Barlow, N. Bingham. 1991. P.91–103.