

УДК 550.348

## ДЕЛОКАЛИЗАЦИЯ, ФОРШОКИ И АФТЕРШОКИ В МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ БАРРИДЖА-КНОПОВА

В.М. Герцик

*Международный институт теории прогноза землетрясений  
и математической геофизики Российской академии наук*

Построена модифицированная безмассовая модель Барриджа-Кнопова, в которой сила, действующая на блок, не может превосходить предела прочности сцепления. В численном эксперименте исследовано явление делокализации для одномерного случая, представляющее собой аномальный всплеск частоты появления "землетрясений", в которых участвуют почти все блоки. Для данной модели это явление представляет собой артефакт, обусловленный недостаточным размером цепочки блоков. В трехмерно-слоистом варианте модели наблюдаются форшоки и афтершоки сильных толчков, качественно подобные реально наблюдаемым.

## DELOCALIZATION, FORESHOCKS AND AFTERSHOCKS IN A MODIFIED BURRIDGE-KNOPOFF MODEL

V.M. Gertzik

*International Institute of Earthquake Prediction  
Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences*

The Burridge-Knopoff model is modified: blocks have no mass, and forces cannot be higher than the stick strength. The delocalization phenomenon is analyzed in numerical test for the one-dimensional case. This phenomenon, an anomalous increase of shock frequency, where almost all blocks are involved in these shocks, proved to be an artifact associated with model size not sufficiently large. Foreshocks and aftershocks similar to real are observed in layered three-dimensional case.

### ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие интенсивно исследуются модели клеточных автоматов, имитирующие сейсмическую активность [1-8] и представляющие собой различные модификации модели, предложенной Барриджем и Кноповым [9] в 1967 году. Эта модель представляет собой набор блоков с центрами в точках целочисленной решетки, расположенных на отрезке или прямоугольной области горизонтальной поверхности (которую мы в дальнейшем будем называть полом). Каждый блок соединен пружинами с ближайшими соседями и с потолком, т.е. с верхней гори-

горизонтальной поверхностью. Пол движется с постоянной скоростью вдоль одной из горизонтальных осей координат, а каждый блок едет вместе с полом до тех пор, пока сила, действующая на него со стороны пружин, не достигает предела прочности его сцепления с полом. В этот момент блок срывается и движется под действием упругих сил, меняя натяжение связанных с ним пружин, что может привести к срыву соседнего блока и т.д. Землетрясением считается событие от срыва первого блока до полной остановки движения блоков относительно пола. Разность упругих энергий системы в момент начала и конца срыва можно считать энергией, выделившейся при землетрясении.

Исследуемые обычно модификации этой модели делятся на два типа, различающиеся степенью ее упрощения. В первом из них, введенном в работе Карлсон и Лангера (см. [2]), физические свойства модели формализуются достаточно строго; в частности, учитываются инерционные силы и трение скольжения. Это приводит к необходимости решать большие системы дифференциальных уравнений на очень больших временных интервалах, что делает проблематичным сколько-нибудь серьезный контроль точности решений. В режиме динамического хаоса, который и используется для получения результатов, сочетание ошибок счета с экспоненциальным разбеганием траекторий может вызывать непредсказуемые последствия.

Второй тип моделей восходит к работе Бака и Танга (см. [3]) и получает наиболее близкий к модели Барриджа-Кнопова вид в работе [4]. В нем не учитываются массы блоков, трение скольжения, а также то обстоятельство, что сила, действующая на блок, не может превосходить прочности сцепления. (Пока отдельный блок движется, сила на соседнем блоке может расти выше предела прочности, но этот блок начинает движение лишь после остановки первого блока.) Эти упрощения позволяют избежать решения дифференциальных уравнений и сильно ускоряют вычислительный процесс.

Тот факт, что качественное поведение больших систем в статистической физике определяется коллективными эффектами и слабо зависит от детальных свойств отдельного элемента, позволяет предполагать, что оба типа моделей способны имитировать некоторые существенные свойства относительного движения плит вдоль разлома. В пользу такого предположения говорит то, что все двумерные варианты моделей дают в численном эксперименте распределение сейсмических событий, подобное графику повторяемости Гутенберга-Рихтера, описывающему реальную сейсмичность.

В настоящей работе вводится модель второго типа, в которой, однако, движение блока начинается, как только действующая на него сила достигает прочности сцепления. Модель имеет свойства, обнаруживаемые по отдельности в моделях обоих типов. В частности, в одномерном случае при некоторых условиях наблюдается повышенная вероятность так называемых характеристических землетрясений, в которых сдвиг захватывает практически все блоки. Это явление было обнаружено в модели Карлсон и Лангера, но не отмечается в работах, касающихся моделей второго типа. Простота нашей модели позволила подробнее изучить такой феномен и показать, что, по крайней мере для этой модификации, он является своеобразным артефактом, появляющимся при недостаточно больших размерах модели.

Линейность графика повторяемости не может, к сожалению, служить достаточным основанием для того, чтобы считать модель адекватным описанием сейсми-

ческого процесса. Дело в том, что произвольный точечный процесс, ничуть не похожий на пространственно-временную последовательность событий реального каталога, можно снабдить любым требуемым распределением магнитуд. Поэтому реалистическая модель должна воспроизводить и более тонкие особенности сейсмичности, в частности, группирование землетрясений в пространственно-временные кластеры, наблюдаемое как форшоки и афтершоки сильных землетрясений. Модельные каталоги, получаемые на базе упомянутых выше моделей, не обнаруживают такой кластеризации толчков. (Афтершоки в работе [5] внесены с помощью искусственного приема и не обусловлены физикой исходной модели.)

Получить подобный тип кластеризации позволяет модификация исходной модели, характеризующая наличием третьего измерения, введенного следующим образом. На потолок исходной двумерной модели ставится ее копия, для которой этот потолок является полом. Операция может быть повторена произвольное число раз и соответствует представлению о том, что сейсмогенная зона не является плоским разломом, а имеет поперечную толщину. В работе показано, что уже "двухэтажная" модель демонстрирует наличие форшоков и афтершоков.

### ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Поскольку в моделях второго типа массы блоков и трение скольжения не учитываются, приходится вводить искусственную динамику. На неформальном уровне процесс генерации толчков в предлагаемой модели описывается следующим образом. При движении пола растет напряжение на вертикальных пружинах, соединяющих блоки с потолком. Когда сила на одном из блоков достигает предела прочности его сцепления с полом, блок начинает движение и останавливается в положении, в котором сила обращается в ноль. При движении блока меняется натяжение горизонтальных пружин, связывающих его с ближайшими соседями. Если сила на соседнем блоке достигает предела, этот блок тоже начинает двигаться и т.д. Предполагается, что такие лавинные процессы происходят мгновенно, и вводится правило, описывающее перемещение движущихся блоков друг относительно друга и состоящее в том, что расстояния между движущимися блоками остаются неизменными. Иначе говоря, в быстром времени все движущиеся блоки имеют одну и ту же постоянную скорость.

Формальное описание приведем лишь для трехмерно-слоистой модели (рис. 1), так как модели низших размерностей являются ее частными случаями. Пусть в начальный момент времени точки прикрепления вертикальных пружин к соответствующим потолкам расположены на целочисленной решетке, т.е. определяются наборами координат  $i, j, k$  в неподвижной лагранжевой системе отсчета, где  $i = 1, \dots, N_1$ ,  $j = 1, \dots, N_2$  – координаты в горизонтальной плоскости,  $k = 1, \dots, N_3$  – номер слоя, считая сверху. Предполагается, что основание модели и каждый блок могут смещаться лишь в одном горизонтальном направлении. С каждой пластиной свяжем движущуюся вместе с ней систему координат и обозначим через  $Y(k)$  ( $k = 1, \dots, N_3$ ) смещения соответствующих начал координат относительно неподвижной системы, связанной с верхней пластиной. Положим  $Y(0) = 0$  и заметим, что  $Y(N_3)$  равно смещению модели  $Y$ .

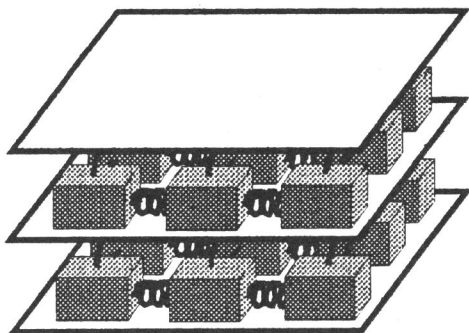


Рис. 1. Схема трехмерно-слоистой модели

Через  $x(i, j, k)$  обозначим смещение блока с координатами  $i, j, k$  относительно своего потолка, а через  $y(i, j, k)$  — его смещение относительно начального положения в системе координат, жестко связанной с соответствующим полом. Очевидно, что

$$x(i, j, k) = Y(k) - Y(k - 1) + y(i, j, k). \quad (1)$$

Сила  $f(i, j, k)$ , действующая на отдельный блок, имеет вид

$$f(i, j, k) = q x(i, j, k) + \sum_{i'=i \mp 1} \sum_{j'=j \mp 1} [x(i, j, k) - x(i', j', k)],$$

где  $q$  — коэффициент жесткости вертикальных пружин (для горизонтальных пружин этот коэффициент считаем равным 1). Из выражения (1) видно, что в отличие от координат  $y$ , координаты  $x$  не являются локальными, а зависят от взаимного положения пластин, которое, вообще говоря, определяется историей деформирования. Для перехода к локальным координатам заметим, что, поскольку инерционные силы в модели отсутствуют, должно выполняться условие квазистатического равновесия

$$F(k) = q \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} x(i, j, k) = F, \quad (2)$$

где  $F$  не зависит от  $k$ . (Вкладом горизонтальных граничных условий мы пренебрегаем, поскольку он пропорционален  $2(N_1 + N_2)$ , а основной член имеет порядок  $N_1 \times N_2$ .)

Подставляя (1) в (2), находим, что

$$Y(k) - Y(k - 1) = [F/q - \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} y(i, j, k)] / (N_1 N_2), \quad (3)$$

откуда, складывая эти равенства от  $k = 1$  до  $N_3$ , получаем

$$N_3 F/q = \sum_{k=1}^{N_3} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} [y(i, j, k) + Y/N_3].$$

Введя замену переменных  $z(i, j, k) = y(i, j, k) + y/N_3$ , из (3) и (1) находим, что

$$x(i, j, k) = z(i, j, k) + (N_1 N_2 N_3)^{-1} \sum_{k'=1}^{N_3} \sum_{i'=1}^{N_1} \sum_{j'=1}^{N_2} z(i', j', k') - \\ - (N_1 N_2)^{-1} \sum_{i'=1}^{N_1} \sum_{j'=1}^{N_2} z(i', j', k).$$

Выражение для  $f(i, j, k)$  в локальных координатах  $z$  имеет вид

$$f(i, j, k) = q[z(i, j, k) + (N_1 N_2 N_3)^{-1} \sum_{k'=1}^{N_3} \sum_{i'=1}^{N_1} \sum_{j'=1}^{N_2} z(i', j', k') - \\ - (N_1 N_2)^{-1} \sum_{i'=1}^{N_1} \sum_{j'=1}^{N_2} z(i', j', k)] + \sum_{i'=i \mp 1} \sum_{j'=j \mp 1} [z(i, j, k) - z(i', j', k)]. \quad (4)$$

(Поскольку вывод формулы (4) не вполне строг, его можно считать неформальным объяснением, а формулу (4) – постулируемой.) При  $N_3 = 1$  второе и третье слагаемые в первых квадратных скобках правой части (4) дают в сумме 0 и результирующая формула описывает обычную двумерную модель (или одномерную при  $N_2 = 1$ ). Третье слагаемое представляет собой положительное взаимодействие среднего поля в пределах слоя, так как при срывах происходит уменьшение некоторых  $z$ , что приводит к возрастанию силы. Второе слагаемое задает отрицательное взаимодействие среднего поля между различными слоями. Физический смысл этих взаимодействий заключается в качественном описании того факта, что появление трещины создает дальнедействующее повышение напряжений в ее плоскости и дальнедействующее падение напряжений в перпендикулярном направлении. Кроме того, такие взаимодействия должны приводить к кластеризации толчков внутри слоя, так как сильные события понижают напряжение в соседнем слое (т.е. увеличивают временной интервал до следующего срыва) и увеличивают в своем, что эквивалентно соответственно растяжению и сжатию временного масштаба в этих слоях. Предварительная гипотеза состояла в том, что такой механизм может обеспечить характерные для реальной сейсмичности черты форшоковой и афтершоковой активности в модельных каталогах. Как будет показано ниже, гипотеза оказалась справедливой.

Переменные  $z(i, j, k)$  ведут себя достаточно просто: линейно растут вместе в  $Y$  между актами срывов и уменьшаются на величину сдвига блока  $(i, j, k)$  относительно пола, когда блок срывается.

Алгоритм работы модели задается следующим образом.

1. Смещения  $z(i, j, k)$  таковы, что все  $f(i, j, k) < 1$ . Переход к п.2.
2. Смещения  $z(i, j, k)$  растут со скоростью 1, пока сила  $f(i, j, k)$  на одном из кирпичей  $x$  не достигнет прочности сцепления, равной 1, после чего вводится множество, состоящее из одного элемента  $A_s = \{(i, j, k)\}$ . Переход к п.3.
3. Срыв выражается в одинаковом уменьшении всех  $z$  для блоков из  $A_s$  до тех пор, пока  $f$  не обратится в 0 для некоторой точки  $(i', j', k') \in A_s$  или не достигнет 1 для некоторого  $(i', j', k') \notin A_s$ . Переход к п.4.
4. Если  $(i', j', k') \notin A_s$ , то  $A'_s = A_s \setminus \{(i', j', k')\}$ , и  $A'_s = \{(i', j', k')\} \cup A_s$  при  $(i', j', k') \in A_s$ . Новое  $A_s = A'_s$ . Если  $A_s$  пусто, – переход к п.1, в противном случае – переход к п.3.

Подробное описание свойств одномерной и двумерной моделей не входит в задачу настоящей работы. Упомянем лишь некоторые из них. Для случая трех блоков с периодическими граничными условиями модель эквивалентна динамической системе с дискретным временем и фазовым пространством, представляющим собой двумерную ограниченную область, на которой действует кусочно-линейное преобразование. В системе есть периодические решения со всеми целыми периодами, кроме периода 4. Обнаружены КАМ-траектории и область фазового пространства, в которой наблюдается динамический хаос классического типа. При  $q < 1$  структура фазового пространства усложняется из-за того, что становятся возможными неоднократные срывы одного и того же блока в течение единичного сдвига группы трех блоков.

В одномерной цепочке блоков плотность распределения размера  $r$  срывающихся кластеров  $p(r)$  экспоненциально убывает, т.е.  $p(r) \cong R^{-1}$  (график повторяемости линеен в полулогарифмическом масштабе). Кластеры, таким образом, имеют характеристический размер  $R$ , растущий с убыванием параметра  $q$  приблизительно как  $R \cong 1 + (e/q)^{1/2}$  (на рис. 2 изображена близкая к обсуждаемой логарифмическая зависимость от  $q$  среднего числа  $\langle n \rangle$  срывов, включая повторные, для блоков, участвующих в единичном событии), что аналогично отсутствию "дальнего порядка" или фазового перехода в одномерных моделях статистической физики. Плотности распределения сейсмического момента и энергии обладают подобными свойствами.

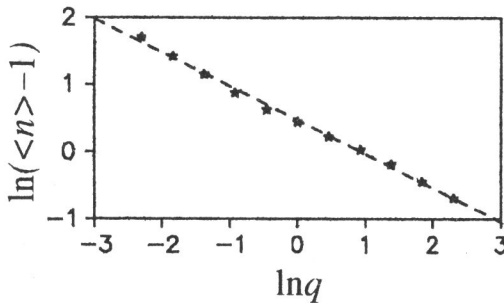


Рис. 2. Логарифмическая зависимость среднего числа  $\langle n \rangle$  срывов блоков в "землетрясении" от параметра  $q$  для одномерной модели

В двумерном случае, как и в модели работы [7], при уменьшении  $q$  наблюдается фазовый переход от экспоненциального к степенному закону для всех указанных функций распределения, что также соответствует общим представлениям статистической физики о появлении дальнего порядка в моделях размерности больше 1.

## О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯХ

В одномерной модели Карлсон и Лангера (см. [2]) плотность распределения сейсмического момента (т.е. суммы смещений всех блоков, участвующих в отдельном сдвиге) имеет в логарифмических координатах начальный квазилинейно убывающий участок, затем более короткий участок квазилинейного роста и резкий завал вниз. Всплеск активности в области больших толчков ("характеристических

землетрясений”) был назван в работе [2] явлением делокализации и качественно объяснен тем, что достаточно большие инерционные массы, разгоняясь, способны ”пробить участки застревания” сдвига, т.е. участки блоков, силы на которых намного меньше прочности сцепления.

В нашей модели инерционные силы отсутствуют, однако при определенных обстоятельствах могут наблюдаться качественно те же эффекты. Точнее говоря, при уменьшении числа  $n$  блоков плотности распределения в полулогарифмическом масштабе меняются от квазилинейных до имеющих всплеск ”делокализации”.

Простейшая гипотеза, объясняющая это явление, такова. При фиксированном числе толчков  $N$  плотность распределения  $p(r)$  длины  $r$  кластеров срывающихся блоков имеет при максимальном встреченном  $r = R_{\max}$  значение порядка  $N^{-1}$ , если длина модели  $L > R_{\max}$ . Если же  $L < R_{\max}$ , то те конфигурации положений блоков, которые в большей модели дали бы толчки длины, превосходящей  $L$ , производят толчки длины  $L$ . Таким образом, вероятность встретить кластеры длины  $L$  имеет значение  $\sum_{r=L}^{r=R_{\max}} p(r)$  вместо  $p(L)$ , что и дает повышенную частоту характеристических землетрясений. Если эта гипотеза верна, аномальные всплески плотностей распределения должны уменьшаться и исчезать при росте  $L$  для фиксированного  $q$  и при росте  $q$  для фиксированного  $L$ .

На рис. 3, 4 изображены определенные численно (для серий из  $3 \times 10^6$  толчков) плотности распределений числа срывов блоков, участвующих в сдвиге, и сейсмического момента соответственно при  $L = 15, 25$  и  $75$ . (Плотности распределения энергии ведут себя подобно плотностям распределения сейсмического момента.) На рис. 5, 6 изображены те же функции при  $q = 0.25, 0.63$  и  $1.58$ . Очевидно, что поведение плотностей соответствует ожидаемому на основании гипотезы. Отметим, что при  $q < 1$  максимальное число срывов блоков, захваченных сдвигом, превосходит число блоков в модели, так как блоки могут срываться неоднократно.

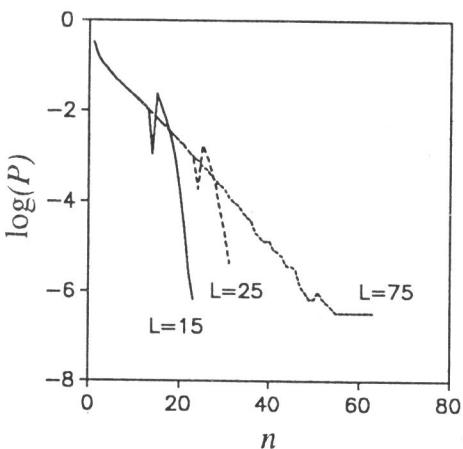


Рис. 3. Логарифмические плотности распределения числа срывов блоков в ”землетрясении” для трех значений длины  $L$

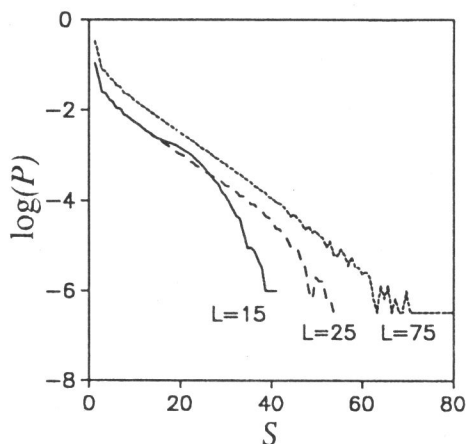


Рис. 4. Логарифмические плотности распределения сейсмического момента в ”землетрясении” для трех значений длины  $L$

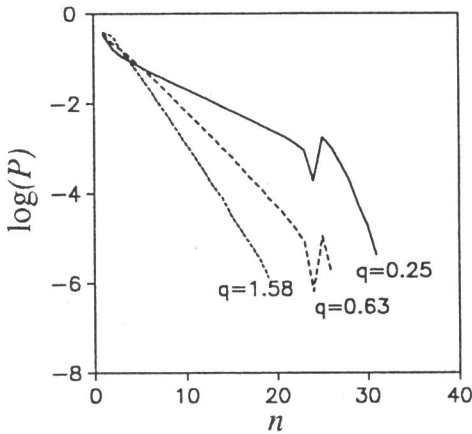


Рис. 5. Логарифмические плотности распределения числа срывов блоков в "землетрясении" для трех значений  $q$

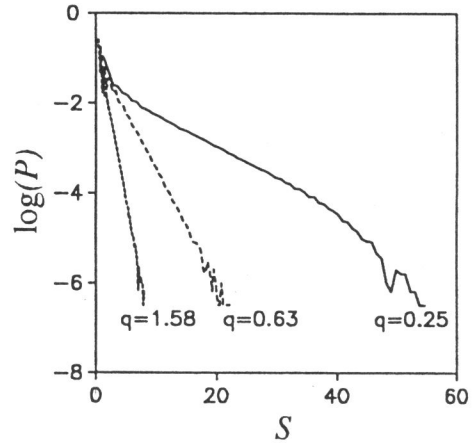


Рис. 6. Логарифмические плотности распределения сейсмического момента в "землетрясении" для трех значений  $q$

Аналогичный эффект, по-видимому, должен присутствовать в модели Карлсон и Лангера [2], в частности потому, что коэффициент  $q$  выбран там (по не вполне понятным причинам) весьма малым: порядка 0.01. Присутствие массовых сил делает размеры кластеров еще больше, поскольку блоки проскакивают моменты остановки в нашей модели и тем самым увеличивают силы, действующие на соседние блоки.

Чтобы отделить описанный эффект от настоящей делокализации (если она существует), необходимо в модели Карлсон и Лангера исследовать аналогичные зависимости при фиксации всех остальных параметров.

### ФОРШОКИ И АФТЕРШОКИ

Трехмерно-слоистая модель со случайным выбором начальных условий была использована для получения искусственных каталогов землетрясений. В качестве боковых граничных условий был выбран вариант жесткого ящика, стенки которого смещаются как  $(k-1)Y/N_3$  (где  $k$  – номер слоя,  $Y$  – смещение основания) и связаны пружинами с граничными блоками в каждом слое. (Свободные граничные условия, так же, как жесткая связь граничных блоков с потолком своего слоя, приводят к тому, что процесс вырождается к активности лишь одного слоя.)

Чтобы сравнить кластеризационные свойства модельных и реальных каталогов, мы использовали метод, восходящий к идеям работы [10] и заключающийся в следующем. Пусть в момент  $t_0$  произошло сильное землетрясение с магнитудой  $M \geq M_0$  (в модельном каталоге вместо магнитуды используется логарифм энергии). Отрезок  $(t_0 - T, t_0 + T)$  разбивается на  $2N$  одинаковых интервалов ( $T$  и  $N$  выбирает исследователь). Моментам  $t_k$ , ( $k = 1, \dots, 2N$ ), расположенным в серединах интервалов, приписываются значения некоторой функции, рассчитываемой из каталога (например, число или средняя магнитуда толчков в данном временном интервале, удаленных не более чем на фиксированное расстояние  $R$  от



эпицентра основного толчка, и т.д.). После замены переменной  $t$  на  $t - t_0$  проводится усреднение таких функций по всем встречающимся в каталоге сильным толчкам, за исключением тех, для которых в интервал  $(t_0 - T, t_0 + T)$  попадают толчки большей силы. Таким образом, сильные толчки, являющиеся форшоками или афтершоками других сильных толчков, в расчет не принимаются. Результирующие функции, представляющие собой условные математические ожидания, наряду с графиком повторяемости являются интегральными характеристиками каталогов и могут служить для более детального их сравнения.

В качестве примера для сравнения мы использовали каталог землетрясений Южной Калифорнии, содержащий более 15 000 событий. Усредненная изложенным выше способом плотность  $D$  числа толчков в радиусе 100 км от эпицентров сильных ( $M \geq 5$ ) землетрясений, из которой вычтена средняя по каталогу плотность числа толчков  $D_0$ , представлена на рис. 7 (время нормировано на средний по каталогу интервал между сильными землетрясениями). На графике видна заметная кластеризация землетрясений вокруг сильных толчков, выраженная умеренно до толчка и сильно — после него. По-видимому, средняя плотность афтершоков убывает со временем согласно закону Омори (численной проверки не проводилось).

На рис. 8 приведена аналогичная зависимость для модельного каталога на 40 000 толчков, рассчитанного при  $q = 0.5$ ;  $N_1 = N_2 = 25$ ;  $N_3 = 2$  (роль пространственной области радиуса  $R$  играл один слой). Легко видеть, что график, хотя и не вполне подобен предыдущему, все же воспроизводит некоторые существенные качественные черты реального каталога: возрастание плотности числа толчков перед крупным землетрясением, убывание — после него и заметное преобладание числа афтершоков над числом форшоков.

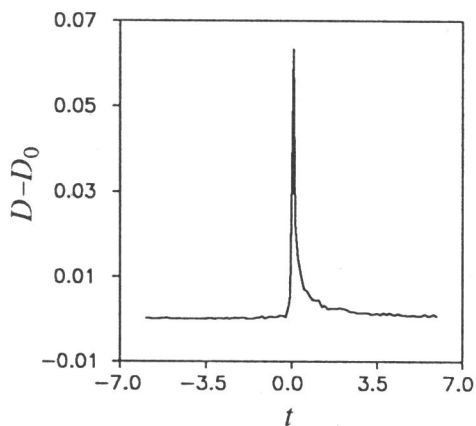


Рис. 7. Средняя плотность толчков  $D - D_0$  в окрестности сильных землетрясений для Южной Калифорнии

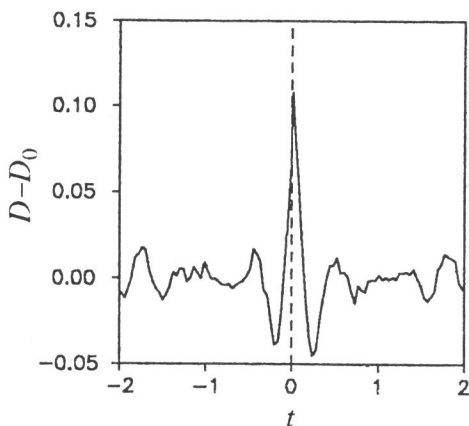


Рис. 8. Средняя плотность толчков  $D - D_0$  в окрестности сильных событий для модельного каталога

## ЛИТЕРАТУРА

1. Габриэлов А.М., Кейлис-Борок В.И., Левшина Т.А., Шапошников В.А. Блоковая модель динамики литосферы // Математические методы в сейсмологии и геодинамике. М.: Наука, 1986. С.168–178. (Вычисл. сейсмология; Вып.19).
2. Carlson J.M., Langer J.S. Properties of earthquakes generated by fault dynamics // Phys. Rev. Lett. 1989. Vol.62. P.2632–2635.
3. Bak P., Tang C. Earthquakes as a self-organized Critical Phenomenon // J. Geophys. Res. 1989. Vol.94. P.15635–15637.
4. Olami Z., Feder H.J.S., Christensen K. Self-organized criticality in a continuous, non-conservative cellular automaton modelling earthquakes // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol.68, No.8. P.1244–1247.
5. Ito K., Matsuzaki M. Earthquakes as a self-organized critical phenomena // J. Geophys. Res. 1990. Vol.95. P.6853–6860.
6. Feder H.J.S., Feder J. Self-organized criticality in a stick-slip process // Phys. Rev. Lett. 1991. Vol.66, No.20. P.2669–2672.
7. Christensen K., Olami Z. Variation of the Gutenberg-Richter values and nontrivial temporal correlations in a spring-block model for earthquakes // J. Geophys. Res. 1992. Vol.97. P.8729–8735.
8. Olami Z., Christensen K. Temporal correlations, universality, and multifractality in a spring-block model of earthquakes // Phys. Rev. A. 1992. Vol.46, No.4. P.1720–1723.
9. Burridge R., Knopoff L. Model and theoretical seismicity // Bull. Seismol. Soc. Amer. 1967. Vol.57. P.341–371.
10. Кейлис-Борок В.И., Подгаецкая В.М., Прозоров А.Г. О локальных статистиках каталогов землетрясений // Алгоритмы интерпретации сейсмических данных. М.: Наука, 1971. С.55–79. (Вычисл. сейсмология; Вып.5).