III. ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ СЕЙСМОЛОГИИ

УДК 550.331

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ МАТРИЦЫ D В ПУАССОНОВОМ СЛУЧАЕ

В.М.Маркушевич

Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук

Представление уравнений для волн Рэлея в форме матричной задачи Штурма-Лиувилля можно использовать для решения следующей обратной задачи: по заданным характеристикам рэлеевских мод определить параметры упругости и плотность среды как функции глубины. Эта задача решается в два этапа: сначала по характеристикам мод определяется матричный потенциал и затем по этому потенциалу находятся параметры среды. Так как потенциал задается симметрической матрицей **D**, фактически нам нужно определить параметры среды по заданной **D**-матрице. В этой статье решается последняя задача для пуассоновой среды, т. е. при $\lambda = \mu$. Выводятся условия, которые гарантируют положительность модуля сдвига $\mu(x)$ и плотности $\rho(x)$.

CHARACTERIZATION OF D MATRIX IN THE POISSONIAN CASE

V.M.Markushevich

International Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences

Representation of the Rayleigh surface wave equations as a matrix Sturm-Liouville problem can be used to solve the following inverse problem: Given the characteristics of the Rayleigh wave modes, find elastic parameters and density of the medium versus depth. The problem can be solved in two steps: first, find the matrix potential using the modes, and second, recover the parameters from the potential. Since the potential is defined by a symmetric matrix **D**, we need actually to find the functions $\lambda(x)$, $\mu(x)$, and density $\rho(x)$ from **D**-matrix. We solve the second problem for Poissonian media ($\lambda = \mu$). Sufficient conditions are derived for $\mu(x)$ and $\rho(x)$ to be positive.

© В.М. Маркушевич, 1994

ВВЕДЕНИЕ

В этой статье мы рассматриваем уравнения для волн Рэлея только для случая пуассонова полупространства, свойства которого зависят только от глубины x, т.е. при $\lambda(x) = \mu(x)$. Эти уравнения можно записать в форме матричной задачи Штурма-Лиувилля [1], матричный потенциал которой несимметричен, но выражается через симметрическую матрицу, которую мы обозначим через $\mathbf{D}$. Эта матрица выражается через модуль сдвига $\mu(x)$ и плотность $\rho(x)$ и содержит частоту как скалярный параметр. Задача, которая решается в этой статье, состоит в том, чтобы наоборот выразить $\mu(x)$ и $\rho(x)$ через $\mathbf{D}$ и частоту. Решение является частью обращения поверхностных волн Рэлея, возбуждаемых монохроматическим источником (или обратной задачи монохроматического виброзондирования [2, 3]), осуществляемого в два этапа: сначала по волновым числам и амплитудам рэлеевских мод находится матрица $\mathbf{D}$, а затем по этой матрице определяется строение упругой среды.

Результаты, полученные в этой статье, будут использованы также в [4] при изучении класса полупространств, допускающих аналитическое исследование свойств волн Рэлея.

1. УРАВНЕНИЯ РЭЛЕЯ В ФОРМЕ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Уравнения для волн Рэлея можно записать в форме матричной задачи Штурма-Лиувилля [1]

$$\ddot{\mathbf{F}} - \xi^2 \mathbf{F} = \mathbf{AF}, \quad \mathbf{F} = (f,\ \varphi)^{\mathrm{T}},$$

где потенциал A выражается с помощью симметрической матрицы $\mathbf{D}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{D}} - \mathbf{E}\ \det \mathbf{D}.$$

Здесь $\dot{()} \equiv d/dx$, T обозначает транспонирование и

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица D зависит от параметров Ламе $\lambda(x)$, $\mu(x)$, плотности $\rho(x)$ и частоты колебаний ω :

$$\mathbf{D} = \mathbf{G}^{\mathrm{T}} \Delta \mathbf{G}, \tag{1}$$

где

$$\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{LG}, \quad \mathbf{G}(0) = \mathbf{E}, \tag{2}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} d & \dot{\mu}/\mu \\ \dot{\mu}/\mu & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \omega^2 \mu_0 \rho / \mu^2 & 0 \\ 0 & \mu/\mu_0 \end{pmatrix},$$

$$c = \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2\mu_0(\lambda + 2\mu)}, \quad d = -\mu_0 \ddot{\left(\frac{1}{\mu}\right)}, \quad \mu_0 = \mu(0). \tag{3}$$

Нам нужно в частном случае пуассонова тела $\lambda = \mu$ решить обратную задачу: по заданной матрице $\mathbf{D}$ и частоте ω найти функции $\mu(x)$ и $\rho(x)$. Так как эти функции должны быть вещественными неотрицательными

$$\mu(x),\ \rho(x) \geq 0, \tag{4}$$

то частью поставленной задачи является выяснение ограничений, которые нужно наложить на матрицу $\mathbf{D}$, чтобы условия (4) удовлетворялись.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ СДВИГА $\mu(x)$

Дифференцируя (1) и пользуясь (2) и (3), получаем

$$\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{G}^{\mathrm{T}}\left[\begin{pmatrix}0 & d\\ c & 0\end{pmatrix}\Delta + \dot{\Delta} + \Delta\begin{pmatrix}0 & c\\ d & 0\end{pmatrix}\right]\mathbf{G} = \mathbf{G}^{\mathrm{T}}\Delta_1\mathbf{G},$$

$$\ddot{\mathbf{D}} = \mathbf{G}^{\mathrm{T}}\left[\begin{pmatrix}0 & d\\ c & 0\end{pmatrix}\Delta_1 + \dot{\Delta}_1 + \Delta_1\begin{pmatrix}0 & c\\ d & 0\end{pmatrix}\right]\mathbf{G} = \mathbf{G}^{\mathrm{T}}\Delta_2\mathbf{G}.$$

Так как из (2) следует, что $\det \mathbf{G}(x) \equiv 1$ то, обозначив $\det \mathbf{D}$, $\det \dot{\mathbf{D}}$ и $\det \ddot{\mathbf{D}}$ через f, f_1 и f_2, соответственно, найдем

$$\begin{aligned}
f &= \det \mathbf{D} = \det \Delta = \left(d - \omega^2\mu_0\frac{\rho}{\mu^2}\right)\left(c - \frac{\mu}{\mu_0}\right) - \left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}\right)^2 = uv - \sigma^2,\\
f_1 &= \det \dot{\mathbf{D}} = \det \Delta_1 = (\dot{u} + 2d\sigma)(\dot{v} + 2c\sigma) - (\dot{\sigma} + cu + dv)^2 = rs - t^2,\\
f_2 &= \det \ddot{\mathbf{D}} = \det \Delta_2 = (\dot{r} + 2dt)(\dot{s} + 2ct) - (\dot{t} + cr + ds)^2 = pq - \tau^2,
\end{aligned} \tag{5}$$

где через $u, v, \sigma, r, s, t, p, q$ и τ обозначены соответствующие выражения в скобках в левых частях соответствующих равенства. В пуассоновом случае

$$c = \frac{1}{3}\frac{\mu}{\mu_0}, \quad v = -\frac{2}{3}\frac{\mu}{\mu_0}. \tag{6}$$

Поэтому функция s, введенная в (5), равна нулю:

$$s = \dot{v} + 2c\sigma = -\frac{2}{3}\frac{\mu}{\mu_0} + 2\frac{1}{3}\frac{\mu}{\mu_0}\frac{\dot{\mu}}{\mu} = 0. \tag{7}$$

Полагая $\theta = \sqrt{-f_1}$, вследствие (7) имеем из первых двух уравнений в (5)

$$\pm\theta = cu + dv + \dot{\sigma}, \quad f = uv - \sigma^2. \tag{8}$$

Отсюда с учетом (3) и (6) получаем

$$f \pm 2\theta = -\sigma^2 + 2dv + 2\dot{\sigma} = \frac{1}{3}\left(2\dot{\overline{\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}\right)}} + \left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}\right)^2\right). \tag{9}$$

С другой стороны,

$$\frac{(\ddot{\mu^{1/2}})}{\mu^{1/2}} = \frac{1}{4}\frac{2\ddot{\mu}\mu - \dot{\mu}^2}{\mu^2} = \frac{1}{4}\left(2\dot{\overline{\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}\right)}} + \left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}\right)^2\right).$$

Поэтому

$$f \pm 2\theta = \frac{4}{3}\frac{(\ddot{\mu^{1/2}})}{\mu^{1/2}}$$

или

$$(\ddot{\mu^{1/2}}) - K(x)\mu^{1/2} = 0, \tag{10}$$

где

$$K(x) = \frac{3}{4}\left(\det \mathbf{D} \pm 2\sqrt{-\det \dot{\mathbf{D}}}\right).$$

Если заданы начальные условия $\mu(0) = \mu_0$ и $\dot{\mu}(0) = \dot{\mu}_0$, то уравнение (10) определяет μ на интервале $(0,\ x_1)$, где x_1 – наименьшее значение x, при котором $\det \dot{\mathbf{D}}(x) = 0$. Знак перед $\sqrt{-\det \dot{\mathbf{D}}}$ для $x > x_1$ можно выбрать по функции $\det \ddot{\mathbf{D}}$ (см. ниже п. 4).

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ $\rho(x)$

Второе соотношение в системе (8) с учетом выражения (6) для v и выражения для u, введенного в (5), записывается так

$$(f + \sigma^2)\frac{3}{2}\frac{\mu_0}{\mu} = \mu_0\ddot{\left(\frac{1}{\mu}\right)} + \omega^2\mu_0\frac{\rho}{\mu^2}.$$

Так как из (10) следует, что

$$\frac{3}{2}\frac{\mu_0}{\mu}\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}\right)^2 - \mu_0\ddot{\left(\frac{1}{\mu}\right)} = \frac{2\mu_0}{\mu^{3/2}}(\ddot{\mu^{1/2}}) = \frac{3}{2}\frac{\mu_0}{\mu}\left(\det \mathbf{D} \pm 2\sqrt{-\det \dot{\mathbf{D}}}\right),$$

то

$$\begin{aligned}\omega^2\mu_0\frac{\rho}{\mu_2} &= \frac{3}{2}\frac{\mu_0}{\mu}\det \mathbf{D} + \frac{3}{2}\frac{\mu_0}{\mu}\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}\right)^2 - \mu_0\ddot{\left(\frac{1}{\mu}\right)} = \\ &= \frac{3}{2}\frac{\mu_0}{\mu}\det \mathbf{D} + \frac{3}{2}\frac{\mu_0}{\mu}\left(\det \mathbf{D} \pm 2\sqrt{-\det \dot{\mathbf{D}}}\right) = \\ &= 3\frac{\mu_0}{\mu}\left(\det \mathbf{D} \pm \sqrt{-\det \dot{\mathbf{D}}}\right)\end{aligned}$$

или

$$\omega^2\frac{\rho}{\mu} = 3\left(\det \mathbf{D} \pm \sqrt{-\det \dot{\mathbf{D}}}\right), \tag{11}$$

что определяет ρ, поскольку μ можно найти из (10). Осталось найти знак в (10) и (11) для всех значений x.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАКА В ФОРМУЛАХ (10) И (11) ДЛЯ ПЛОТНОСТИ И МОДУЛЯ СДВИГА

Знак в формулах (10) и (11) перед $\sqrt{-\det\dot{\mathbf{D}}}$ можно найти вблизи поверхности по ω, μ_0 и ρ_0. Однако, если $\det\dot{\mathbf{D}} = 0$ в некоторой точке x_1, то в правой окрестности этой точки любой выбор знака не нарушает непрерывности второй производной $\mu(x)$, т.е. условия, которое считается выполненным в [1].

Определить правильный знак можно по $f_2 = \det\ddot{\mathbf{D}}$.

Утверждение. Функции f, f_1 и f_2 в пуассоновом случае связаны соотношением

$$f_2 = \mp\ddot{f}\sqrt{-f_1} - \frac{1}{4}(\dot{f})^2 - \left[\dot{\left(\sqrt{-f_1}\right)}\right]^2 \pm \dot{f}\dot{\left(\sqrt{-f_1}\right)} + \left(f \pm 2\sqrt{-f_1}\right)f_1. \tag{12}$$

Доказательство этого утверждения приводится в Приложении.

Следствие. Пусть x_1, x_2 – последовательные точки, в которых $\det\dot{\mathbf{D}} = 0$. *Тогда, если*

$$\ddot{f}\sqrt{-f_1} - \dot{f}\dot{\left(\sqrt{-f_1}\right)} - 2f_1\sqrt{-f_1} \not\equiv 0 \tag{13}$$

в интервале $(x_1,\ x_2)$, то знак перед $\sqrt{-\det\dot{\mathbf{D}}}$ в этом интервале определяется из уравнения (12).

5. УСЛОВИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ МОДУЛЯ СДВИГА μ И ПЛОТНОСТИ ρ

Теорема . Для того чтобы выполнялись ограничения $\rho(x) \geq 0$, $\mu(x) \geq 0$, достаточно выполнение условий

$$\det\dot{\mathbf{D}}(x) \leq 0, \tag{14}$$

$$\det\mathbf{D} \pm 2\sqrt{-\det\dot{\mathbf{D}}} \geq 0 \text{ при } \det\mathbf{D} \geq 0 \tag{15}$$

или

$$\det\mathbf{D} + \sqrt{-\det\dot{\mathbf{D}}} \geq 0 \text{ при } \det\mathbf{D} \leq 0 \tag{15a}$$

и

$$\sigma_0 = \frac{\dot{\mu}_0}{\mu_0} > \bar{\sigma}_0(\mu_0),$$

где величина $\bar{\sigma}_0$ определяется соотношением

$$\bar{\sigma}_0 = \inf\left\{\sigma_0 :\ \mu^{1/2}(x) > 0,\ \mu(0) = \mu_0,\ x \in (0, \infty)\right\},$$

в котором $\mu^{1/2}(x)$ – решение уравнения (10) с начальными условиями $\mu(0) = \mu_0$, $\dot{\mu}(0) = \dot{\mu}_0$. При этом, если выполнено условие (15а), то знак $\sqrt{-\det\dot{\mathbf{D}}}$ всюду, где встречается эта функция, должен быть положительным.

Утверждение теоремы следует из того, что $\mu^{1/2}(x)$ при $\mu(0) = \mu_0$ и любом x является монотонно возрастающей функцией σ_0, если выполнены условия (15) или (15а), из которых следует положительность $K(x)$ в (10).

Очевидно, что условие (14) является одновременно необходимым. Что же касается условий (15) или (15а), то они могут быть ослаблены. Однако они не так далеки от необходимых, так как если $K(x)$ в (10) является отрицательным на большом интервале, то $\mu(x)$ обращается в нуль. В частности, справедливо следующее

Утверждение [5, Гл. V, §3]. *Пусть в* (10) $K(x) \to K_0 + k(x)$ *при* $x \to \infty$, *где* $\int_0^\infty | k(x)|dx < \infty$. *Тогда если* $K_0 < 0$, *то* $\mu(x)$ *обращается в нуль.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы выяснили, как по матрице-функции $\mathbf{D}$ и по частоте найти параметры Ламе и плотность среды как функции глубины. Сформулируем доказанные утверждения в виде теорем.

Теорема 1. В пуассоновом случае, т.е. при $\lambda = \mu$, *по матрице* $\mathbf{D}$, *определенной в (1)–(3), и частоте* ω *находятся функции* μ *и* ρ *по формулам (10) и (11). При этом нужно задать также* $\mu(0)$ *и* $\dot{\mu}(0)$.

Неопределенность при выборе знака перед $\sqrt{-\det \dot{\mathbf{D}}}$ устраняется следующим образом.

Теорема 2. Пусть $\det \dot{\mathbf{D}} \not\equiv 0$ *обращается в нуль в точках* x_i, $i = 1, 2, \ldots$, *и пусть в каждом интервале* $(x_i,\ x_{i+1})$ *выполняется условие (13), т.е. левая часть этого выражения не обращается в нуль хотя бы на некотором подинтервале этого интервала. Тогда знак перед* $\sqrt{-\det \dot{\mathbf{D}}}$ *в формулах (10) и (11) определяется уравнением (12).*

Теорема 3 об условиях, достаточных для того, чтобы выполнялись ограничения $\rho(x) \geq 0$, $\mu(x) \geq 0$, приведена в п. 5.

Заметим, что условие (12), скорее всего, выполняется только для пуассоновых тел. Иначе говоря, если f, f_1, и f_2 удовлетворяют (12), то $\lambda = \mu$. Однако доказательство этого утверждения требует изучения характерных признаков матрицы $\mathbf{D}$ в общем случае упругих тел при $\lambda \neq \mu$.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ВЫВОД ФОРМУЛЫ (12)

Пусть

$$g = f \pm 2\sqrt{-f_1} = f \pm 2\theta.$$

Из (9), (10) и (11) получаем

$$\frac{\ddot{(\mu^{1/2})}}{\mu^{1/2}} = \frac{1}{4}\frac{2\ddot{\mu}\mu - \dot{\mu}^2}{\mu^2} = \frac{3}{4}g \qquad \text{или} \qquad \frac{2\ddot{\mu}\mu - \dot{\mu}^2}{\mu^2} = 3g$$

и $$\omega^2\frac{\rho}{\mu} = 3(f \pm \theta).$$

С учетом (7) получаем из (5)

$$f_2 = (\dot{r} + 2dt)2ct - (\dot{t} + cr)^2, \tag{П1}$$

где

$$r = \dot{u} + 2d\sigma = \dot{d} - \omega^2\mu_0\dot{\left(\frac{\rho}{\mu^2}\right)} + 2d\frac{\dot{\mu}}{\mu}.$$

Из выражения $f = uv - \sigma^2$ получаем

$$-\dot{\overline{\left[d - \omega^2\mu_0\frac{\rho}{\mu_2}\right]}} = \frac{3}{2}\dot{\overline{\left(\frac{\mu_0}{\mu}f\right)}} + \frac{3}{2}\frac{\mu_0\dot{\mu}(2\ddot{\mu}\mu - 3\dot{\mu}^2)}{\mu^4}.$$

Откуда

$$r = -\frac{3}{2}\dot{\overline{\left(\frac{\mu_0}{\mu}f\right)}} - \frac{3}{2}\frac{\mu_0\dot{\mu}(2\ddot{\mu}\mu - 3\dot{\mu}^2)}{\mu^4} + 2\frac{\mu_0\dot{\mu}(\ddot{\mu}\mu - 2\dot{\mu}^2)}{\mu^4} =$$

$$= -\frac{3}{2}\dot{\overline{\left(\frac{\mu_0}{\mu}f\right)}} + \frac{3}{2}\dot{\overline{\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)}}g = -\frac{3}{2}\dot{f}\frac{\mu_0}{\mu} \pm 3\theta\dot{\overline{\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)}},$$

$$\dot{r} = -\frac{3}{2}\ddot{f}\frac{\mu_0}{\mu} - \frac{3}{2}(\dot{f} \mp 2\dot{t})\dot{\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)} \pm 3\theta\ddot{\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)},$$

$$\dot{r} + 2dt = -\frac{3}{2}\ddot{f}\frac{\mu_0}{\mu} - \frac{3}{2}\dot{f}\dot{\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)} \pm 3\dot{\theta}\dot{\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)} \pm \theta\ddot{\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)}, \tag{П2}$$

$$2ct = \pm\frac{2}{3}\frac{\mu}{\mu_0}\theta, \tag{П3}$$

$$\dot{t} + cr = -\frac{1}{2}\dot{f} \pm \frac{\mu}{\mu_0}\dot{\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)} \pm \dot{\theta}. \tag{П4}$$

Подставляя (П2), (П3) и (П4) в (П1), получим

$$f_2 = \left[-\ddot{f}\frac{\mu_0}{\mu} - \dot{f}\dot{\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)} \pm 2\dot{\theta}\dot{\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)} \pm \frac{2}{3}\theta\ddot{\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)}\right]\left(\pm\frac{\mu}{\mu_0}\theta\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{2}\dot{f} \pm \frac{\mu}{\mu_0}\dot{\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)}\theta \pm \dot{\theta}\right)^2 =$$

$$= \left[-\ddot{f}\frac{\mu_0}{\mu} \pm \frac{2}{3}\theta\ddot{\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)}\right]\left(\pm\frac{\mu}{\mu_0}\theta\right) - \left[\frac{1}{4}\dot{f}^2 + \frac{\mu^2}{\mu_0^2}\left(\dot{\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)}\right)^2\theta^2 + \dot{\theta}^2 \mp \dot{f}\dot{\theta}\right] =$$

$$= \mp\ddot{f}\theta - \frac{1}{4}\dot{f}^2 - \dot{\theta}^2 \pm \dot{f}\dot{\theta} + \left[\frac{2}{3}\frac{\mu}{\mu_0}\ddot{\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)} - \left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}\right)^2\right]\theta^2 =$$

$$= \mp\ddot{f}\theta - \frac{1}{4}\dot{f}^2 - \dot{\theta}^2 \pm \dot{f}\dot{\theta} - g\theta^2.$$

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (код проекта 94-05-16524). Автор глубоко признателен А.С.Цемахману за обсуждение задачи, которое помогло сделать решающий шаг в этом исследовании.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркушевич В. М.* Представление матричных потенциалов в уравнении для волн Рэлея через симметричную матрицу // Компьютерный анализ геофизических полей. М.: Наука, 1990. С.227–234. (Вычисл. сейсмология; Вып. 23).
2. *Маркушевич В. М.* Вынужденные гармонические колебания рэлеевского типа и матричная задача рассеяния // Математические методы в сейсмологии и геодинамике. М.: Наука, 1986. С.119–135. (Вычисл. сейсмология; Вып. 19).
3. *Маркушевич В. М., Хенкин Г. М.* Явные формулы для восстановления упругих параметров полупространства по поверхностным волнам Рэлея // Численное моделирование и анализ геофизических процессов. М. : Наука, 1987. С.161–168. (Вычисл. сейсмология; Вып. 20).
4. *Маркушевич В. М.* Рэлеевские волны в средах Пикериса. I. Исследование системы уравнений и ее решение. Наст. сборник.
5. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.